Marian ANDRONACHE • Dinu ȘERBĂNESCU
Marius PERIANU • Cătălin CIUPALĂ • Florian DUMITREL

Matematică M2

pentru Bacalaureat

Filiera teoretică, profilul real,
specializarea științe ale naturii

Filiera tehnologică, toate profilurile

art
educațional

Cuprins

Algebră / Geometrie 1

Clasele IX–X

Tema 1.1. Mulțimi de numere. Mulțimi și elemente de logică matematică
(clasa a IX-a)

Tema 1.2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)
(clasa a IX-a)

Tema 1.3. Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice
(clasele IX–X)

Tema 1.4. Funcția de gradul I. Funcția de gradul al II-lea
(clasa a IX-a)

Tema 1.5. Puteri și radicali. Ecuații iraționale
(clasa a X-a)

Tema 1.6. Funcția exponențială și funcția logaritmică.
Ecuații și inecuații exponențiale și logaritmice
(clasa a X-a)

Tema 1.7. Numere complexe
(clasa a X-a)

Tema 1.8. Metode de numărare. Elemente de combinatorică. Matematici financiare
(clasa a X-a)

Tema 1.9. Vectori în plan. Geometrie vectorială. Geometrie analitică
(clasele IX–X)

Tema 1.10. Trigonometrie. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană
(clasa a X-a)

Tema 1.1

Mulțimi de numere.
Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal decât x se numește *partea întreagă* a lui x. Se notează: $[x] = \max\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\}$.

Numărul real $\{x\} = x - [x]$ se numește *partea fracționară* a lui x.

Proprietăți

P1. $[x] \leq x < [x]+1, \forall x \in \mathbb{R}$;

P2. $x-1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

P3. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

P4. $[x+n] = [x]+n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$;

1. $\{x\} \in [0,1), \forall x \in \mathbb{R}$;

2. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

3. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$,

4. $\{x+n\} = \{x\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$.

Identitatea lui Hermite

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx], \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Probleme propuse

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții

a) p : „$[x]+[y]=[x+y]$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$“, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) q : „$\{3x\} = 3\{x\}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$“, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

c) r : „$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y^2 = 2012$“.

2. Determinați valoarea de adevăr a afirmației: „Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional.“

Variante bacalaureat 2009

3. *a)* Calculați $\left[\sqrt{2012}\right]+\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left\{-\sqrt{2}\right\}$.

b) Calculați $\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013}\right]$.

c) Calculați $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

d) Calculați $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{100}\right]$.

e) Calculați $\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2\right]$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

4. *a)* Determinați mulțimea $A=\{x\in[0,2] \mid [2x]=2[x]\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.
b) Determinați mulțimea $B=\{x\in[-1,2] \mid 3\{x\}=1\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

5. Arătați că $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.
Împărțiți-vă în două echipe. Rezolvați fiecare dintre voi exercițiul, apoi confruntați rezultatele în cadrul echipei. Explicați-le colegilor care au greșit cum ați ajuns la concluzie. Câștigă echipa ce prezintă prima rezultatul corect.

6. Fie $x\in\mathbb{R}^*$. Arătați că $\left[\frac{1}{x}\right]=0$ dacă și numai dacă $x>1$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

7. *a)* Arătați că $\{\{x\}+y\}=\{x+\{y\}\}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că $\{\{x+y\}+z\}=\{x+\{y+z\}\}$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Variante bacalaureat 2009, enunț adaptat

8. *a)* Arătați că $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că dacă $[x+a]=[x+b]$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci $a=b$.

9. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\left\{x\in\mathbb{R} \mid (m^2-1)x+2>0\right\}=\mathbb{R}$.

10. Determinați cel mai mic element al mulțimii $\left\{x\in\mathbb{R} \mid (x+2)(x^2-4)\geq 0\right\}$.

11. Se consideră $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid (x-1)\left(x-\frac{10}{3}\right)\leq 0\right\}$. Determinați cel mai mare element al mulțimii $B=\{|a-b| \mid a,b\in\mathbb{Z},\ a<b,\ [a,b]\subset A\}$.

12. Determinați numerele naturale din mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}<x\leq 2\right\}$.

13. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R} \mid |x|<2\}$ și $B=[-3,0)$. Determinați $A\cap B\cap\mathbb{Z}$.

14. Se consideră mulțimile $A=\{0,2,4,6,\ldots,50\}$ și $B=\{0,3,6,9,\ldots,48\}$. Aflați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile A, B, $A\cap B$ și $A\cup B$.

15. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2\ldots$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$.

16. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{4}{11}=a_0,a_1a_2\ldots$. Determinați suma elementelor mulțimii $A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$.

17. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{10}{13}=0,a_1a_2a_3\ldots$. Calculați $a_1+a_2+\ldots+a_{2012}$.

Variante bacalaureat, februarie 2008, enunț adaptat

18. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\{1;2\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 4 = 0\}$.

19. Determinați perechile $(m,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $\{1;2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + n = 0\}$.

20. Determinați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - ax + 4 = 0\} \cap \{0,1,2,\ldots,2011\} \neq \varnothing$.

21. Se consideră mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Arată că numerele $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ și $\{\sqrt{3}\}$ aparțin mulțimii A.

b) Arată că $x \cdot y \in A$, pentru orice $x, y \in A$.

c) Arată că mulțimea $B = \{x \in A \mid [x] = 0\}$ are cel puțin 2012 elemente.

Rezolvă exercițiul, apoi explică-le colegilor pașii prin care ai ajuns la rezultat.

22. Arătați că $\sqrt{3} \notin \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.

Variante bacalaureat, februarie 2008

23. Determinați $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$.

24. Arătați că $x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Variante bacalaureat 2009

25. Determinați $x + y + z$ știind că $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 14 = 0$.

26. *a)* Arătați că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$, atunci $x = y = z$.

b) Determinați mulțimea $\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 + 4 = ab + 2a + 2b\}$.

27. *a)* Arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a, b > 0$.

b) Arătați că $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,\ \forall a, bc \geq 0$.

28. Se consideră numerele $x, y \geq 1$.

a) Arătați că $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy$.

29. Determinați mulțimea $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{a} + \sqrt[4]{b} = 2\}$.

30. Dați un exemplu de două numere naturale a și b care îndeplinesc condiția $\sqrt{a} - \log_3 b \in \mathbb{N}^*$.

31. Dați un exemplu de două numere iraționale a și b care îndeplinesc condițiile $a + b \in \mathbb{N}^*$ și $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

32. Determinați un element $(a,b,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ care verifică condiția $2^a < b < \log_3 c$.

33. Ordonați crescător numerele.

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \ln 2$;

b) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[6]{6}$;

c) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\ \sqrt{5}$;

d) $\frac{1}{2},\ \log_3 2,\ \ln 2,\ \sqrt{3},\ 1$.

Tema 1.2

Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale (şiruri)

1. Şiruri

Definiţie. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *monoton (strict) crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1} (x_n < x_{n+1})$, $\forall n \geq 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *monoton (strict) descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1} (x_n > x_{n+1})$, $\forall n \geq 1$.

Definiţie. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit inferior* dacă există un număr real (notat cu) m astfel încât $m \leq x_n$, $\forall n \geq 1$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit superior* dacă există un număr real (notat cu) M astfel încât $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit atât inferior cât şi superior, spunem că şirul este *mărginit*.

2. Progresii aritmetice

Definiţie. Şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie aritmetică de raţie r* dacă $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \geq 1$ (adică diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este constantă).

Proprietăţi

P1. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $\forall n \geq 1$.

P2. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.

P3. $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + r\dfrac{n(n-1)}{2}$, $\forall n \geq 1$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

P4. $n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1$, $\forall n \geq 1$, $r \neq 0$.

3. Progresii geometrice

Definiţie. Şirul de numere reale nenule $(b_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie geometrică de raţie q* dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (adică raportul oricăror doi termeni consecutivi este constant).

Proprietăţi

P1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$

P2. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2$.

P3. $S_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$, unde $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Probleme propuse

1. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu termenul general $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$ este crescător.

Variante bacalaureat 2009

2. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$ este strict monoton.

Variante bacalaureat 2009

3. Arătați că șirurile următoare sunt monotone.

a) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}, \ \forall n \geq 1.$

b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \ \forall n \geq 1.$

c) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \ \forall n \geq 1.$

4. Arătați că șirurile următoare sunt mărginite.

a) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \ \forall n \geq 1.$

b) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \ \forall n \geq 1.$

c) $x_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}, \ \forall n \geq 1.$

Împărțiți-vă în două echipe. Rezolvați fiecare dintre voi exercițiul, apoi confruntați rezultatele în cadrul echipei. Explicați-le colegilor care au greșit cum ați ajuns la concluzie. Câștigă echipa ce prezintă prima rezultatul corect.

5. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq0}$ astfel încât $a_5 = 7$ și $a_{23} = 43$.

a) Determinați a_{13}.

b) Stabiliți dacă numărul 2015 este termen al progresiei?

c) Calculați suma $T = a_2 + a_5 + a_8 + \ldots + a_{2012}$.

6. Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

Variante bacalaureat 2009

7. Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că x, $(x-1)^2$ și $x+2$ sunt în progresie aritmetică.

8. Determinați numărul real x știind că numerele $x+1$, $1-x$ și 4 sunt în progresie aritmetică.

9. Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care numerele 2^{a-1}, $2^{-a+2}+1$, $2^{a+1}+1$ sunt în progresie aritmetică.

Variante bacalaureat 2009

10. Calculați sumele.

a) $1+4+7+\ldots+100$;

b) $2+6+10+\ldots+2010$;

c) $1+3+5+\ldots+(2n+3)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $1+5+9+\ldots+(4n-3)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Arătați că suma primelor n numere naturale impare este un pătrat perfect.

12. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$. Știind că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 + n$, demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este o progresie aritmetică.