Armand Martinov

ECUAŢII

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Capitolul I

ECUAŢII DE GRADUL AL DOILEA

Probleme rezolvate

1. Se consideră ecuația:

$$2x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 6 = 0,$$

ale cărei rădăcini reale sunt x_1 şi x_2, iar m este un parametru real. Arătați că:

$$2-\sqrt{3} \le \frac{x_1}{x_2} \le 2+\sqrt{3}.$$

C. IONESCU-ȚIU

SOLUȚIE. Notăm $\frac{x_1}{x_2} = t$; atunci $2-\sqrt{3} \le t \le 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le t-2 \le \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |t-2| \le \sqrt{3} \Leftrightarrow (t-2)^2 \le 3 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \le 0$; $t^2 - 4t + 1 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 4\cdot\frac{x_1}{x_2} + 1 =$

$= \frac{1}{x_2^2}(m^2 - 3m^2 + 12m - 18) = -\frac{2}{x_2^2}(m^2 - 6m + 9) = -\frac{2}{x_2^2}(m-3)^2 \le 0.$

2. Fie ecuația:

$$x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2 = \frac{1}{2}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Arătați că ecuația are cel puțin o rădăcină întreagă dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$.

LAURENȚIU PANAITOPOL

SOLUȚIE. Să presupunem că ecuația admite o rădăcină $x_0 \in \mathbb{Z}$. Din ecuația dată se obține $x_0^2 - (a+b)x_0 + a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}x_0\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}x_0\right)^2 + \frac{1}{2}x_0^2 = \frac{1}{2}$, de unde deducem că $x_0^2 \le 1 \Leftrightarrow x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

I. $x_0 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$;

II. $x_0 = -1 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$;

III. $x_0 = 1 \Rightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2+b^2 = \frac{1}{2}$.

Prin urmare, condiția $a^2+b^2=\frac{1}{2}$ este necesară ca ecuația din enunț să aibă cel puțin o rădăcină întreagă. Condiția este şi suficientă, deoarece, dacă $a^2+b^2=\frac{1}{2}$, ecuația admite rădăcina $x_0 = 0 \in \mathbb{Z}$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Rezolvați ecuația:

$$(ax-b)^2+(bx-a)^2 = x,$$

ştiind că admite o rădăcină întreagă.

MIRCEA BECHEANU

SOLUȚIE. Ecuația este echivalentă cu $(a^2+b^2)x^2-(4ab+1)x+a^2+b^2=0$ (1).
Dacă $a = b = 0$, ecuația (1) este de gradul întâi şi are unica soluție $x_1 = 0$.
Să presupunem că $a \neq 0$ sau $b \neq 0$; în acest caz, ecuația (1) este de gradul al doilea, cu rădăcinile x_1, x_2, unde $x_1 \in \mathbb{Z}$. Deoarece $x_1 = (ax_1-b)^2+(bx_1-a)^2$, deducem că $x_1 \in \mathbb{N}$. Fiindcă rădăcinile sunt reale, rezultă că $(4ab+1)^2-4(a^2+b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1-2(a-b)^2)(1+2(a+b)^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1-2(a-b)^2 \geq 0$ şi, deoarece $(a-b)^2 \in \mathbb{N}$, rezultă în mod necesar $(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$. Ecuația (1) devine $2a^2x^2-(4a^2+1)x+$ $+2a^2 = 0$ (2) şi, conform relațiilor lui Viète, deducem $x_1+x_2 = 2+\frac{1}{2a^2}$, $x_1x_2 = 1$.
Prin urmare, $x_1 = 2$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$. Rezultă $2+\frac{1}{2} = 2+\frac{1}{2a^2} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{-1, 1\}$.
Deci, $a = b = \pm 1$ şi $x_1 = 2$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$.

4. Determinați numerele naturale a, b, c astfel încât ecuațiile:

$$x^2-ax+b=0,\ x^2-bx+c=0,\ x^2-cx+a=0$$

să aibă simultan rădăcinile întregi.

I. CUCUREZEANU

SOLUȚIE. Fie $x_1, x_2; x_3, x_4; x_5, x_6$ rădăcinile celor trei ecuații. Avem:
$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1x_2=b \end{cases}$; $\begin{cases} x_3+x_4=b \\ x_3x_4=c \end{cases}$; $\begin{cases} x_5+x_6=c \\ x_5x_6=a \end{cases}$. Rezultă $x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6 = x_1+x_2+x_3+$ $+x_4+x_5+x_6 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)+(x_3-1)(x_4-1)+(x_5-1)(x_6-1) = 3$ (1).
Deoarece $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sunt întregi, iar a, b, c sunt numere naturale, rezultă că rădăcinile sunt naturale. Excluzând cazul banal când o rădăcină este 0, rezultând toate 0, egalitatea (1) este în numere naturale şi este satisfăcută pentru $1+1+1=3$,

$3 + 0 + 0 = 3$, $0 + 3 + 0 = 3$ şi $0 + 0 + 3 = 3$. Rezultă că $(a, b, c) \in \{(4, 4, 4), (6, 8, 7), (8, 7, 6), (7, 6, 8)\}$.

5. Arătaţi că dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcini reale ale ecuaţiei:

$$(m^2 + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0,$$

atunci $|x_1| \leq 1$ dacă şi numai dacă $|x_2| \leq 1$.

SOLUŢIE. Ecuaţia are rădăcini reale pentru $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m - 3 \geq 0$.

1) $m = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{4}{5} \Rightarrow |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1;$

2) $m > \dfrac{3}{4}$; rădăcinile sunt distincte şi, deoarece $x_1 x_2 = \dfrac{1}{m^2 + 1} > 0$, rezultă că ele au acelaşi semn.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m^2 + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1$.

Să presupunem că $-1 \leq x_1 \leq 1$ şi să arătăm că $-1 \leq x_2 \leq 1$. Presupunem, prin absurd, că $x_2 < -1$. Atunci $(m^2 + 1) \cdot f(-1) < 0 \Leftrightarrow f(-1) = m^2 + 2m + 3 < 0$, fals.

Să presupunem, prin absurd, că $x_2 > 1$. Rezultă $f(1) < 0 \Leftrightarrow f(1) = m^2 - 2m + 1 \geq 0$, fals.

În concluzie, $|x_1| \leq 1 \Rightarrow |x_2| \leq 1$.

Probleme propuse

1. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x}.$$

2. Arătaţi că, pentru orice valori ale parametrilor reali a, b, c, ecuaţia:

$$(a - b)x^2 + 2(b - c)x + c - a = 0$$

are soluţii reale.

3. Dacă $a < b < c < d$, atunci ecuaţia:

$$(x - a)(x - c) + 2(x - b)(x - d) = 0$$

are rădăcini reale distincte.

4. Formaţi ecuaţia de gradul al doilea care admite ca rădăcini pe $y_1 = x_1^3 + \dfrac{1}{x_2}$ şi $y_2 = x_2^3 + \dfrac{1}{x_1}$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$.

5. Se consideră ecuația:

$$2(m+2)^2x^2 - 2(m+1)(m+2)x - m = 0.$$

Arătați că, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, ecuația admite o rădăcină pozitivă subunitară.

LIVIU PÂRȘAN

6. Determinați numerele reale x, y, z care verifică ecuația:

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8x + 2y - 2xy + 2xz - 16z + 35 = 0.$$

7. Determinați ecuațiile cu coeficienți întregi $x^2 + ax + b = 0$ și cu rădăcini întregi, știind că $a + b = 2016$.

8. Dacă $a, b, c \in 2\mathbb{Z} + 1$, atunci ecuația:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nu are rădăcini raționale.

9. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Arătați că, dacă ecuația:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

are rădăcini reale și distincte x_1, x_2, atunci ecuația:

$$cy^2 + (b - 2c)y + a - b + c = 0$$

are rădăcinile reale și distincte y_1, y_2. Calculați y_1, y_2 în funcție de x_1 și x_2.

10. Ecuația:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nu are rădăcini reale. Știind că $a + b + c < 0$, determinați semnul lui c.

11. Determinați valorile parametrului real m, astfel încât ecuația:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = m$$

să aibă toate rădăcinile reale.

12. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a < b < c < d$, atunci ecuația:

$$x^2 - (a + b + c + d)x + 2(ac + bd) = 0$$

are rădăcini reale.

MARCEL CHIRIȚĂ

13. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ și ecuația:

$$x^2 - m(n+1)x + m + n + 1 = 0$$

are rădăcinile numere naturale, atunci $m \cdot n \leq 4$.

14. Determinați valorile întregi ale parametrului a, astfel încât ecuația:

$$(ax-2)^2 + (2x-a)^2 = 2x$$

să aibă o rădăcină întreagă. Rezolvați ecuația în acest caz.

15. Determinați $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația:

$$x^2 + px + 3p = 0$$

să admită rădăcini întregi.

16. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât ecuația:

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$$

să aibă rădăcini întregi.

LAURENȚIU PANAITOPOL

17. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației:

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0.$$

Arătați că x_1^3, x_2^3 sunt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)x + (ad - bc)^3 = 0.$$

18. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Arătați că, dacă $f(0)$ și $f(1)$ sunt impare, atunci ecuația $f(x) = 0$ nu are rădăcini întregi.

19. Fie ecuația:

$$x^2 - (m - 3)x + m^2 - m + 1 = 0.$$

a) Determinați valorile reale ale parametrului m, astfel încât ecuația să aibă cel puțin o rădăcină întreagă.

b) Există valori reale ale lui m, astfel încât ambele rădăcini să fie întregi?

20. Dacă $m \in \mathbb{R}^*$, atunci ecuația:

$$(mx - 1)^2 = 2 - x$$

are rădăcini reale. Notând x_1, x_2, cu $x_1 < x_2$, rădăcinile acestei ecuații, arătați că:

$$x_1 < 0 < x_2 \le 2.$$

21. Fie ecuația:

$$2x^2 + 2(m + 2)x + m^2 + 4m + 3 = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

În ce intervale se găsesc rădăcinile reale ale ecuației?

22. Fie ecuația:

$$ax^2 + (2a^3 - 4a^2 - 1)x - 2a(a - 2) = 0,\ a \in \mathbb{R}^*.$$

Determinați parametrul a, astfel încât rădăcinile ecuației să fie în afara intervalului $(-1, 1)$.

23. Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care rădăcinile ecuației:

$$mx^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$$

sunt reale distincte și $x_1, x_2 \in (-1, 1)$.

24. Fie ecuaţia:

$$4mx^2 + 4(1 - 2m)x + 3(m - 1) = 0.$$

Determinaţi parametrul real m, astfel încât o rădăcină a ecuaţiei să fie strict mai mică decât 1 şi alta să fie mai mare decât 1.

25. Determinaţi valorile parametrului real m, astfel încât rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei:

$$4x^2 - (3m + 1)x + m - 2 = 0$$

să fie în intervalul $(0, 2)$.

26. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b < a + c$, astfel încât ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ nu admite rădăcini reale, atunci $5a + 2c > 3b$.

D.M. BĂTINEȚU-GIURGIU

27. Fie a, b, c numere reale, distincte două câte două şi $d \in \mathbb{R}$. Arătaţi că ecuaţiile:

$$ax^2 + (b + d)x + c = 0,\ bx^2 + (c + d)x + a = 0,\ cx^2 + (a + d)x + b = 0$$

au soluție comună dacă şi numai dacă $a + b + c + d = 0$.

28. Se consideră patru ecuaţii de gradul al doilea astfel încât oricare trei să aibă o rădăcină reală comună. Arătaţi că cele patru ecuaţii au o rădăcină comună.

DOREL MIHEȚ

29. Dacă într-un triunghi lungimile laturilor a, b, c satisfac relaţiile $a \geq b \geq c$, atunci ecuaţia:

$$x^2 - (a + b + c)x + b^2 + c^2 = 0$$

are rădăcinile reale şi distincte.

30. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + ax + 1 = 0$ şi x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + bx + 1 = 0$. Arătaţi că:

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = b^2 - a^2.$$

31. Se consideră ecuaţiile $x^2 + ax + b = 0$ şi $x^2 + cx + d = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, şi se notează cu x_1, x_2, respectiv x_3, x_4 rădăcinile acestor ecuaţii. Arătaţi că, dacă $x_1x_4 = x_2x_3$, atunci $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b}{d}$.

32. Rezolvaţi ecuaţia:

$$x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0.$$

33. Fie ecuaţia:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^*$, distincte, cu rădăcinile x_1 şi x_2. Arătaţi că $ax_1 + bx_2 + c = 0$ dacă şi numai dacă $\sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{ac^2} + b = 0$.

ADRIAN ATANASESCU

34. Se consideră ecuația:

$$2x^2 - 2mx + m^2 - 10m + 45 = 0.$$

Aflați mulțimea valorilor pe care le pot lua rădăcinile reale x_1 şi x_2 când m variază.

C. IONESCU-ȚIU

35. Determinați natura şi semnul rădăcinilor ecuației:

$$(m^2 - 4m + 3)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - (m^2 - 6m + 8) = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$