MARIN CHIRCIU

Matematică

algebră, analiză matematică

Clasa a XII-a

- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Iași- 2019

CUPRINS

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

Capitolul I. Grupuri

1. Lege de compoziţie internă (operaţie algebrică), parte stabilă, tabla operaţiei

Lege de compoziţie internă (operaţie algebrică)

Definiţie. Spunem că pe mulţimea M este definită o ***lege de compoziţie internă*** dacă oricărei perechi ordonate de elemente din M i se asociază un element bine determinat, aparţinând aceleiaşi mulţimi M.

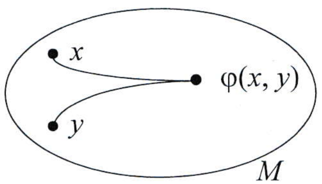
În limbaj formal, avem definiţia echivalentă:

Fie M, o mulţime nevidă. O aplicaţie $\varphi : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ se numeşte ***lege de compoziţie*** (operaţie algebrică) pe mulţimea M.

Elementul unic determinat $\varphi(x, y)$ din M se numeşte ***compusul*** lui x cu y.

Observaţie. Pentru compusul $\varphi(x, y)$ utilizăm şi alte simboluri, cum ar fi: $x * y$; $x \circ y$; $x \perp y$; $x \top y$ etc.

Diagrama legii de compoziţie internă



$\forall\, x, y \in M \Rightarrow \varphi(x, y) \in M$

Exerciţiu rezolvat

Fie $M = [-1, \infty)$ şi legea de compoziţie $x * y = x + y + xy$, $\forall\, x, y \in [-1, \infty)$.
Demonstraţi că „*" este lege de compoziţie internă pe M.

Soluţie. Vom demonstra că, pentru orice $x, y \in M$, avem $x * y \in M$. Într-adevăr: $\forall\, x, y \in [-1, \infty)$, avem $x * y \in [-1, \infty) \Leftrightarrow x + y + xy \geq -1 \Leftrightarrow x + y + xy + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) \geq 0$, evident, deoarece $x + 1 \geq 0$ şi $y + 1 \geq 0$, pentru $x \geq -1$ şi $y \geq -1$.

Exercițiu propus

Fie $M=\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$ şi legea de compoziţie $x * y = x + y + 2xy$, $\forall\ x, y \in \left[-\frac{1}{2},\infty\right)$. Demonstraţi că „*” este lege de compoziţie internă pe M.

Parte stabilă. Lege de compoziţie indusă

Definiţie. Fie M, o mulţime nevidă pe care s-a definit o lege de compoziţie internă φ. O submulţime nevidă H a lui M se numeşte ***parte stabilă*** a lui M în raport cu legea de compoziţie φ dacă $\forall\ x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$.

Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziţie φ internă pe M, atunci pe H putem defini legea de compoziţie:

$$\varphi' : H \times H \to H,\ \varphi'(x, y) \overset{\text{def}}{=} \varphi(x, y) \in H,\ \forall\ x, y \in H.$$

Spunem că φ' este ***lege de compoziţie indusă*** pe H de către legea de compoziţie φ de pe M.

Exercițiu rezolvat

Fie $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}\cos x & \frac{1}{2}\sin x\\ -2\sin x & \cos x\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Demonstraţi că M este parte stabilă a mulţimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Soluţie. Vom demonstra că, pentru orice $A(x), A(y) \in M$, avem $A(x) \cdot A(y) \in M$.

Avem $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x & \frac{1}{2}\sin x\\ -2\sin x & \cos x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos y & \frac{1}{2}\sin y\\ -2\sin y & \cos y\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & \frac{1}{2}\sin x\cos y+\frac{1}{2}\cos x\sin y\\ -2\sin x\cos y-2\cos x\sin y & \cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & \frac{1}{2}\sin(x+y)\\ -2\sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}=A(x+y)\in M.$$

Exercițiu propus

Fie $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}\cos x & \frac{1}{3}\sin x\\ -3\sin x & \cos x\end{pmatrix} \middle| \, x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Demonstraţi că M este parte stabilă a mulţimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Tabla operaţiei (legii de compoziţie)

Definiţie. Fie M, o mulţime finită, $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, şi φ, o lege de compoziţie internă pe M.

$$\varphi : M\times M\to M,\ (x, y)\mapsto \varphi(x, y).$$

În acest caz, legea de compoziţie φ poate fi dată tabelar prin:

φ	x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n
x_1				$\vdots$		
x_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
x_i	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\varphi(x_i, x_j)$		
$\vdots$						
x_n						

Figura 2

Tabla operaţiei asociată legii de compoziţie φ pe mulţimea finită $M=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este un tabel cu n linii şi n coloane corespunzătoare elementelor mulţimii M, astfel încât la intersecţia liniei i cu coloana j se află compusul $\varphi(x_i, x_j)$ al elementului x_i cu elementul x_j prin operaţia φ, după modelul din figura 2.

Această organizare tabelară se mai numeşte ***tabla lui Cayley asociată legii de compoziţie φ pe mulţimea finită M***.

Exercițiu rezolvat

Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi, cu coeficienţi în $\mathbb{Z}$, şi H, o submulţime a sa, $H=\{E, A, B, C\}$, unde $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Întocmiţi tabla operaţiei de înmulţire pe mulţimea H şi arătaţi că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu această operaţie.

Soluţie. Tabla operaţiei induse pe $H = \{E, A, B, C\}$ de înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este:

$\cdot$	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

Deducem că $\forall\ X, Y \in H \Rightarrow X \cdot Y \in H$, deci H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Exerciţiu propus

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi mulţimea de matrice

$$H=\left\{A^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{N}).$$

Arătaţi că $H=\left\{A, A^2, I_3\right\}$ şi alcătuiţi tabla operaţiei induse pe H de înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{N})$.

1.1. Proprietăţi ale legilor de compoziţie internă

Asociativitatea

Fie M, o mulţime nevidă pe care s-a definit legea de compoziţie internă „$*$",

$$* : M\times M\to M;\ (x, y)\mapsto x * y.$$

Ne propunem să verificăm dacă rezultatul calculului $(x * y) * z$ (adică rezultatul dintre compusul lui $x * y$ şi z) coincide cu rezultatul $x * (y * z)$ (adică rezultatul dintre x şi $y * z$).

În acest sens, avem următoarea definiţie.

Definiţie. O lege de compoziţie $* : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$, se numeşte ***asociativă*** dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z), \ \forall\, x, y, z \in M.$$

Exercițiu rezolvat

Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$” prin

$$x * y = x + y + 1, \ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}.$$

Arătaţi că legea „$*$” este asociativă.

Soluţie. Avem:
$(x * y) * z = (x + y + 1) * z = (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2$ (1),
iar $x * (y * z) = x * (y + z + 1) = x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2$ (2).

Din (1) şi (2) deducem că $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$, deci legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

Exercițiu propus

Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim legea de compoziţie internă „$*$” prin:

$$x * y = x + y + k, \ \forall\, x, y \in \mathbb{Z},$$

unde $k \in \mathbb{Z}$ este un număr întreg dat.

Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

Comutativitatea

Definiţie. Fie M, o mulţime nevidă pe care s-a definit o lege de compoziţie internă „$*$”,

$$* : M \times M \to M, \ (x, y) \mapsto x * y.$$

Legea de compoziţie „$*$” este ***comutativă*** dacă:

$$x * y = y * x, \ \forall\, x, y \in M.$$

Exercițiu rezolvat

Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstraţi că înmulţirea matricelor din M este o operaţie comutativă.

Soluție. Avem $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-y & 0 & y\\ 0 & 1 & 0\\ y & 0 & 1-y\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy\\ 0 & 1 & 0\\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy)\end{pmatrix}=A(x+y-2xy)=A(y+x-2yx)=$$

$=A(y)\cdot A(x)$.

Exercițiu propus

Fie $G=\left\{M(a,\,b)=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & a\end{pmatrix}\middle|\, a,\,b\in\mathbb{R}\right\}$.

Arătaţi că înmulţirea matricelor din G este comutativă.

Element neutru

Definiţie. Fie M, o mulţime nevidă pe care s-a definit o lege de compoziţie internă „$*$",

$$*: M\times M\to M,\ (x,y)\to x*y.$$

Un element $e\in M$ se numeşte ***element neutru*** pentru această lege de compoziţie „$*$" dacă:

$$x*e=e*x=x,\ \forall\, x\in M.$$

Exercițiu rezolvat

Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale definim operaţia:

$$x*y=x+y-\frac{xy}{2},\ \forall\, x,y\in\mathbb{Q}.$$

Cercetaţi dacă operaţia „$*$" admite element neutru.

Soluţie. Studiem dacă există $e\in\mathbb{Q}$, astfel încât $e*x=x*e=x$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}$.

Din $e*x=x$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}$, obţinem $e+x-\dfrac{ex}{2}=x$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow e\left(1-\dfrac{x}{2}\right)=0$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow e=0$. Deducem că $0*x=x*0=x$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}$, adică $e=0$ este element neutru pentru legea de compoziţie „$*$".

Exercițiu propus

Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale diferite de 3 se defineşte operaţia „*” prin:

$$x * y = x + y - \frac{xy}{3},\ \forall\, x, y \in \mathbb{Q}.$$

Cercetaţi existenţa elementului neutru.

Elemente simetrizabile

Definiţie. Un element $x \in M$ se numeşte ***simetrizabil*** în raport cu legea de compoziţie „*” dacă există $x' \in M$, astfel încât:

$$x' * x = x * x' = e.$$

Elementul x' se numeşte ***simetricul*** lui x în raport cu legea de compoziţie „*”.

Observaţii:

1. În notaţie aditivă, simetricul lui x se notează $-\boldsymbol{x}$ şi se numeşte ***opusul lui x***.

Avem $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

2. În notaţie multiplicativă, simetricul lui x se notează $\boldsymbol{x^{-1}}$ şi se numeşte ***inversul lui x***.

Avem: $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

3. Se notează $U(M)$ mulţimea tuturor elementelor simetrizabile ale lui M în raport cu legea de compoziţie internă „*”, asociativă şi cu element neutru.

Teoremă. Fie legea de compoziţie internă „*” pe mulţimea M, astfel încât „*” este asociativă şi admite elementul neutru e.

Dacă $x \in M$ este simetrizabil, atunci simetricul său x' este unic.

Teoremă. Dacă x, $y \in M$ sunt elemente simetrizabile în raport cu o lege de compoziţie „*” pe M (asociativă şi cu elementul neutru e), atunci $x * y$ şi x' sunt simetrizabile şi au loc egalităţile:

a) $(x * y)' = y' * x'$;

b) $(x')' = x$.

Exercițiu rezolvat

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $ad + bc = 1$.

Demonstraţi că A este inversabilă (simetrizabilă în raport cu operaţia de înmulţire din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$) şi inversa $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Soluție. Cum $\det A = ad + bc = 1 \neq 0$, deducem că A este inversabilă. Avem:
$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & d \end{pmatrix};\ A^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).$$

Se verifică imediat că $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$.

Exercițiu propus

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix}$, cu $4a^2 - 3b^2 = 1$.

Demonstrați că A este inversabilă și arătați că $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $\mathcal{R}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{Z}$, mulțimea resturilor modulo 5 ale împărțirii tuturor numerelor întregi prin 5.

Să se alcătuiască tablele operațiilor induse pe $\mathcal{R}_5$ de adunarea și înmulțirea modulo 5; să se deducă din tablele întocmite proprietățile operațiilor (asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile).

Soluție.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Deducem: a) Adunarea modulo 5 este asociativă, comutativă, admite element neutru pe „0” și orice element din $\mathcal{R}_5$ admite simetric (opus) în raport cu adunarea și acesta este tot din $\mathcal{R}_5$; avem $-0 = 0$; $-1 = 4$; $-2 = 3$; $-3 = 2$; $-4 = 1$.
b) Înmulțirea modulo 5 este asociativă, comutativă, admite element neutru pe „1” și orice element nenul din $\mathcal{R}_5$ admite simetric (invers) în raport cu înmulțirea și acesta este tot din $\mathcal{R}_5$; avem $1^{-1} = 1$; $2^{-1} = 3$; $3^{-1} = 2$; $4^{-1} = 4$, adică $U(\mathcal{R}_5) =$ $= \{1, 2, 3, 4\}$ este mulțimea elementelor inversabile din $\mathcal{R}_5$.

2. Pentru ce valori ale parametrului real λ intervalul $(3, \infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie „$*$", definită prin:

$$x * y = xy - 3x - 3y + \lambda, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}?$$

Soluţie. Cum $x,y \in (3, \infty)$, avem $x - 3 > 0$, $y - 3 > 0$, deci $(x - 3)(y - 3) > 0$, adică $xy - 3x - 3y + 9 > 0$. Avem $x * y = \underbrace{xy-3x-3y+9}_{>0}+\lambda-9>\lambda-9$. Trebuie ca $\lambda - 9 \geq 3$. Deducem $\lambda \geq 12$.

3. Fie $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1&0&2x\\0&1&0\\0&0&1+x\end{pmatrix}\middle|\, x>-1\right\}$.

a) Să se arate că M este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Studiaţi proprietăţile referitoare la asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor din M.

Soluţie. a) Avem: $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&2x\\0&1&0\\0&0&1+x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2y\\0&1&0\\0&0&1+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2(x+y+xy)\\0&1&0\\0&0&1+x+y+xy\end{pmatrix}=$

$=A(x+y+xy)$ şi $x + y + xy > -1 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) > 0$, evident, deoarece $x > -1$ şi $y > -1$.

b) Înmulţirea matricelor este o operaţie asociativă.

Din $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy) = A(y + x + yx) = A(y) \cdot A(x)$, deducem că înmulţirea matricelor din M este comutativă. $A(0)$ este elementul neutru, deoarece

$$A(0) \cdot A(x) = A(x) \cdot A(0) = A(x)$$

Pentru element simetrizabil cercetăm dacă există $A(x') \in M$, astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0)$.

Avem $A(x) \cdot A(x') = A(x + x' + xx') = A(0) \Rightarrow x + x' + xx' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'=\frac{-x}{x+1} > -1.$$

Deducem că orice element din M este simetrizabil în raport cu înmulţirea (adică inversabil) şi inversa matricei $A(x)$ este matricea $A\left(\dfrac{-x}{x+1}\right) \in M$.

Exerciții propuse

1. Fie $\mathscr{R}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$, mulţimea resturilor împărţirii unui număr întreg dat la 6. Să se alcătuiască tablele operaţiilor induse pe $\mathscr{R}_6$ de adunarea şi înmulţirea modulo 6. Să se deducă din tablele întocmite proprietăţile operaţiilor (asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile).

2. Rezolvaţi în $\mathscr{R}_6$ ecuaţiile:
a) $3 \oplus x = x \oplus 3$; $5 \odot x = x \odot 5$;
b) $3 \oplus x \odot 2 = 5$;
c) $4 \odot x \oplus 3 = 2$,
unde $\oplus$ şi $\odot$ sunt simbolurile adunării şi înmulţirii modulo 6.
(Remarcă: operaţia $\odot$ are prioritate faţă de $\oplus$).

3. Arătaţi că submulţimea $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{Z}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziţie:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto |x - y|$$

şi alcătuiţi tabla operaţiei induse.

4. Pentru ce valori ale parametrului λ intervalul (a, ∞), unde $a \in \mathbb{R}$, este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie „$*$”, dată prin:

$$x * y = xy - ax - ay + \lambda,\ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ax \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \middle|\ x > -1 \right\}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este fixat.

a) Să se arate că M este o parte stabilă a lui $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.
b) Studiaţi proprietăţile referitoare la asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile.

6. Pe mulţimea $G = (-\,a, \infty)$, unde $a \in \mathbb{R}$, a fixat, se defineşte legea de compoziţie „$*$”, dată prin $x * y = xy + ax + ay + a(a - 1),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că G este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operaţia „$*$”.

b) Studiaţi proprietăţile referitoare la asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile.

7. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie „$*$” prin:

$$x * y \overset{\text{def}}{=} axy + b(x + y) + c\,,\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Arătaţi că legea de compoziţie „$*$” este asociativă dacă şi numai dacă $b^2 - b - ac = 0$.