MARIN CHIRCIU

Matematică

algebră, geometrie

Clasa a X-a

- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL
Iași - 2019

CUPRINS

	Enunțuri	Soluții
Teste de evaluare inițială	11	256
ALGEBRĂ		
Capitolul I. Mulţimi de numere	15	
1. Numere reale	15	256
2. Aproximări raţionale pentru numere iraţionale sau reale	17	
3. Puteri cu exponent iraţional şi real ale unui număr pozitiv. Proprietăţi	18	256
4. Radicalul de ordinul 2 şi radicalul de ordinul 3. Proprietăţi	20	256
5. Radicalul de ordinul n, $n \geq 2$. Proprietăţi	27	257
6. Noţiunea de logaritm. Proprietăţi ale logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operaţia de logaritmare	31	257
7. Evaluare sumativă	41	
8. Numere complexe	43	260
9. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuaţiilor de gradul al doilea cu coeficienţi reali	50	261
10. Numere complexe sub formă trigonometrică	52	261
11. Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie	55	
12. Evaluare sumativă	64	263
Test de autoevaluare	67	
Capitolul II. Funcţii şi ecuaţii	68	
1. Funcţii injective, surjective, bijective	68	264
2. Funcţii inversabile	69	
3. Funcţii monotone	70	
4. Funcţia putere cu exponent natural	75	264
5. Funcţia radical	75	264
6. Ecuaţii iraţionale	77	264
7. Funcţia exponenţială; ecuaţii exponenţiale	80	265
8. Funcţia logaritmică; ecuaţii logaritmice	82	265
9. Funcţii trigonometrice directe şi funcţii trigonometrice inverse; ecuaţii trigonometrice	98	268
10. Evaluare sumativă	111	270
Test de autoevaluare	114	
Capitolul III. Metode de numărare	115	
1. Mulţimi finite ordonate. Numărul funcţiilor $f: A \to B$, unde A şi B sunt mulţimi finite	115	270
2. Permutări	119	273
3. Aranjamente	123	273
4. Combinări	126	274
5. Binomul lui Newton	132	275

6. Evaluare sumativă 137 276
Test de autoevaluare 140

Capitolul IV. Matematici financiare 141

1. Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA 141 277
   1.1. Procente 141
   1.2. Dobânzi; dobândă simplă; dobândă compusă 142
   1.3. Taxa pe valoare adăugată 144
   1.4. Evaluare sumativă 147
2. Culegerea, clasificarea şi prelucrarea datelor statistice 147 278
   2.1. Date statistice: culegerea şi clasificarea lor 147
   2.2. Reprezentarea grafică a datelor statistice 148
3. Interpretarea datelor statistice prin parametri de poziţie 150
   3.1. Medii 150
   3.2. Dispersia 151
   3.3. Evaluare sumativă 154
4. Evenimente aleatoare egal probabile 154 279
   4.1. Evenimente. Operaţii cu evenimente 154
   4.2. Definiţia axiomatică a probabilităţii 155
   4.3. Definiţia clasică a probabilităţii 156
   4.4. Probabilităţi condiţionate 157
   4.5. Scheme clasice de probabilitate: Schema lui Poisson; Schema lui Bernoulli 159
   4.6. Evaluare sumativă 169 286
5. Variabile aleatoare 172 287
   5.1. Noţiunea de variabilă aleatoare 172
   5.2. Operaţii cu variabile aleatoare 172
   5.3. Media şi dispersia unei variabile aleatoare 174
   5.4. Evaluare sumativă 178 290

Test de autoevaluare 179
Test de autoevaluare (recapitulare) 180

GEOMETRIE

Capitolul V. Geometrie 182

1. Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan, distanţa dintre două puncte în plan 182 291
   1.1. Reper cartezian pe o dreaptă 182
   1.2. Reper cartezian în plan 182

Test de autoevaluare 189

2. Coordonatele unui vector în plan 190 295
   2.1. Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat 190
   2.2. Coordonatele unor puncte remarcabile în triunghi 191
   2.3. Vectori de poziţie 191
   2.4. Vectori de poziţie pentru puncte remarcabile în triunghi 192

2.5. Vectori coliniari ... 192
Test de autoevaluare ... 202
3. Ecuaţii ale dreptei în plan ... 203 301
3.1. Ecuaţii ale dreptei determinate de un punct şi o direcţie ... 203
3.2. Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte ... 205
Test de autoevaluare ... 209
4. Condiţii de paralelism şi de perpendicularitate a două drepte în plan ... 210 305
Test de autoevaluare ... 214
5. Calcule de distanţe şi arii ... 215 308
6. Evaluare sumativă ... 219 311
Test de autoevaluare ... 223
Test de autoevaluare (recapitulare) ... 224

PROBLEME RECAPITULATIVE ... 225
Algebră ... 225 314
Geometrie ... 233 317

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU CONCURSURI ... 238
Algebră ... 238 322
Geometrie ... 243 325
MODELE DE TEZE SEMESTRIALE ... 248 333
PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU BACALAUREAT ... 251
Algebră ... 251 334
Geometrie ... 254 335
INDICAŢII, REZOLVĂRI, SOLUŢII ... 256
Soluţii teste autoevaluare ... 336

Bibliografie ... 340

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulţimi de numere

1. Numere reale: proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional, iraţional şi real ale unui număr pozitiv. Aproximări raţionale pentru numere iraţionale sau reale.

Avem $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a}$, $\forall\, a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$;

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ \forall\, a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{R}^*; \quad a^0 = 1,\ \forall\, a \in \mathbb{R}^*.$$

Definiţie. Fie $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Numărul real pozitiv x, cu proprietatea $x^n = a$ se numeşte ***puterea cu exponent*** raţional $\frac{1}{n}$ a numărului pozitiv şi se notează $x = a^{\frac{1}{n}}$.

Exemplu: $3^3 = 27 \Rightarrow 3 = 27^{\frac{1}{3}}$.

Din definiţie deducem:

1) $x = a^{\frac{1}{n}},\ a \geq 0 \Leftrightarrow a = x^n,\ x \geq 0$. 2) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

Proprietăţi: 1) $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; 3) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$;

4) $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$; 5) $a < b \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$.

Definiţie. Fie $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Numărul $a^{\frac{m}{n}}$, definit prin $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, se numeşte ***puterea cu exponent raţional*** $\frac{m}{n}$ a numărului pozitiv a.

Exemplu: $81^{\frac{3}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 3^3 = 27$.

Proprietăţi: Fie $r, s \in \mathbb{Q}$, $a, b \in (0, \infty)$. Atunci: 1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$;

3) $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$; 4) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$; 6) $r = s \Leftrightarrow a^r = a^s$, $a \neq 1$;

7) Dacă $a > 1$, atunci $r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$; 8) Dacă $0 < a < 1$, atunci $r < s \Leftrightarrow a^r > a^s$.

Din definiție deducem că $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-m})^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Exerciții rezolvate

1. Fie a și b, numere reale pozitive. Să se efectueze:

a) $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$; b) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$; c) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Soluție. a) Notăm $a^{\frac{1}{2}} = x$, $b^{\frac{1}{2}} = y$; avem $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = a - b$;

b) Notăm $a^{\frac{1}{3}} = x$, $b^{\frac{1}{3}} = y$; avem $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}$;

c) Notăm $a^{\frac{1}{3}} = x$, $b^{\frac{1}{3}} = y$; avem $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3 = a - b$.

2. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $a = 2^{\frac{1}{3}}$; $b = 3^{\frac{1}{2}}$; $c = 4^{\frac{1}{4}}$.
Soluție. Avem $a^{12} = 16$; $b^{12} = 729$; $c^{12} = 64$. Deducem $a < c < b$.

3. Să se determine numerele naturale n, astfel încât:

a) $3^{\frac{9n-5}{4}} = 9^{n+2}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9n-5}{4}} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{n+2}$.

Soluție. a) Din $3^{\frac{9n-5}{4}} = 3^{2n+4}$ obținem $\frac{9n-5}{4} = 2n+4 \Leftrightarrow 9n-5 = 8n+16 \Leftrightarrow n = 21$;

b) Din $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9n-5}{4}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+4}$ obținem $\frac{9n-5}{4} \leq 2n+4 \Leftrightarrow 9n-5 \leq 8n+16 \Leftrightarrow n \leq 21$.
Rezultă $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 21\}$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze: a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$; b) $\frac{3^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$; c) $3^{\frac{11}{15}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{5}}$;

d) $\frac{9^{\frac{3}{5}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{15}}}{81^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{5}}}$; e) $\left(0,01 \cdot \frac{1}{729}\right)^{-\frac{1}{2}}$; f) $\left(\frac{1}{8} \cdot 18^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2. Aduceți la o formă mai simplă expresiile:

a) $E = \frac{a + 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$, unde $a > 0$, $b > 0$;

b) $E = \dfrac{a - 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$, unde $a > b > 0$;

c) $E = \dfrac{a - 2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b}{a - b}$, unde $a > b > 0$;

d) $E = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$, unde $a > 0,\ b > 0$;

e) $E = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$, unde $a > 0,\ b > 0$.

3. Calculați:

a) $E = \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right) : \left[\left(\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}}{ba^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{1}{4}}}\right)^{2}\right]$, unde $a > 0,\ b > 0$;

b) $E = \dfrac{\left[a^{\frac{2}{3}}(ab)^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{ab}\right)^{-1}}{\left[a^{-\frac{3}{2}}(ab)^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{4}}}$, unde $a > 0,\ b > 0$;

c) $E = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\left(a^{-1} + b^{-1}\right) + \dfrac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{3}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)$, unde $a > 0,\ b > 0$.

4. Ordonați crescător numerele:

a) $a = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}},\ b = \left(\dfrac{25}{9}\right)^{\frac{3}{4}},\ c = \left(\dfrac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}$;

b) $a = \left(\dfrac{16}{9}\right)^{+0,1},\ b = \left(\dfrac{9}{16}\right)^{-0,2},\ c = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$.

5. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

a) $a = 2^{\frac{1}{2}},\ b = 3^{\frac{1}{3}},\ c = 4^{\frac{1}{4}}$;

b) $a = 3^{\frac{1}{2}},\ b = 6^{\frac{1}{3}},\ c = 30^{\frac{1}{6}}$;

c) $a = 6^{\frac{1}{2}},\ b = 12^{\frac{1}{4}},\ c = 72^{\frac{1}{8}}$.

2. Aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat și $\varepsilon > 0$. Se numește ***aproximare rațională de ordin cel mult*** ε (sau ***ε-aproximare***) a numărului real x orice număr rațional a cu proprietatea că $|x - a| \le \varepsilon$.

Se scrie: „$x \approx a$" și se citește „x este aproximativ egal cu a". Numărul x este aproximat de a cu eroarea absolută $|x - a|$.

Exemplu: Pentru $x = \pi$, avem $x \approx a = 3{,}14$, cu eroarea absolută de cel mult 0,01, deoarece $|x - a| = |\pi - 3{,}14| < 0{,}01$.

3. Puteri cu exponent irațional și real ale unui număr pozitiv. Proprietăți

Definiție. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ și $x \in \mathbb{R}$, x irațional. Numărul unic, notat a^x, care verifică respectiv condițiile:

$$a^r < a^x < a^s, \text{ dacă } a > 1;$$
$$a^r > a^x > a^s, \text{ dacă } 0 < a < 1,$$

oricare ar fi $r, s \in \mathbb{Q}$, cu $r < x < s$, se numește ***puterea cu exponent x*** a numărului real a.

Numărul x se numește ***exponentul*** puterii a^x, iar numărul a se numește ***baza*** puterii a^x.

Avem $1^x = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ și $0^x = 0$, $\forall\, x > 0$.

Proprietăți ale puterilor cu exponent real

Fie $a > 0$, $b > 0$ și $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{xy}$;

4) $(ab)^x = a^x b^x$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; 6) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, $a \neq 1$;

7) Dacă $a > 1$, atunci $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$;

8) Dacă $a < 1$, atunci $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine aproximarea rațională cu două zecimale exacte a numărului $\sqrt{2}$.

Soluție. Folosind algoritmul de extragere a radicalului, obținem $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

2. Să se compare numerele reale 2^π și $2^{\sqrt{10}}$.

Soluție. Cum $\pi < 3{,}15 < \sqrt{10}$, deducem că $2^\pi < 2^{\sqrt{10}}$.

3. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2x-3} \geq \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{3x-2}$.

Soluție. Deoarece $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$, iar inecuația este echivalentă cu $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-2x+3} \geq (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{3x-2} \Leftrightarrow -2x+3 \geq 3x-2 \Leftrightarrow 5x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$.

Exerciții propuse

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$; b) $3^{\sqrt{125}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$; c) $3^{\sqrt{3}} \cdot \left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{3^{\sqrt{3}+\sqrt{5}}} \cdot \left(\frac{125}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$.

2. Să se simplifice expresiile: $E_1 = \frac{3^{2x}+2\cdot 3^x-3}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$; $E_2 = \frac{3^{3x}-3^{x+1}+2}{3^{2x}-1}$.

3. Comparați numerele: a) $a=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ și $b=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$; b) $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ și $b=1$;

c) $a=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ și $b=1$; d) $a=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{\pi}}$ și $b=1$.

4. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E_1 = \frac{75^{\sqrt{27}}\cdot 9^{3\sqrt{3}}}{27^{\sqrt{75}}\cdot 15^{\sqrt{3}}}$; b) $E_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{13}\cdot 9^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 81^3$.

5. Să se compare numerele reale x și y, știind că:

a) $\left(\frac{2\pi}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2\pi}{3}\right)^y$; b) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{\pi}{4}\right)^y$;

c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x \geq \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^y$; d) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)^y$.

6. Determinați pentru ce valori reale ale lui x avem:

a) $3^x \leq 27$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{256}$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \frac{1}{125}$; d) $2^{-x} \geq 1024$.

7. Să se aproximeze numărul $\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{5}}$ cu două zecimale exacte.

8. Să se determine aproximarea rațională cu două zecimale exacte a numărului $2^{\sqrt{7}}$.

9. a) Determinați $x,y \in (-1, \infty)$, știind că:

$a^x + a^y = 2$ și $(1+x)(1+y)=1$, unde $a>1$, a este fixat.

b) Determinați $x,y,z \in (-1, \infty)$, știind că:

$a^x + a^y + a^z = 3$ și $(1+x)(1+y)(1+z)=1$, unde $a>1$, a este fixat.

c) Determinați $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (-1, \infty)$, știind că:

$a^{x_1} + a^{x_2} + \ldots + a^{x_n} = n$ și $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)=1$, unde $a>1$, a dat.

(G.M. 9 / 2006, Traian Tămâian, Carei, Satu Mare)

4. Radicalul de ordinul 2 şi radicalul de ordinul 3. Proprietăţi

Radicalul de ordinul 2

Definiţie. Fie $a \geq 0$. Numărul pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = a$, se numeşte ***radicalul de ordinul 2 al lui a*** şi se notează $\sqrt{a}$ (rădăcina pătrată a lui a).

Avem: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geq 0$.

Proprietăţile radicalilor de ordinul 2

1) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$;

3) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$;

4) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5) Dacă $a \geq 0$ şi $b \geq 0$, atunci $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ şi $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Radicalul de ordinul 3

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, a fixat. Numărul real x, cu proprietatea $x^3 = a$, se numeşte ***radicalul de ordinul 3 al lui a*** şi se notează $\sqrt[3]{a}$ (rădăcina cubică a lui a).

Avem: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi ale radicalilor de ordinul 3

1) $\sqrt[3]{a} = a$, $a \in \mathbb{R}$;

2) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;

3) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$;

4) $\sqrt[3]{a^n} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5) Dacă $a,b \in \mathbb{R}$, atunci $a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ şi $a = b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$.

Exerciţii rezolvate

1. Demonstraţi că $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$, $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$

(„inegalitatea mediilor" – media aritmetică ≥ media geometrică ≥ media armonică).

Soluţie. Avem $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $a = b$.

Avem $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{ab}(a+b) \geq 2ab \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, evident, cu egalitate pentru $a = b$.

2. Scoateţi factorii de sub radical:

a) $\sqrt{200}$; b) $\sqrt{700}$; c) $\sqrt{2 \cdot 3^3 \cdot 5^5}$.

Soluţie. Avem: a) $\sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = 10\sqrt{2}$; b) $\sqrt{700} = \sqrt{7 \cdot 100} = 10\sqrt{7}$;
c) $\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 5} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 75\sqrt{30}$.

3. Introduceţi factorii sub radical:

a) $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $5\sqrt{6}$.

Soluţie. Avem: a) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$; b) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; c) $5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6} = \sqrt{150}$.

4. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$.

Soluţie. Avem: a) $\dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 2+\sqrt{2}$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{8-3} = \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$.

5. Să se raţionalizeze numitorul fracţiei $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$, unde a şi b sunt numere reale strict pozitive.

Soluţie. În prima etapă amplificăm cu $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$ şi obţinem:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{a+b+2\sqrt{ab}-a-b} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}}{2\sqrt{ab}}.$$

În etapa a doua amplificăm fracţia obţinută cu $\sqrt{ab}$; rezultă: $\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}\right)}{2ab}$.

6. Demonstraţi că: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$, unde $a, b, c \in (0, \infty)$; ($M_a \geq M_g \geq M_h$).

Soluţie. În identitatea algebrică $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, adevărată pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$, punem $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$ şi obţinem

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Din $M_a \geq M_g$ pentru numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ obţinem: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq$ $\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze: a) $\sqrt{4\cdot 81}$; b) $\sqrt{25\cdot 49}$; c) $\sqrt{\frac{81}{64}}$; d) $\left(\sqrt{3}\right)^2$.

2. Să se calculeze: a) $\sqrt[3]{-27\cdot 8}$; b) $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 125}$; c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{-125}{64}}$.

3. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt{3a+2}$; b) $\sqrt{a^2-4a+3}$; c) $\sqrt{a+2}+\sqrt{2-a}$; d) $\sqrt{4+a^2}+\sqrt{|a|-2}$.

4. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care au sens expresiile:

a) $\sqrt[3]{1+a^3}$; b) $\sqrt[3]{8-a^3}$; c) $\sqrt[3]{3+a}+\sqrt[3]{3-a}$; d) $\sqrt[3]{(a-2)(3-a)}$.

5. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care au loc egalităţile:

a) $\sqrt{a(a+1)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}$; b) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}$;

c) $\sqrt{1+a^3} = \sqrt{1+a}\cdot\sqrt{1-a+a^2}$; d) $\sqrt{(a-1)^2} = \left(\sqrt{a-1}\right)^2$.

6. Să se calculeze:

a) $\sqrt{18}-\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$; b) $\frac{5}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{10}}{5}-\frac{1}{\sqrt{10}}$;

c) $\sqrt{a^2b}-\sqrt{b}+\sqrt{b^3}-\sqrt{(a+1)^2b}$, unde $a>0$, $b>0$;

d) $\frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{b}-\frac{1}{\sqrt{ab}}$, unde $a,b \in (0,\infty)$.

7. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}+3\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{\sqrt{a}}+a\sqrt{a}$, unde $a>0$;

c) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{3}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; d) $\frac{ab}{\sqrt[3]{a}}+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, unde $a,b>0$.

8. Determinaţi $x \in \mathbb{Q}$, dacă:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{x}$; b) $a\sqrt{b} = \sqrt{x}$, unde $a,b>0$, a şi b date;

c) $\sqrt{208} = x\sqrt{13}$; d) $\sqrt{a^2 b} = x\sqrt{b}$, unde $a,b \in \mathbb{Q}$, a şi b date.

9. Determinaţi $x \in \mathbb{Q}$, dacă:

a) $3\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{54}$; b) $a\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a^3 b}$, unde $a,b \in \mathbb{Q}^*$, a şi b date;

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x} = 4$; d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x} = b$, unde $a,b \in \mathbb{Q}^*$, a şi b date.

10. Daţi exemple de numere naturale, astfel încât:

a) $\sqrt{n}$ este raţional; b) $\sqrt{n}$ este iraţional;

c) $\sqrt[3]{n}$ este raţional; d) $\sqrt[3]{n}$ este iraţional.

11. Să se arate că numerele de mai jos nu sunt raţionale:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{3 \cdot 5}$; d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

12. Determinaţi valorile lui a pentru care au loc egalităţile:

a) $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$; b) $\sqrt{(2-a)^2} = a - 2$;

c) $\sqrt{(3a-2)^4} = (2-3a)^2$; d) $\sqrt[3]{(a+1)^3} = a + 1$.

13. Să se arate că: a) $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; b) $1{,}42 < \sqrt[3]{3} < 1{,}51$.

14. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{12}$; c) $\sqrt{18}$; d) $\sqrt{512}$; e) $\sqrt{2a^2}$; f) $\sqrt{128a^3}$.

15. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt[3]{32}$; b) $\sqrt[3]{108}$; c) $\sqrt[3]{500}$; d) $\sqrt[3]{3a^3}$; e) $\sqrt[3]{64a^4}$.

16. Să se introducă factorii sub radicali:

a) $3\sqrt{2}$; b) $-2\sqrt{3}$; c) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; d) $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$; e) $3xy\sqrt{\frac{5y}{3x}}$.

17. Să se introducă factorii sub radicali:

a) $2\sqrt[3]{3}$; b) $3\sqrt[3]{4}$; c) $a\sqrt[3]{b}$; d) $2\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$.

18. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\sqrt{\frac{12}{49}} \cdot \sqrt{\frac{250}{27}}$; b) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$; c) $\frac{c}{a-\sqrt{b}}$; d) $(\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}-5)$;

e) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; f) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

19. Raţionalizaţi numitorii fracţiilor: a) $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{4-3\sqrt{2}}$; c) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$;

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; e) $\frac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$; f) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.