GHEORGHE-ADALBERT SCHNEIDER

CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE

pentru liceu

EDITURA HYPERION CRAIOVA

CUPRINS

Tiparul executat la
Editura Hyperion
Craiova

1. VECTORI ÎN PLAN

1.1 SEGMENTE ORIENTATE

1. Fie $ABCD$ un paralelogram și O intersecția diagonalelor. Să se precizeze toate perechile de segmente orientate din figură care:

a) au aceeași normă b) au aceeași direcție

c) au același sens d) sunt echipolente.

2. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat în care se duc diagonalele mari $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ concurente în O. Să se precizeze toate perechile de segmente orientate din figură care:

a) au aceeași normă b) au aceeași direcție

c) au același sens d) sunt echipolente.

3. Să se demonstreze că:

a) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow ABCD$ este paralelogram;

b) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AC} \sim \overline{BD}$.

4. Fie segmentul orientat $\overline{AB}$ și O un punct în plan. Să se arate că există și este unic un punct C în plan astfel încât $\overline{OC} \sim \overline{AB}$.

5. Fie O un punct în plan și $\overline{AB}$ un segment orientat. Să se găsească locul geometric al segmentelor orientate cu originea în O și care:

a) au aceeași normă b) au aceeași direcție cu $\overline{AB}$

c) au același sens d) sunt echipolente cu $\overline{AB}$.

6. Fie $ABCD$ un paralelogram și O punctul de intersecție al diagonalelor. Să se demonstreze relația:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{0}.$$

7. Fie ABC un triunghi oarecare și D mijlocul lui BC. Să se demonstreze relația:

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right).$$

8. Fie $ABCD$ un paralelogram și O intersecția diagonalelor. Să se demonstreze relațiile:

a) $\overline{AO}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}+\overline{AC})$; b) $\overline{BO}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{BA}+\overline{BC})$;

c) $\overline{CO}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{CB}+\overline{CD})$; d) $\overline{DO}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{DA}+\overline{DC})$.

9. Fie ABC un triunghi echilateral și O centrul cercului circumscris. Să se demonstreze relațiile:

a) $\left|\overline{OA}+\overline{OB}\right|=\left|\overline{OC}\right|$; b) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$.

10. Fie $ABCD$ un pătrat și E simetricul lui D față de C. Să se demonstreze relația:

$$2\cdot\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AE}.$$

11. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și O punctul de intersecție al diagonalelor. Să se demonstreze relațiile:

a) $\overline{OA}+\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{OE}=\overline{OC}+\overline{OF}=\overline{0}$;

b) $2\cdot(\overline{AB}+\overline{AF})=\overline{AD}$;

c) $2\cdot\overline{AB}+\overline{AF}=\overline{AC}$.

12. Fie $ABCD$ un romb cu $\hat{A}=60^\circ$.

a) Să se demonstreze relația:

$$\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{CD}\right|+\left|\overline{DA}\right|=4\cdot\left|\overline{BD}\right|.$$

b) Să se calculeze: $\left|\overline{AB}+\overline{AD}\right|$ și $\left|\overline{BA}+\overline{BC}\right|$.

13. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Să se demonstreze relația:

$\left|\overline{AD}-\overline{AB}\right|=\left|\overline{AD}+\overline{AB}\right|$.

14. Fie $ABCD$ un paralelogram și O punctul de intersecție al diagonalelor.

a) Să se demonstreze că:

$$\overline{AO}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}+\overline{AC}) \text{ și } \overline{BO}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{BA}+\overline{BC}).$$

b) Să se calculeze $\left|\overline{OA}+\overline{OB}\right|$.

15. Fie triunghiul oarecare ABC și triunghiurile echilaterale ABM, BCN și ACP construite spre exteriorul triunghiului dat.

Să se arate că segmentele orientate $\overline{AN}, \overline{BP}, \overline{CM}$ au norme egale.

16. Fie ABC un triunghi oarecare, BB' și CC' bisectoare, iar $I=BB'\cap CC'$. Prin I se duce dreapta $MN\parallel BC$ unde $M\in AB, N\in AC$.

Să se demonstreze relația:

$$\left|\overline{MB}\right|+\left|\overline{NC}\right|=\left|\overline{MN}\right|.$$

17. Fie ABC un triunghi în care $\hat{B}=60^\circ$ și $BC=2\cdot AB$. Știind că înălțimea AD și bisectoarea BE se intersectează în I, să se demonstreze relația:

$$\left|\overline{AI}\right|+\left|\overline{IE}\right|=2\cdot\left|\overline{AE}\right|.$$

18. Fie ABC un triunghi oarecare și BB', CC' înălțimi. Să se demonstreze că dacă $\left|\overline{BB'}\right|=\left|\overline{CC'}\right|$, atunci $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AC}\right|$.

19. Pe laturile rombului $ABCD$ se construiesc în afara lui pătratele $ABEF$ și $ADGH$.

Să se demonstreze că $\left|\overline{FH}\right|=\left|\overline{AC}\right|$.

I.2 VECTORI. OPERAȚII CU VECTORI

1. Fie $[AB]$ un segment și O mijlocul segmentului $[AB]$. Stabiliți vectorii egali.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și M mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Identificați grupe de vectori egali și grupe de vectori care au aceeași normă.

3. Fie $ABCD$ un paralelogram și O intersecția diagonalelor paralelogramului. Identificați grupe de vectori egali și grupe de vectori care au aceeași normă.

4. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și O intersecția diagonalelor hexagonului. Identificați grupe de vectori egali și grupe de vectori care au aceeași normă.

5. Fie ABC un triunghi oarecare și M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și respectiv CA. Să se calculeze:

a) $\vec{AM}+\vec{MB}$ b) $\vec{BN}+\vec{CN}$ c) $\vec{AP}+\vec{PC}$

d) $\vec{AP}+\vec{MN}$ e) $\vec{AB}+\vec{BC}$ f) $\vec{AM}+\vec{NP}$.

6. Fie $ABCD$ un romb și O punctul de intersecție al diagonalelor rombului. Să se calculeze:

a) $\vec{AO}+\vec{CO}$ b) $\vec{AB}+\vec{CD}$ c) $\vec{AB}+\vec{BO}$

d) $\vec{BO}+\vec{OD}$ e) $\vec{AB}+\vec{AD}$ f) $\vec{AO}+\vec{OD}$.

7. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și O punctul de intersecție al diagonalelor hexagonului. Să se calculeze:

a) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$ b) $\vec{AF}+\vec{FE}+\vec{ED}$

c) $\vec{AO}+\vec{OD}+\vec{DC}$ d) $\vec{AF}+\vec{OB}+\vec{AB}$

e) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{EF}$ f) $\vec{AO}+\vec{DO}+\vec{DE}$.

8. Fie $ABCD$ un paralelogram și O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului. Să se calculeze:

a) $\vec{AD}-\vec{BC}$ b) $\vec{AO}-\vec{OC}$ c) $\vec{AB}-\vec{DC}$

d) $\vec{OB}-\vec{DO}$ e) $\vec{AB}-\vec{CB}$ f) $\vec{AD}-\vec{BD}$.

9. Fie ABC un triunghi oarecare și M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și respectiv CA. Să se calculeze:

a) $\vec{AB}+2\cdot\vec{NP}$ b) $\vec{AB}+2\cdot\vec{BN}$ c) $\vec{AB}+2\cdot\vec{AP}$

d) $2\cdot\vec{AM}+\vec{NP}$ e) $3\cdot\vec{BN}-\vec{MP}$ f) $4\cdot\vec{NP}-\vec{BA}$.

10. Fie ABC un triunghi oarecare. Atunci are loc relația:

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}.$$

11. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile vectoriale:

a) $\vec{AB}+\vec{BC}+2\cdot\vec{CA}$; b) $\vec{AB}+2\cdot\vec{BC}+2\cdot\vec{CA}$.

12. Fie ABC un triunghi oarecare și O un punct arbitrar în plan. Atunci are loc relația:

$$\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{OB}-\vec{OC}.$$

13. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Să se demonstreze relațiile:

a) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{0}$;

b) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DB}$;

c) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}$.

14. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Să se demonstreze relațiile:

a) $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AD}+\vec{DC}$; b) $\vec{AB}+\vec{BC}+2\cdot\vec{CD}+2\cdot\vec{DA}=\vec{CA}$.

15. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile vectoriale:

a) $\vec{AB}+2\cdot\vec{BC}+2\cdot\vec{CD}+2\cdot\vec{DA}$;

b) $2\cdot\vec{AB}+3\cdot\vec{BC}+2\cdot\vec{CD}+2\cdot\vec{DA}$;

c) $\vec{AB}+\vec{BC}+2\cdot\vec{CD}+2\cdot\vec{DA}+\vec{AC}$.

16. Fie $ABCDE$ un pentagon. Să se demonstreze relațiile:

a) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AE}+\vec{ED}$;

b) $\vec{EA}+\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{ED}+\vec{DC}$;

c) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{AE}+\vec{ED}+\vec{DA}$.

17. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Să se demonstreze relațiile:

a) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AF}+\vec{FE}+\vec{ED}$;

b) $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AF}+\vec{FE}+\vec{ED}+\vec{DC}$;

c) $\vec{AC}+\vec{CE}+\vec{EA}=\vec{BD}+\vec{DF}+\vec{FB}$.

18. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se determine vectorul $\vec{x}$ care verifică egalitatea:

$$2\cdot(\vec{AB}+2\cdot\vec{BC}+\vec{CA}+\vec{x})=\vec{AB}+3\cdot\vec{BC}+4\cdot\vec{CA}.$$

19. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Să se determine vectorul $\vec{x}$ care verifică egalitatea:

$$2\cdot(\vec{AB}+2\cdot\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}+\vec{x})=\vec{BC}+\vec{AC}.$$

20. Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se demonstreze relația:

$$\vec{AC}+\vec{BD}=2\cdot\vec{AD}.$$

21. Fie (AB) un segment și M un punct în plan. Să se demonstreze că M este mijlocul segmentului (AB) dacă și numai dacă $\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{0}$.

22. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii BC. Să se demonstreze relațiile:

a) $\vec{AB}+\vec{BM}=\vec{AC}+\vec{CM}$ b) $\vec{AM}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{AB}+\vec{AC})$

23. Fie triunghiul ABC și D,E,F mijloacele laturilor $(BC),(AC)$ și respectiv (AB). Notăm $\vec{AB}=\vec{a}$ și $\vec{AC}=\vec{b}$.

Să se descompună după vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ vectorii: $\vec{BF},\vec{AE},\vec{BC},\vec{DC},\vec{AD},\vec{BE}$.

24. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare și M mijlocul laturii CD. Să se demonstreze relația: $\vec{AM}+\vec{BM}=\vec{BC}+\vec{AD}$.

25. Fie $ABCD$ un paralelogram și O intersecția diagonalelor.

a) Să se descompună după vectorii $\vec{AB}$ și $\vec{AD}$ vectorii: $\vec{AB},\ \vec{BC},\ \vec{CD},\ \vec{AC}$ și $\vec{BD}$.

b) Să se descompună după vectorii $\vec{OA}$ și $\vec{OB}$ vectorii: $\vec{AB},\ \vec{BC},\ \vec{CD},\ \vec{AC}$ și $\vec{BD}$.

26. Fie ABC un triunghi oarecare și M,N,P mijloacele laturilor $BC,\ AC$ și respectiv AB. Să se demonstreze relația:

$$\vec{AM}+\vec{BN}+\vec{CP}=\vec{0}.$$

27. Fie vectorii $\vec{a},\vec{b}$. Să se demonstreze relațiile:

a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$; b) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

1.3 TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca trei vectori să formeze un triunghi.

2. Să se demonstreze că se poate construi un triunghi având ca laturi medianele unui triunghi dat.

3. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii BC. Să se demonstreze relațiile:

a) $\vec{AB}+3\cdot\vec{CA}=2\cdot(\vec{MA}+\vec{CB})$;

b) $3\cdot\vec{BC}+4\cdot\vec{CA}=2\cdot(\vec{MA}+\vec{BA})$;

c) $2\cdot(\vec{CA}-\vec{MA})=\vec{CB}$.

4. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și O punctul de intersecție al diagonalelor sale. Să se demonstreze relațiile:

$$\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD}+\vec{AE}+\vec{AF}=6\cdot\vec{AO}.$$

5. Fie ABC un triunghi oarecare și G centrul său de greutate. Să se exprime vectorul $\vec{AG}$ în funcție de $\vec{AB}$ și $\vec{AC}$.

6. Fie ABC un triunghi oarecare și G un punct în plan. Să se demonstreze că G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$.

7. Fie $ABCD$ un pătrat și O intersecția diagonalelor.

a) Să se descompună după vectorii $\vec{OA}$ și $\vec{OB}$ vectorii: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AC}$ și $\vec{BD}$.

b) Să se descompună după vectorii $\vec{AO}$ și $\vec{AB}$ vectorii: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{AC}$ și $\vec{BD}$.

2. COLINIARITATE, CONCURENȚĂ, PARALELISM – CALCUL VECTORIAL ÎN GEOMETRIA PLANĂ

2.1 VECTORI COLINIARI

1. Fie $ABCD$ un paralelogram. Puneți în evidență grupe de vectori coliniari.

2. Fie $ABCD$ un trapez. Puneți în evidență grupe de vectori coliniari.

3. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Puneți în evidență grupe de vectori coliniari.

4. Fie ABC un triunghi oarecare și M, N mijloacele laturilor (AB) și respectiv (AC). Să se demonstreze că vectorii $\vec{MN}$ și $\vec{BC}$ sunt coliniari.

5. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul lui AC. Fie N simetricul punctului B față de punctul M.

Să se demonstreze că:

a) Vectorii $\vec{AN}$ și $\vec{BC}$ sunt coliniari.

b) Vectorii $\vec{NC}$ și $\vec{AB}$ sunt coliniari.

6. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe prelungirile laturilor $[BA]$ și $[CA]$ se iau segmentele $[AM]\equiv[AB]$ și $[AN]\equiv[AC]$.

Să se demonstreze că vectorii $\vec{MN}$ și $\vec{BC}$ sunt coliniari.

7. În triunghiul ascuțitunghic ABC prelungim înălțimea $[AD]$ cu segmentul $[DD']\equiv[AD]$. Să se demonstreze că vectorii $\vec{D'B}$ și $\vec{AC}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $[AB]\equiv[AC]$.