DANIEL VLĂDUCU
MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

Ediţia a II-a

Editura Paralela 45

Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
VLĂDUCU, DANIEL
Memorator de matematică pentru clasele IX-XII / Daniel Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 2-a. - Piteşti : Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-2896-1

I. Kása, Márta

51

CUPRINS

ALGEBRĂ

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}),\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}),\ \forall n \in 2\mathbb{N}+1$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\frac{1}{2}\cdot\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac)\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a).$

SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

MODULUL

Definiție: Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ și $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- $|x| \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;
- $|x| < c, \ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$;
- $|x| > c, \ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$;
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$; $\exists$ „=” $\Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0$;

- $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ şi $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

PARTEA ÎNTREAGĂ, PARTEA FRACȚIONARĂ

Definiții:

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul x şi se notează $[x]$.

Partea fracţionară a lui x se notează $\{x\}$ şi $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăți:

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $[m + x] = m + [x], \ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\{m + x\} = \{x\}, \ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$;
- $[x] + \left[x + \dfrac{1}{n}\right] + ... + \left[x + \dfrac{n-1}{n}\right] = [nx], \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \geq 2$ **(Hermite)**.

INEGALITĂȚI REMARCABILE

- Dacă $a \cdot b > 0$, atunci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.
- $x \cdot y \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

- $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx,\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$;
- $3\cdot(xy+yx+zx) \leq (x+y+z)^2 \leq 3\cdot(x^2+y^2+z^2)$.

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k),\ \text{unde}$$

$$m_h = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \quad \text{(media armonică)},$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \quad \text{(media geometrică)},$$

$$m_a = \frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} \quad \text{(media aritmetică)},$$

$$m_p = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}}{n}} \quad \text{(media pătratică)}.$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2}\right)\cdot\left(b_1^{\ 2}+\ldots+b_n^{\ 2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2}\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2}$$

Inegalitatea lui Minkowski

$$\sqrt{(x+y)^2+(a+b)^2} \leq \sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîşev

Dacă $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ sunt două şiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k \leq n\cdot\sum_{k=1}^{n}(a_k\cdot b_k),$$

iar dacă (a_k), (b_k) sunt două şiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k \geq n\cdot\sum_{k=1}^{n}(a_k\cdot b_k).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+\alpha)^r \geq 1+r\alpha,\quad \forall\ \alpha, r\in\mathbb{R},\ \alpha\geq -1,\ r\geq 0$$

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULŢIMI

- Se numeşte propoziţie, în sensul logicii matematice, un enunţ care, într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Valoare de adevăr, tabele de adevăr

p	q	$\rceil$p	p $\vee$ q	p $\wedge$ q	p $\rightarrow$ q	p $\leftrightarrow$ q
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- Se numeşte predicat un enunţ care depinde de una sau mai multe variabile şi care devine propoziţie oricum am înlocui variabilele cu valori alese dintr-o mulţime.

4. Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă. Lungimea arcului aflat pe graficul funcției f având extremitățile în punctele $A_0(a, f(a))$ și $A_n(b, f(b))$, este:

$$l_f = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

5. Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă. Suprafața corpului C_f generat prin rotația în jurul axei Ox a domeniului plan situat între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = a$, $x = b$ are aria:

$$\text{aria}(C_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU

I. VECTORI LEGAȚI

NOȚIUNI GENERALE

Definiție: Se numește **segment orientat** sau **vector legat** orice pereche ordonată (A, B) de puncte din plan.

Notație: $\overrightarrow{AB}$.

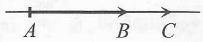
Punctul A se numește **originea vectorului**, iar punctul B se numește **extremitatea vectorului** legat $\overrightarrow{AB}$.

DIRECȚIE

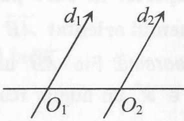
Definiție: Doi vectori legați au **aceeași direcție** dacă sunt nenuli și dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.

SENS

Definiții:



• Doi vectori legați nenuli coliniari au **același sens** dacă sensurile de parcurs determinate pe dreapta suport comună coincid.



• Doi vectori legați nenuli paraleli au **același sens** dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care le unește originile.

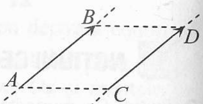
LUNGIME

Definiții:

• Fie $\overrightarrow{AB}$ un vector legat. **Lungimea vectorului legat** $\overrightarrow{AB}$ este distanța dintre punctele A și B, cu alte cuvinte, lungimea segmentului neorientat AB. Lungimea vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ se mai numeşte şi **norma** sau **modulul** lui $\overrightarrow{AB}$.

Notație: $|\overrightarrow{AB}|$, $\|\overrightarrow{AB}\|$, $d(A, B)$ sau AB.

VECTORI LEGAȚI ECHIPOLENȚI



Definiție: Doi vectori legaţi nenuli se numesc **echipolenţi** dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

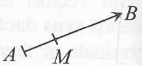
RAPORTUL ÎN CARE UN PUNCT ÎMPARTE UN SEGMENT ORIENTAT

Definiții:

• Fie $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat (vector liber) nenul. Spunem că **punctul M împarte segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ în raportul k, $k \in \mathbb{R}^*$**, dacă are loc relaţia:

$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}.$$

• Numărul $k \overset{\text{not.}}{=} \dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} \in \mathbb{R}^*$ se numeşte **raportul în care punctul M împarte segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$**.



eoremă: Fie $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat (vector liber) nenul. Fie $\in \mathbb{R}^*$ un număr real şi M un punct de pe segmentul neorientat $AB]$ astfel încât $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$. Dacă O este originea planului $\mathcal{P}$, tunci are loc relaţia:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OB}.$$

II. VECTORI LIBERI

NOȚIUNI GENERALE

Definiție: Se numeşte **vector liber** mulţimea tuturor vectorilor legaţi, echipolenţi cu un vector legat dat.

OPERAȚII CU VECTORI LIBERI

ADUNAREA VECTORILOR LIBERI

Definiție: Definim **suma vectorilor liberi** $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ ca fiind vectorul $\vec{u} + \vec{v}$ care are ca reprezentant vectorul legat $\overrightarrow{OB}$ ce verifică relaţia:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

Relaţia de mai sus se numeşte **regula triunghiului** sau **relaţia lui Chasles.**

Proprietățile adunării vectorilor liberi

Fie $\mathcal{V}$ mulţimea vectorilor liberi din plan. Avem proprietăţile:

1. comutativitate: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$;

2. asociativitate: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$;

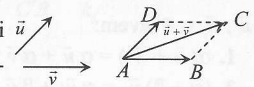
3. element neutru: $\exists\, \vec{0} \in \mathcal{V}$ astfel încât $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, $\forall\, \vec{u} \in \mathcal{V}$; vectorul $\vec{0}$ este vectorul nul;

4. element opus: $\forall\, \vec{u} \in \mathcal{V}, \exists -\vec{u} \in \mathcal{V}$, astfel încât $\vec{u} + (-\vec{u}) = (\vec{u}) + u = \vec{0}$.

Regula paralelogramului

Fie vectorii liberi $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$.

Luăm $\overrightarrow{AB}$ reprezentant al vectorului liber $\vec{u}$ şi $\overrightarrow{AD}$ reprezentant al vectorului liber $\vec{v}$.

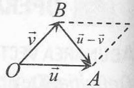


Construim paralelogramul $ABCD$, unde C este vârful diagonal opus lui A. Vectorul legat $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul vectorului liber sumă $\vec{u}+\vec{v}$.

SCĂDEREA VECTORILOR LIBERI

Fie $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathcal{V}$ doi vectori liberi necoliniari. Fie $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant al vectorului $\vec{u}$ și $\overrightarrow{OB}$ un reprezentant al vectorului $\vec{v}$.

Definiție: Definim **diferența vectorilor liberi** $\vec{u}$, $\vec{v}$ ca fiind suma dintre vectorul $\vec{u}$ și opusul lui $\vec{v}$, adică vectorul liber $\vec{u}+(-\vec{v}) \overset{\text{not.}}{=} \vec{u}-\vec{v}$, care are ca reprezentant vectorul legat $\overrightarrow{BA}$ ce verifică relația



$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

(Oricare ar fi punctele $A, B \in \mathcal{P}$ avem $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$.)

ÎNMULȚIREA UNUI VECTOR LIBER CU UN NUMĂR REAL

Fie $\mathcal{V}$ mulțimea vectorilor liberi din plan.

Definiție: Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un număr real nenul și $\vec{u} \in \mathcal{V}$ un vector liber nenul. Definim **produsul dintre numărul real** α **și vectorul liber** $\vec{u}$ ca fiind vectorul $\alpha\vec{u}$, care are:

a) aceeași direcție cu $\vec{u}$;

b) același sens cu $\vec{u}$ dacă $\alpha > 0$ și un sens contrar lui $\vec{u}$ dacă $\alpha < 0$;

c) lungimea $|\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$.

Proprietățile înmulțirii unui vector liber cu un număr real

Pentru orice numere reale nenule $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și orice vectori liberi $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ avem:

1. $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

2. $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

3. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u})$;

4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

VECTORUL DE POZIȚIE

Fixând un punct O în planul $\mathcal{P}$, oricărui punct M din planul $\mathcal{P}$ i se asociază vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, numit **vectorul de poziție al punctului** M.

Notații: $M(\vec{r})$ – punctul M care are ca vector de poziție vectorul $\vec{r}$;

$\vec{r}_M$ – vectorul de poziție al punctului M.

- **Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat**

Fie O un punct din plan, segmentul $[AB]$ și $M \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{MA}{MB} = k$. Fie $A(\vec{r}_A), B(\vec{r}_B), M(\vec{r}_M)$. Atunci

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A - k\vec{r}_B}{1-k} = \frac{1}{1-k}\vec{r}_A - \frac{k}{1-k}\vec{r}_B.$$

Caz particular: $k = 1$

$\vec{r}_M = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$ – vectorul de poziție al mijlocului segmentului $[AB]$

- **Vectorul de poziție al punctului de concurență a trei ceviene într-un triunghi**

ABC – triunghi; O – punct fix în spațiu; M – punctul de concurență al cevienelor AA', BB', CC', unde

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{k_3}{k_2},\ \frac{CB'}{B'A} = \frac{k_1}{k_3},\ \frac{AC'}{C'B} = \frac{k_2}{k_1},$$

atunci $\vec{r}_M = \dfrac{k_1\vec{r}_A + k_2\vec{r}_B + k_3\vec{r}_C}{k_1+k_2+k_3}$.