Lucian Dragomir

Adriana Dragomir

Ovidiu Bădescu

Simularea examenului de bacalaureat
Matematică
Clasa a XI-a, profil mate-info

30 de teste, după modelul M.E.N.

Editura Paralela 45

Cuprins

Teste pregătitoare pentru simularea examenului de bacalaureat

Testul 1

Subiectul I

1. Calculaţi partea întreagă a numărului $a=\frac{12}{\sqrt{5}-1}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-3x+5$. Arătaţi că există un număr iraţional α, pentru care $f(\alpha)\in\mathbb{Q}$.

3. Determinaţi numerele reale a, pentru care numărul complex $z=\frac{1+ai}{a+i}$ este real.

4. Determinaţi numărul natural n, pentru care mulţimea $\{1, 2, 3, ..., n\}$ conţine exact 128 de submulţimi cu un număr impar de elemente, unul dintre acestea fiind n.

5. Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $H(a,b)$ este ortocentrul triunghiului care are vârfurile $A(3,1), B(5,3), C(0,4)$.

6. Arătaţi că, dacă $d=\cos\frac{38\pi}{3}$, atunci numărul $2d$ este întreg.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $A\cdot X=B$.

b) Determinaţi numărul întreg t, ştiind că $A^2=t\cdot A-I_2$.

c) Demonstraţi că, dacă $A^2X=XA^2$, cu $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci $AX=XA$.

2. Se notează cu M mulţimea matricelor $X(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a) Arătaţi că pentru orice numere complexe a şi b este adevărată egalitatea

$$\left(X(a,b)-I_3\right)^3=O_3.$$

b) Determinaţi matricea $A \in M$, pentru care $X(1,2) \cdot A = X(4,9)$.

c) Determinaţi suma elementelor matricei $X^{2019}(1,2)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\left(-\frac{1}{2},+\infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(1+2x)$.

a) Arătaţi că graficul funcţiei considerate are o asimptotă verticală.

b) Arătaţi că numărul $L = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x}$ este întreg.

c) Determinaţi numărul natural n, pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+f(x)\right)^{1/x} = e^n$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + e^{2x}$.

a) Arătaţi că numărul $A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ este natural.

b) Arătaţi că funcţia considerată este inversabilă şi determinaţi $B = f^{-1}(1)$.

c) Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 2e^x$ are cel puţin o soluţie reală.

Testul 2

Subiectul I

1. Determinaţi numărul real m, pentru care numărul complex $1 - i$ este soluţie a ecuaţiei $x^2 - 2x + m = 0$.

2. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = \left[\frac{n}{3}\right]$ este surjectivă, dar nu este injectivă.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{\log_2(1+x)}{\log_2(1-x)} = 2$.

4. O carte de biologie este cu 25% mai scumpă decât o carte de matematică. Determinaţi numărul natural p, ştiind că această carte de matematică este mai ieftină cu $p\%$ decât acea carte de biologie.

5. Arătaţi că, dacă $\operatorname{tg} x = 2$, atunci numărul $a = \frac{\sin^2 x + 8\cos^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$ este întreg.

6. Demonstraţi că, pentru orice număr real m, toate dreptele de ecuaţii $d_m : (m+1)x + (m-1)y - 2m = 0$ trec printr-un punct fix.

Subiectul al II-lea

1. Se notează cu $D(m)$ determinantul matricei $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m-4 & -4 \\ -3 & 1 & m+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi $D(5)$.

b) Determinaţi rangul matricei $A(2)$.

c) Demonstraţi că $\det A(m) \neq 0$, pentru orice $m > 2$.

2. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Determinaţi numărul întreg k, pentru care $B^2 = k \cdot I_2$.

b) Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X \cdot A = B$.

c) Arătaţi că, dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, iar şirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = \dfrac{b_n}{3^{n-1}}$ este o progresie aritmetică.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty), f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}, g(x)=1-f(x)$.

a) Arătaţi că $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ este un număr întreg.

b) Arătaţi că (şi) numărul $M = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^x$ este întreg.

c) Determinaţi numărul raţional $N = \lim\limits_{x\to 0} g(x)\cdot\left(1-\cos 2x\right)$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,+\infty), f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}, g(x)=1-f(x)$.

a) Arătaţi că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n = f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot\ldots\cdot f(n)$, $n \geq 2$, este monoton şi mărginit.

b) Arătaţi că numărul $U = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ este raţional.

c) Demonstraţi că şirul $(t_n)_{n\geq 1}$, $t_n = g(1)+g(2)+g(3)+\ldots+g(n)$, $n \geq 1$, este convergent.

Testul 3

Subiectul I

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$ şi mulţimea $A(l)=\{x\in\mathbb{R} \mid (f\circ f)(x)=l\}$. Arătaţi că mulţimea $A(3)$ conţine exact două numere întregi.

2. Arătaţi că, dacă a, $b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=4$ şi $ab=3$, atunci $a^2+b^2=$ $=5\cdot\sqrt{a+b}$.

3. Determinaţi cel mai mic număr întreg k, pentru care $\dfrac{k^2-4k+3}{2k-k^2}\geq 0$.

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(\log_2\left(3x+2\right)\right)=1$.

5. Determinaţi mulţimea $M=\left\{x\in\left[0,2\pi\right) \mid \sin 4x=\cos 2x\right\}$.

6. Determinaţi coordonatele punctului C situat pe dreapta de ecuaţie $3x-y-1=0$ şi care este egal depărtat de punctele $A(1,2)$ şi $B(5,4)$.

Subiectul al II-lea

1. Se notează cu $D(m,x)$ determinantul matricei $A(m,x)=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 2 & x & 1\\ 1 & 0 & x\end{pmatrix}$, cu m, x, $\in\mathbb{R}$.

a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(2,x)=0$.

b) Arătaţi că, pentru orice număr întreg $p\neq -1$, există un număr întreg $q\neq p$, astfel încât $D(p,q)=D(q,p)$.

c) Demonstraţi că, pentru orice număr real m, există $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $D(m,x)=0$.

2. Se consideră în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G=\left\{X(a) \mid X(a)=I_2+aA, a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătaţi că $I_2\in G$.

b) Demonstraţi că, pentru orice matrice $X(a), X(b)\in G$, este adevărată egalitatea $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$.

c) Arătaţi că, dacă $X(1)\cdot X(2)\cdot X(3)\cdot\ldots\cdot X(2019)=X(p)$, atunci $p<2020!$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{[2x]}{x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) Arătaţi că funcţia f **nu** este strict monotonă.

b) Demonstraţi că funcţia f este discontinuă în punctul $x = 1$.

c) Studiaţi convergenţa şirului definit prin $a_n=\frac{f(n+1)}{f(n)}, n\geq 1$.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ şi $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

a) Determinaţi numărul real a, pentru care funcţia f este continuă în punctul $x = 0$.

b) Arătaţi că ecuaţia $f(x)=x^2$ are cel puţin o soluţie strict pozitivă.

c) Demonstraţi că funcţia g nu are limită în punctul $x = 1$.

Testul 4

Subiectul I

1. Calculaţi $|3-4i|-|4+3i|$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|x-2|+|x-4|=2$.

3. Determinaţi numărul real nenul m, pentru care soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2-4x+m=0$ verifică egalitatea $2x_1-x_1x_2+x_2=4$.

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând o funcţie oarecare $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, aceasta să fie injectivă.

5. Dacă $ABCD$ este un romb, calculaţi $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

6. Arătaţi că numărul $\cos\frac{20\pi}{3}$ este raţional.

Soluții

Testul 1

Subiectul I. 1. $a=\dfrac{12\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}=3\sqrt{5}+3$; cum $9<3\sqrt{5}+3<10 \Leftrightarrow 6<3\sqrt{5}<7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{36}<\sqrt{45}<\sqrt{49}$ (adevărat), deducem că $[a]=9$. **2.** Impunem să avem, de exemplu, $2\alpha^2-3\alpha+5=6\in\mathbb{Q}$, deci $2\alpha^2-3\alpha-1=0$; obţinem $\alpha=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}\notin\mathbb{Q}$. **3.** $z=$ $=\dfrac{2a+(a^2-1)\cdot i}{a^2+1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a^2-1=0\Leftrightarrow a\in\{-1,\ 1\}$. **4.** Deoarece un element este fixat, determinăm numărul submulţimilor cu un număr par de elemente al mulţimii $\{1,2,3,...,n-1\}$; acesta este $C_{n-1}^0+C_{n-1}^2+C_{n-1}^4+...=2^{n-1-1}\Rightarrow n-2=7\Rightarrow n=9$. **5.** Un desen rapid ar fi de mare ajutor (poate avem un triunghi special); într-adevăr, triunghiul pare a fi dreptunghic în A. Cum $m_{AC}\cdot m_{AB}=...=-1\Rightarrow H=A$, deci $a=3$, $b=1$. **6.** $d=\cos\left(\dfrac{36\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2d=-1\in\mathbb{Z}$.

Subiectul al II-lea. 1. a) $X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$; b) $t=4$; c) Folosind rezultatul anterior avem: $A^2=4A-I_2$ şi, astfel, egalitatea $A^2X=XA^2$ se poate scrie $(4A-I_2)X=X(4A-I_2)\Leftrightarrow AX=XA$. **2.** a) Dacă $X(a,b)-I_3=Y$, atunci $Y^2=\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $Y^3=O_3$; b) $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$; c) Notăm $L=X(1,\ 2)$ şi obţinem inductiv (sau scriind $L=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi apoi $B^k=O_3$,

$\forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq 3 \Rightarrow L^n = C_n^0 I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$) că $L^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+3n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; finalizarea vă aparţine!

Subiectul al III-lea. 1. a) $f\left(-\frac{1}{2}+0\right) = -\frac{1}{2} - \infty = -\infty \Rightarrow$ dreapta de ecuaţie $x = -\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală (la dreapta) la graficul funcţiei considerate; b) $L = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow$ $\Rightarrow L = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 + 2\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}\right) \Rightarrow L = 1 + 2 \Rightarrow L = 3 \in \mathbb{Z}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+f(x)\right)^{1/x} =$ $= \lim\limits_{x\to 0}(1+x+\ln(1+2x))^{\frac{1}{x+\ln(1+2x)}\cdot\frac{x+\ln(1+2x)}{x}} = e^3 \Rightarrow n = 3$. **2.** a) $A = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) = 3 \in \mathbb{N}$; b) Funcţia este strict crescătoare, aşadar este injectivă; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; cum f este continuă, rezultă că $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ este surjectivă, deci bijectivă şi inversabilă. Deoarece $f(0) = 1 \Rightarrow B = 0$; c) Considerăm funcţia continuă $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - 2e^x = x + e^{2x} - 2e^x$. Deoarece $h(0) = -1 < 0$ şi $h(1) = 1 + e^2 - 2e > 0 \Rightarrow$ există $\alpha \in (0,1)$, cu $h(\alpha) = 0$.

Testul 2

Subiectul I. 1. *Metoda I:* Ecuaţia are coeficienţi reali, deci cealaltă soluţie este $1 + i \Rightarrow$ $\Rightarrow m = (1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 2 \in \mathbb{R}$ (Viète). *Metoda a II-a:* $(1-i)^2 - 2(1-i) + m =$ $= 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow m = 2$. (Evident că orice soluţie corectă şi completă se punctează ca atare!) **2.** $f(0) = f(1) = 0$, dar $0 \neq 1$, deci funcţia nu este injectivă; însă, pentru orice $y \in \mathbb{Z}$, există $n = 3y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $f(n) = y$, deci funcţia este surjectivă. Funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(n) = \left[\frac{n}{3}\right]$ este surjectivă. **3.** $x + 1 > 0$, $1 - x > 0$, $1 - x \neq 1 \Rightarrow x \in (-1, 1) \setminus \{0\} = D$.

Ecuaţia conduce la $\log_2(1+x) = 2\log_2(1-x) = \log_2(1-x)^2 \Rightarrow 1+x=1-2x+x^2$ (funcţia logaritmică este injectivă) $\Rightarrow x_1 = 0 \notin D,\ x_2 = 3 \notin D$. Aşadar, mulţimea soluţiilor ecuaţiei propuse este $\varnothing$. **4.** $p = 20$. **5.** $a = \dfrac{\cancel{\cos^2} x \cdot \left(tg^2 x+8\right)}{\cancel{\cos^2} x \cdot \left(tg^2 x+2\right)} = \dfrac{4+8}{4+2} = 2 \in \mathbb{N}$.

6. Punctul căutat este $A(1, 1)$. (De ce? Cum ajungem la acest rezultat?) Sau determinăm $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ şi apoi arătăm că acest $A \in d_m, \forall\, m \in \mathbb{R}$ sau $d_m : m(x+y-2)+x-y=$ $=0$ şi $x+y-2=0,\ x-y=0 \Rightarrow x=1, y=1$.

Subiectul al II-lea. 1. a) Calcul direct (pe care trebuie să îl faceţi pe foaia de examen): $D(5)=60$ sau $D(m)=\ldots=m(m-1)(m-2), \forall\, m \in \mathbb{R}$, rezultă $D(5)=60$; b) $D(2)=0$ şi există, de exemplu, minorul $d_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A(2) = 2$; c) $D(m) > 0$, $\forall\, m > 2 \Rightarrow D(m) \neq 0$ şi $A(m)$ este inversabilă pentru $m > 2$. **2.** a) $k = 9$ (redactare completă!); b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) $A = 3I_2 + M$, unde $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^2 = O_2$; cum $M \cdot I_2 = I_2 \cdot M \Rightarrow A^n = 3^n \cdot I_2 + n \cdot 3^{n-1} \cdot M \Rightarrow a_n = 3^n,\ b_n = 2n \cdot 3^n \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică. Însă, şirul $x_n = 2n \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{n+1} - x_n = 2$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

Subiectul al III-lea. 1. a) $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-1} = 0 \in \mathbb{Z}$; b) $M = \lim\limits_{x\to\infty} (1-\dfrac{1}{x^2})^{-x^2 \cdot -\frac{x}{x^2}} = e^0 =$ $= 1 \in \mathbb{N}$; c) $N = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1+2\sin^2 x}{x^2} = 2 \in \mathbb{N}$. **2.** a) $u_n = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right) \cdot$ $\cdot \left(1-\dfrac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$; cum $u_n \in (0, 1), \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ şirul este mărginit şi strict descrescător, aşadar este convergent (Weierstrass); b) În plus, arătăm imediat prin inducţie matematică: $u_n = \dfrac{n+1}{2n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$;

c) $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow t_{n+1} - t_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow$ şirul este strict crescător; avem şi

$1 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ şirul este şi mărginit, deci este convergent.

Testul 3

Subiectul I. **1.** $f(f(x)) = f^2(x) - 4f(x) + 3 = 3 \Rightarrow f(x)(f(x)-4) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (f(x)=0 \text{ şi } x \in \{1,3\})$ sau $(f(x)=4 \text{ şi } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$. Aşadar, $A(3) \cap \mathbb{Z} = \{1, 3\}$. **2.** $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 16 - 6 = 10 = 5\sqrt{a+b}$. **3.** $k \in (0, 1] \cup (2, 3] \Rightarrow k = 1$. **4.** $x = 2$. **5.** $2 \cdot \sin 2x \cdot \cos^2 x = \cos 2x$ conduce la (i): $\cos 2x = 0$, de unde rezultă $2x \in$ $\in \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \in \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$ sau (ii): $\sin 2x = \frac{1}{2}$, de unde $2x \in$ $\in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. Astfel, $M = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$. **6.** *Metoda I:* $m_{AB} = \frac{1}{2}$, mijlocul lui (AB) este $M(3, 3)$ şi apoi ecuaţia mediatoarei lui (AB) este $d_1 : y = -2x + 9$; din $-2x + 9 = 3x - 1$ rezultă $x_C = 2, y_C = 5$. *Metoda a II-a:* $C(x, 3x-1)$ şi se exprimă $AC = BC$.

Subiectul al II-lea. **1.** a) $D(2,x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$; b) $D(m, x) = x^2 + (2 - m)x - 1$ şi, astfel, $D(p,q) = D(q,p)$ conduce la $q^2 + (2-p)q = p^2 + (2-q)p \Rightarrow$ $\Rightarrow (q-p)(q+p+2) = 0$; dacă $p \neq q$, obţinem că pentru orice $p \in \mathbb{Z}, p \neq -1$, există $q = -p - 2 \neq p$; c) Ecuaţia $D(m,x) = 0$ are $\Delta = (2-m)^2 + 4 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, aşadar există chiar $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, cu $D(m,x_1) = D(m,x_2) = 0$. **2.** a) Arătaţi că $I_2 = X(0) \in G$; b) $A^2 = A \Rightarrow X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA) \cdot (I_2 + bA)I_2 + aA + bA + abA^2 = X(a + b + ab)$; c) Demonstrăm prin inducţie matematică: $X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \cdot \ldots \cdot X(n) = X(n! - 1) \Rightarrow p < 2020!$.

Subiectul al III-lea. **1.** a) $2 \le 3$, dar $f(2) = f(3) = 2 \Rightarrow$ funcţia f **nu** este strict monotonă; b) $f(1-0) = 1$ şi $f(1) = f(1+1) = 2 \neq 1 \Rightarrow$ funcţia f este discontinuă în punctul $x = 1$; c) $a_n = \frac{2n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$, deci şirul este convergent, având