Felicia Săndulescu

Memorator de matematică

pentru clasele 5-8

Booklet
București, 2016

CUPRINS

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

Editura Booklet
www.booklet.ro

Pentru comenzi:
tel: 021 430.3095
e-mail: comenzi@booklet.ro
www: www.booklet.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
SĂNDULESCU, FELICIA
Memorator de matematică: pentru clasele 5-8 / Felicia Săndulescu - Bucureşti: Booklet, 2016
ISBN 978-606-590-309-8

(075.35)

CNI CORESI
Tipărit la C.N.I. „CORESI" S.A.

ALGEBRĂ

I. MULŢIMI

Definiţie: Prin mulţime înţelegem o colecţie de obiecte bine determinate şi distincte. Obiectele din care este alcătuită o mulţime se numesc elementele mulţimii. Mulţimile se notează cu litere mari din alfabet.

Mulţimea care nu are nici un element se numeşte mulţimea vidă şi se notează $\varnothing$.

Dacă un element x aparţine unei mulţimi A se notează cu „ $x \in A$ ”.

O mulţime poate fi definită:

- sintetic, enumerând elementele sale:

Exemplu: $A = \{0;1;2;3;4\}$.

- analitic, punând în evidenţă o proprietate a elementelor mulţimii:

Exemplu: $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$.

Două mulţimi sunt egale dacă au aceleaşi elemente. Dacă toate elementele unei mulţimi A se găsesc într-o altă mulţime B, atunci vom spune că A este inclusă în B şi notăm „ $A \subset B$ ”.

Mulțimi de numere

1. $\mathbb{N}=\{0;1;2;...\}=$ mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{N}^*=\{1;2;...\}=\mathbb{N}-\{0\}=$ mulțimea numerelor naturale nenule

2. $\mathbb{Z}=\{...;-2;-1;0;1;2;...\}=$ mulțimea numerelor întregi.

$\mathbb{Z}^*=\{...;-2;-1;1;2;...\}=\mathbb{Z}-\{0\}=$ mulțimea numerelor întregi nenule

$\mathbb{Z}_+^*=\{1;2;...\}=\mathbb{N}^*=$ mulțimea numerelor întregi nenule pozitive

$\mathbb{Z}_-^*=\{...;-2;-1\}=$ mulțimea numerelor întregi nenule negative

3. $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} / a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}=$ mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{Q}^*=\left\{\frac{a}{b} / a,b\in\mathbb{Z}^*\right\}=\mathbb{Q}-\{0\}=$ mulțimea numerelor raționale nenule

$\mathbb{Q}_+^*=\left\{\frac{a}{b} / a,b\in\mathbb{N}^*\right\}=$ mulțimea numerelor raționale nenule pozitive

$\mathbb{Q}_-^*=\left\{-\frac{a}{b} / a,b\in\mathbb{N}^*\right\}=$ mulțimea numerelor raționale nenule negative

4. $\mathbb{R}=$ mulțimea numerelor reale

$\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}=$ mulțimea numerelor reale nenule

5. $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=$ mulțimea numerelor iraționale

Ex: x $\sqrt{2};\sqrt{3};\pi;5\sqrt{5}$.

Proprietățile incluziunii mulțimilor

1) $A\subseteq B \Leftrightarrow$ dacă $x\in A\Rightarrow x\in B$.

2) $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ și $B\subseteq A$.

3) $A\subseteq B; B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

4) $A\subseteq A$.

5) $\varnothing\subseteq A$.

Operații cu mulțimi

1) Reuniunea a două sau mai multe mulțimi - se aleg toate elementele din toate mulțimile, considerate o singură dată.

Se notează $A\cup B=\{x / x\in A \text{ sau } x\in B\}$.

Exemplu:

$A=\{0;1;7;9;10\}$; $B=\{0;2;3\}$; $C=\{1;2;3;4;5\}$.

$A\cup B\cup C=\{0;1;2;3;4;5;7;9;10\}$.

2) Intersecția a două sau mai multe mulțimi - se aleg numai elementele comune ale tuturor mulțimilor.

Se notează $A\cap B=\{x / x\in A \text{ și } x\in B\}$.

Exemplu: $A=\{0;1;7;9;10\}$; $B=\{0;2;3\}$.

$A\cap B=\{0\}$.

3) Diferența a două mulțimi - se consideră numai elementele care sunt în prima mulțime și nu se găsesc în a doua mulțime.

Se notează $A-B=\{x / x \in A$ și $x \notin B\}$.

Exemplu:

$A=\{0;1;7;9;10\}$; $B=\{0;2;3\}$

$A-B=\{1;7;9;10\}$; $B-A=\{2;3\}$

4) Complementara mulțimii $A \subset E$ față de mulțimea E: se consideră toate elementele care sunt în E și nu sunt în A. Se notează $C_E(A)=E-A$

Exemplu: dacă $A=\{0;1;3;5\}$, atunci

$C_{\mathbb{N}}(A)=\{2;4;6;7;8;...\}$

Proprietățile operațiilor cu mulțimi:

1) $A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C$;

$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$

2) $A \cap B=B \cap A$; $A \cup B=B \cup A$

3) $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4) $A \cap (A \cup B)=A$; $A \cup (A \cap B)=A$

5) $C_E(A \cap B)=C_E(A) \cup C_E(B)$;

$C_E(A \cup B)=C_E(A) \cap C_E(B)$, unde $A \subset E; B \subset E$

Exerciții

1) Fie mulțimea $A=\{x / x \in \mathbb{N}^*, 2x+3 \leq 9\}$.

a) Aflați elementele mulțimii A.

b) Dacă $B=\{0;3;6;9\}$ aflați $A \cap B$, $A \cup B$, $A-B$, $B-A$.

Rezolvare:

a) $2x+3 \leq 9 \Rightarrow 2x \leq 9-3 \Rightarrow 2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 6:2$

$\Rightarrow x \leq 3$; $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow A=\{1;2;3\}$

b) $A \cap B=\{3\}$

$A \cup B=\{0;1;2;3;6;9\}$

$A-B=\{1;2\}$

$B-A=\{0;6;9\}$

2) Se consideră două mulțimi care verifică condițiile:

$A \cap B=\{5;6\}$; $A \cup B=\{1;2;5;6;7\}$; $B-A=\{7\}$.

Aflați elementele fiecărei mulțimi.

Rezolvare:

$A \cap B=\{5;6\} \Rightarrow 5 \in A$ și $5 \in B$,

$6 \in A$ și $6 \in B$

$B-A=\{7\} \Rightarrow 7 \in B$ și $7 \notin A$.

$A \cup B=\{1;2;5;6;7\} \Rightarrow A=\{1;2;5;6\}$; $B=\{5;6;7\}$.

II. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N}=\{0;1;2;...;n;n+1;...\}$ = mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{N}^*=\{1;2;3;......;n;n+1;...\}$ = mulțimea numerelor naturale nenule

$0;1;2;...;9$ = cifre

Numerele care diferă între ele prin 1 se numesc numere consecutive.

Exemple: $n, n+1=$ două numere consecutive

$n, n+1, n+2=$ trei numere consecutive

Scrierea numerelor naturale în baza 10

$\overline{a}=a$

$\overline{ab}=a\cdot 10+b$ un număr natural cu două cifre, $a\neq 0$

$\overline{abc}=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$ un număr natural cu trei cifre, $a\neq 0$

Aproximarea numerelor se poate face prin lipsă sau adaos până la zeci, sute, mii etc.

	Aproximare prin lipsă	Numărul	Aproximare prin adaos
la zeci	83960	83961	83970
la sute	83900	83961	84000
la mii	83000	83961	84000

Rotunjirea până la zeci (sute, mii etc.) reprezintă aproximarea (prin lipsă dau prin adaos) la cea mai apropiată valoare.

Exerciții:

1) Aflați trei numere naturale consecutive știind că suma lor este 93.

Rezolvare: $n, n+1, n+2=$ numere consecutive

$n+n+1+n+2=93 \Rightarrow 3n+3=93 \Rightarrow 3n=90 \Rightarrow$

$\Rightarrow n=30 \Rightarrow$ numerele sunt $30, 31, 32$.

2) Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ știind că a, b și c sunt cifre care respectă condiția $a+b=c, c\leq 4$.

Rezolvare:

I. $c=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=b=0$ (F)

II. $c=1 \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow a=1$ și $b=0 \Rightarrow \overline{abc}$ este 101

III. $c=2 \Rightarrow a+b=2$

1. $a=1, b=1 \Rightarrow \overline{abc}$ este 112
2. $a=2, b=0 \Rightarrow \overline{abc}$ este 202

IV. $c=3 \Rightarrow a+b=3$

1. $a=1, b=2 \Rightarrow \overline{abc}$ este 123
2. $a=2, b=1 \Rightarrow \overline{abc}$ este 213
3. $a=3, b=0 \Rightarrow \overline{abc}$ este 303

Operații cu numere naturale

1) Adunarea numerelor naturale

$T_1 + T_2 = S$, unde T_1, T_2 = termenii sumei

S = sumă

$T_1 = S - T_2$ și $T_2 = S - T_1$

Proprietățile adunării

a) Adunarea este asociativă: oricare ar fi a, b și c numere naturale avem: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

b) Numărul natural 0 este element neutru la adunare: oricare ar fi numărul natural a avem: $0+a=a+0=a$

c) Adunarea este comutativă: oricare ar fi a și b două numere naturale, avem $a+b=b+a$.

Observație: $1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1):2$

2) Scăderea numerelor naturale

$D - S = R$, unde D = descăzut, S = scăzător, R = rest; $D = R + S$; $S = D - R$.

Scăderea numerelor naturale nu este nici asociativă, nici comutativă și nu are nici element neutru.

3) Înmulțirea numerelor naturale

$F_1 \cdot F_2 = P$; unde F_1, F_2 = factorii produsului

P = produs

Proprietățile înmulțirii

a) Înmulțirea este asociativă: oricare ar fi a, b și c numere naturale, avem: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

b) Numărul natural 1 este element neutru la înmulțire: oricare ar fi numărul natural a avem: $1\cdot a = a\cdot 1 = 1$.

c) Înmulțirea este comutativă: oricare ar fi a și b două numere naturale, avem $a\cdot b = b\cdot a$.

d) Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere: oricare ar fi a, b, c numere naturale, avem: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$; $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c$.

4) Împărțirea numerelor naturale

Teorema împărțirii cu rest:

$\boldsymbol{D = \hat{I}\cdot C + R}$, unde

D = deîmpărțit, Î = împărțitor, C = cât și R = rest, iar $0 \le R < \hat{I}$.

Împărțirea nu este nici comutativă, nici asociativă și nu are nici element neutru.

5) Ridicarea la putere a numerelor naturale

$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{de n ori}}$, $n \ge 2$; a = baza; n = exponentul

Proprietățile ridicării la putere

a) $a^0 = 1; a^1 = 1$; $0^n = 0$; $1^n = 1$

b) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

c) $a^n : a^m = a^{n-m}$, $n \ge m$

d) $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

Observație: 0^0 - nu are sens