

## Matematică

*algebră, analiză matematică*

Clasa a XII-a

*- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -*



---

Cartea Românească  
EDUCATIONAL

Iași- 2019

<b>Teste de evaluare inițială .....</b>	11	249
---	----	-----

## ALGEBRĂ

<b>Capitolul I. Grupuri .....</b>	16	
1. Lege de compozиie internă (operație algebrică), parte stabilă, tabla operației .....	16	
1.1. Proprietăți ale legilor de compozиie internă .....	19	250
1.2. Evaluare sumativă .....	29	251
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	29	251
2. Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, grupul $\mathbb{Z}_n$ al claselor de resturi modulo $n$ .....	33	
2.1. Definiția grupului .....	33	252
2.2. Grupuri numerice .....	34	
2.3. Reguli de calcul într-un grup .....	40	254
2.4. Evaluare sumativă .....	43	255
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	44	255
2.5. Subgrup .....	46	256
2.6. Evaluare sumativă .....	49	257
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	50	257
2.7. Morfisme și izomorfisme de grupuri .....	51	257
2.8. Evaluare sumativă .....	63	259
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	64	259
2.9. Grup finit, tabla operației, ordinul grupului, ordinul unui element .....	66	260
2.10. Evaluare sumativă .....	72	261
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	73	261
Test de autoevaluare.....	74	
<b>PROBLEME RECAPITULATIVE .....</b>	76	262
<b>Capitolul II. Inele și corpuri .....</b>	82	
1. Inel .....	82	264
1.1. Definiția inelului, exemple: inele numerice ( $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ), $\mathbb{Z}_n$ , inele de matrice, inele de funcții reale .....	82	
1.2. Reguli de calcul într-un inel .....	88	265

1.3. Morfisme și izomorfisme de inele. Inele izomorfe .....	93	.... 266
<b>EXERCIȚII RECAPITULATIVE .....</b>	95	.... 266
1.4. Evaluare sumativă .....	101	
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	102	.... 268
 2. Corp .....	104	.... 269
2.1. Definiția corpului, exemple: corpuri numerice ( $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ ), $\mathbb{Z}_p$ , $p$ prim, corpuri de matrice .....	104	
2.2. Morfisme și izomorfisme de corpuri .....	107	
<b>EXERCIȚII RECAPITULATIVE .....</b>	113	.... 269
2.3. Evaluare sumativă .....	118	
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	119	.... 271
Test de autoevaluare.....	120	
 <b>Capitolul III. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ .....</b>	122	
1. Forma algebrică a unui polinom, funcția polinomială, operații (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar) .....	122	
2. Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor; împărțirea cu $X-a$ , schema lui Horner .....	125	.... 272
3. Divizibilitatea polinoamelor .....	129	.... 272
4. Proprietăți ale relației de divizibilitate la polinoame .....	130	
5. Teorema lui Bézout .....	130	
6. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor .....	131	
7. Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor .....	133	
8. Polinoame ireductibile. Descompunerea unor polinoame în factori ireductibili .....	134	
9. Rădăcini ale polinoamelor, relațiile lui Viète .....	136	.... 272
10. Rezolvarea unor ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ , ecuații binome, ecuații reciproce, ecuații bipătrate .....	142	.... 272
<b>EXERCIȚII RECAPITULATIVE .....</b>	153	.... 272
11. Evaluare sumativă .....	156	.... 273
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	157	.... 274
Test de autoevaluare.....	162	

**Capitolul I. Primitive .....** 164

1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală .....	164
2. Primitivele unei funcții.....	165
3. Integrala nedefinită a unei funcții .....	165
4. Proprietăți ale integralei nedefinite: liniaritate .....	166
5. Primitive uzuale .....	166 ... 275
6. Evaluare sumativă .....	170
7. Metode de calcul al primitivelor .....	171
7.1. Integrarea prin părți .....	171 ... 276
7.2. Evaluare sumativă .....	172 ... 276
7.3. Prima metodă a schimbării de variabilă .....	173 ... 277
7.4. A doua metodă a schimbării de variabilă .....	176 ... 277
7.5. Evaluare sumativă .....	177 ... 278
Test de autoevaluare.....	178

**Capitolul II. Funcții integrabile .....** 180

1. Diviziuni ale unui interval $[a, b]$ , norma unei diviziuni, sistem de puncte intermediare .....	180
1.1. Sume Riemann, interpretare geometrică .....	180
1.2. Funcții integrabile pe un interval $[a, b]$ .....	181
1.3. Formula Leibniz – Newton .....	182
1.4. Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate .....	183
1.5. Integrabilitatea funcțiilor monotone și continue .....	184
1.6. Teorema de medie, interpretare geometrică .....	184
1.7. Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue .....	184
1.8. Metode de calcul ale integralelor definite .....	185
1.8.1. Formula integrării prin părți .....	185 ... 278
1.8.2. Evaluare sumativă .....	186 ... 279
1.8.3. Formula integrării prin schimbarea de variabilă .....	186 ... 279
1.8.4. Evaluare sumativă .....	188 ... 279
1.9. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , grad $Q \leq 4$ , prin metoda descompunerii în fracții simple .....	188 ... 279
1.10. Evaluare sumativă .....	190 ... 280
Probleme pregătitoare pentru bacalaureat .....	190 ... 280
Test de autoevaluare.....	198

1. Aria unei suprafețe plane .....	200	.... 284
2. Volumul unui corp de rotație .....	203	.... 284
3. Calculul unor limite de siruri folosind integrala definită .....	205	.... 284
<b>PROBLEME PROPUSE. Aplicații ale integralei definite .....</b>	<b>207</b>	<b>.... 285</b>
4. Evaluare sumativă .....	209	.... 286
Test de autoevaluare .....	209	
<b>EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE .....</b>	<b>211</b>	<b>.... 286</b>
<b>MODELE DE TEZE SEMESTRIALE .....</b>	<b>239</b>	<b>.... 304</b>
<b>SIMULARE BACALAUREAT .....</b>	<b>244</b>	<b>.... 305</b>
<b>INDICAȚII, REZOLVĂRI, SOLUȚII .....</b>	<b>249</b>	
Soluții teste autoevaluare .....	306	
<b>Bibliografie .....</b>	<b>309</b>	

## Capitolul I. Grupuri

### 1. Lege de compoziție internă (operație algebrică), parte stabilă, tabla operației

#### Lege de compoziție internă (operație algebrică)

**Definiție.** Spunem că pe mulțimea  $M$  este definită o *lege de compoziție internă* dacă oricărei perechi ordonate de elemente din  $M$  i se asociază un element bine determinat, aparținând aceleiași mulțimi  $M$ .

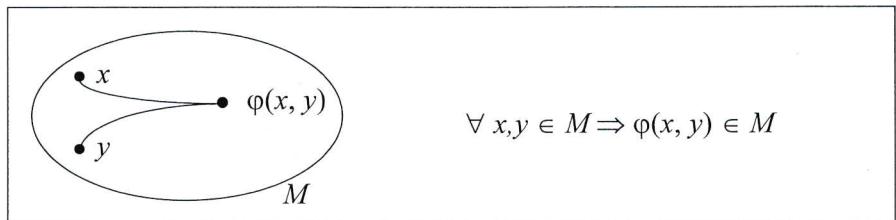
În limbaj formal, avem definiția echivalentă:

Fie  $M$ , o mulțime nevidă. O aplicație  $\varphi : M \times M \rightarrow M$ ,  $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$  se numește *lege de compoziție* (operație algebrică) pe mulțimea  $M$ .

Elementul unic determinat  $\varphi(x, y)$  din  $M$  se numește **compusul** lui  $x$  cu  $y$ .

**Observație.** Pentru compusul  $\varphi(x, y)$  utilizăm și alte simboluri, cum ar fi:  $x * y$ ;  $x \circ y$ ;  $x \perp y$ ;  $x \top y$  etc.

#### Diagrama legii de compoziție internă



#### Exercițiu rezolvat

Fie  $M = [-1, \infty)$  și legea de compoziție  $x * y = x + y + xy$ ,  $\forall x, y \in [-1, \infty)$ . Demonstrați că „ $*$ ” este lege de compoziție internă pe  $M$ .

**Soluție.** Vom demonstra că, pentru orice  $x, y \in M$ , avem  $x * y \in M$ . Într-adevăr:  $\forall x, y \in [-1, \infty)$ , avem  $x * y \in [-1, \infty) \Leftrightarrow x + y + xy \geq -1 \Leftrightarrow x + y + xy + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) \geq 0$ , evident, deoarece  $x + 1 \geq 0$  și  $y + 1 \geq 0$ , pentru  $x \geq -1$  și  $y \geq -1$ .

Fie  $M = \left[ -\frac{1}{2}, \infty \right)$  și legea de compoziție  $x * y = x + y + 2xy, \forall x, y \in M$ . Demonstrați că „ $*$ ” este lege de compoziție internă pe  $M$ .

### **Parte stabilă. Lege de compoziție indușă**

**Definiție.** Fie  $M$ , o mulțime nevidă pe care s-a definit o lege de compoziție internă  $\varphi$ . O submulțime nevidă  $H$  a lui  $M$  se numește **parte stabilă** a lui  $M$  în raport cu legea de compoziție  $\varphi$  dacă  $\forall x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$ .

Dacă  $H$  este o parte stabilă a lui  $M$  în raport cu legea de compoziție  $\varphi$  internă pe  $M$ , atunci pe  $H$  putem defini legea de compoziție:

$$\varphi' : H \times H \rightarrow H, \varphi'(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, y) \in H, \forall x, y \in H.$$

Spunem că  $\varphi'$  este **lege de compoziție indușă** pe  $H$  de către legea de compoziție  $\varphi$  de pe  $M$ .

### *Exercițiu rezolvat*

Fie  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \frac{1}{2}\sin x \\ -2\sin x & \cos x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Demonstrați că  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

**Soluție.** Vom demonstra că, pentru orice  $A(x), A(y) \in M$ , avem  $A(x) \cdot A(y) \in M$ .

$$\begin{aligned} \text{Avem } A(x) \cdot A(y) &= \begin{pmatrix} \cos x & \frac{1}{2}\sin x \\ -2\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y & \frac{1}{2}\sin y \\ -2\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & \frac{1}{2}\sin x \cos y + \frac{1}{2}\cos x \sin y \\ -2\sin x \cos y - 2\cos x \sin y & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \frac{1}{2}\sin(x+y) \\ -2\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = A(x+y) \in M. \end{aligned}$$

Fie  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \frac{1}{3}\sin x \\ -3\sin x & \cos x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Demonstrați că  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

### Tabla operației (legii de compozиie)

**Definiție.** Fie  $M$ , o mulțime finită,  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , și  $\varphi$ , o lege de compozиie internă pe  $M$ .

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \mapsto \varphi(x, y).$$

În acest caz, legea de compozиie  $\varphi$  poate fi dată tabelar prin:

$\varphi$	$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$
$x_1$						
$x_2$						
$\vdots$						
$x_i$	.....	.....	.....		$\varphi(x_i, x_j)$	
$\vdots$						
$x_n$						

Figura 2

Tabla operației asociată legii de compozиie  $\varphi$  pe mulțimea finită  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  este un tabel cu  $n$  linii și  $n$  coloane corespunzătoare elementelor mulțimii  $M$ , astfel încât la intersecția liniei  $i$  cu coloana  $j$  se află compusul  $\varphi(x_i, x_j)$  al elementului  $x_i$  cu elementul  $x_j$  prin operația  $\varphi$ , după modelul din figura 2.

Această organizare tabelară se mai numește *tabla lui Cayley asociată legii de compozиie  $\varphi$  pe mulțimea finită  $M$* .

### Exercițiu rezolvat

Fie  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ , mulțimea matricelor pătratice de ordin doi, cu coeficienți în  $\mathbb{Z}$ , și  $H$ , o submulțime a sa,  $H = \{E, A, B, C\}$ , unde  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

Respectându-ne de la punctul de vedere că  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Înlocuim tabla operației de înmulțire pe mulțimea  $H$  și arătați că  $H$  este o parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  în raport cu această operație.

*Soluție.* Tabla operației induse pe  $H = \{E, A, B, C\}$  de înmulțirea matricelor din  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  este:

.	$E$	$A$	$B$	$C$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$
$A$	$A$	$B$	$C$	$E$
$B$	$B$	$C$	$E$	$A$
$C$	$C$	$E$	$A$	$B$

Deducem că  $\forall X, Y \in H \Rightarrow X \cdot Y \in H$ , deci  $H$  este o parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

### *Exercițiu propus*

Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și mulțimea de matrice  $H = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{N})$ .

Arătați că  $H = \{A, A^2, I_3\}$  și alcătuți tabla operației induse pe  $H$  de înmulțirea matricelor din  $\mathcal{M}_3(\mathbb{N})$ .

## 1.1. Proprietăți ale legilor de compoziție internă

### Asociativitatea

Fie  $M$ , o mulțime nevidă pe care s-a definit legea de compoziție internă „\*”,  $* : M \times M \rightarrow M$ ;  $(x, y) \mapsto x * y$ .

Ne propunem să verificăm dacă rezultatul calculului  $(x * y) * z$  (adică rezultatul dintre compusul lui  $x * y$  și  $z$ ) coincide cu rezultatul  $x * (y * z)$  (adică rezultatul dintre  $x$  și  $y * z$ ).

În acest sens, avem următoarea definiție.

**Definiție.** O lege de compoziție  $* : M \times M \rightarrow M$ ,  $(x, y) \mapsto x * y$ , se numește **asociativă** dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in M.$$

### *Exercițiu rezolvat*

Pe  $\mathbb{Z}$  se definește legea de compoziție „\*” prin

$$x * y = x + y + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Arătați că legea „\*” este asociativă.

*Soluție.* Avem:

$$(x * y) * z = (x + y + 1) * z = (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2 \quad (1),$$

$$\text{iar } x * (y * z) = x * (y + z + 1) = x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2 \quad (2).$$

Din (1) și (2) deducem că  $(x * y) * z = x * (y * z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ , deci legea de compoziție „\*” este asociativă.

### *Exercițiu propus*

Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  a numerelor întregi definim legea de compoziție internă „\*” prin:

$$x * y = x + y + k, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z},$$

unde  $k \in \mathbb{Z}$  este un număr întreg dat.

Să se arate că legea de compoziție „\*” este asociativă.

### **Comutativitatea**

**Definiție.** Fie  $M$ , o mulțime nevidă pe care s-a definit o lege de compoziție internă „\*”,

$$*: M \times M \rightarrow M, \quad (x, y) \mapsto x * y.$$

Legea de compoziție „\*” este **comutativă** dacă:

$$x * y = y * x, \quad \forall x, y \in M.$$

### *Exercițiu rezolvat*

Fie  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ . Demonstrați că înmulțirea

matricelor din  $M$  este o operație comutativă.

Respect pentru oameni și cărți

*Soluție.* Avem  $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy) \end{pmatrix} = A(x+y-2xy) = A(y+x-2yx) =$$

$$= A(y) \cdot A(x).$$

### Exercițiu propus

Fie  $G = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

Arătați că înmulțirea matricelor din  $G$  este comutativă.

### Element neutru

**Definiție.** Fie  $M$ , o mulțime nevidă pe care s-a definit o lege de compoziție internă „\*”,

$$*: M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y.$$

Un element  $e \in M$  se numește **element neutru** pentru această lege de compoziție „\*” dacă:

$$x * e = e * x = x, \forall x \in M.$$

### Exercițiu rezolvat

Pe mulțimea  $\mathbb{Q}$  a numerelor raționale definim operația:

$$x * y = x + y - \frac{xy}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Cercetați dacă operația „\*” admite element neutru.

*Soluție.* Studiem dacă există  $e \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ .

$$\text{Din } e * x = x, \forall x \in \mathbb{Q}, \text{ obținem } e + x - \frac{ex}{2} = x, \forall x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow e \left(1 - \frac{x}{2}\right) = 0,$$

$\forall x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow e = 0$ . Deducem că  $0 * x = x * 0 = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ , adică  $e = 0$  este element neutru pentru legea de compoziție „\*”.

Pe mulțimea  $\mathbb{Q}$  a numerelor raționale diferite de 3 se definește operația „\*” prin:

$$x * y = x + y - \frac{xy}{3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Cercetați existența elementului neutru.

### Elemente simetrizabile

**Definiție.** Un element  $x \in M$  se numește **simetrizabil** în raport cu legea de compozиție „\*” dacă există  $x' \in M$ , astfel încât:

$$x' * x = x * x' = e.$$

Elementul  $x'$  se numește **simetricul** lui  $x$  în raport cu legea de compozиție „\*”.

#### Observații:

1. În notație aditivă, simetricul lui  $x$  se notează  $-x$  și se numește **opusul lui  $x$** .

Avem  $(-x) + x = x + (-x) = 0$ .

2. În notație multiplicativă, simetricul lui  $x$  se notează  $x^{-1}$  și se numește **inversul lui  $x$** .

Avem:  $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ .

3. Se notează  $U(M)$  mulțimea tuturor elementelor simetrizabile ale lui  $M$  în raport cu legea de compozиție internă „\*”, asociativă și cu element neutru.

**Teoremă.** Fie legea de compozиție internă „\*” pe mulțimea  $M$ , astfel încât „\*” este asociativă și admite elementul neutru  $e$ .

Dacă  $x \in M$  este simetrizabil, atunci simetricul său  $x'$  este unic.

**Teoremă.** Dacă  $x, y \in M$  sunt elemente simetrizabile în raport cu o lege de compozиție „\*” pe  $M$  (asociativă și cu elementul neutru  $e$ ), atunci  $x * y$  și  $x'$  sunt simetrizabile și au loc egalitățile:

a)  $(x * y)' = y' * x'$ ;

b)  $(x')' = x$ .

### Exercițiu rezolvat

Fie matricea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$ , cu  $ad + bc = 1$ .

Demonstrați că  $A$  este inversabilă (simetrizabilă în raport cu operația de înmulțire din  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ) și inversa  $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ .

*Soluție.* Cum  $\det A = ad - bc = 1 \neq 0$ , deducem că  $A$  este inversabilă. Avem:

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & d \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).$$

Se verifică imediat că  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ .

### *Exercițiu propus*

În mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ , fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix}$ , cu  $4a^2 - 3b^2 = 1$ .

Demonstrați că  $A$  este inversabilă și arătați că  $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ .

### *Exerciții rezolvate*

1. Fie  $\mathcal{R}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{Z}$ , mulțimea resturilor modulo 5 ale împărțirii tuturor numerelor întregi prin 5.

Să se alcătuiască tablele operațiilor induse pe  $\mathcal{R}_5$  de adunarea și înmulțirea modulo 5; să se deducă din tablele întocmite proprietățile operațiilor (asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile).

*Soluție.*

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Deducem: a) Adunarea modulo 5 este asociativă, comutativă, admite element neutru pe „0” și orice element din  $\mathcal{R}_5$  admite simetric (opus) în raport cu adunarea și acesta este tot din  $\mathcal{R}_5$ ; avem  $-0 = 0$ ;  $-1 = 4$ ;  $-2 = 3$ ;  $-3 = 2$ ;  $-4 = 1$ .  
 b) Înmulțirea modulo 5 este asociativă, comutativă, admite element neutru pe „1” și orice element nenul din  $\mathcal{R}_5$  admite simetric (invers) în raport cu înmulțirea și acesta este tot din  $\mathcal{R}_5$ ; avem  $1^{-1} = 1$ ;  $2^{-1} = 3$ ;  $3^{-1} = 2$ ;  $4^{-1} = 4$ , adică  $U(\mathcal{R}_5) = \{1, 2, 3, 4\}$  este mulțimea elementelor inversabile din  $\mathcal{R}_5$ .

2. Pentru ce valori ale parametrului real  $\lambda$  intervalul  $(3, \infty)$  este o parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea de compozitie „ $*$ ”, definită prin:

$$x * y = xy - 3x - 3y + \lambda, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}?$$

*Soluție.* Cum  $x, y \in (3, \infty)$ , avem  $x - 3 > 0$ ,  $y - 3 > 0$ , deci  $(x - 3)(y - 3) > 0$ , adică  $xy - 3x - 3y + 9 > 0$ . Avem  $x * y = \underbrace{xy - 3x - 3y + 9}_{> 0} + \lambda - 9 > \lambda - 9$ . Trebuie ca  $\lambda - 9 \geq 3$ . Deducem  $\lambda \geq 12$ .

3. Fie  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \middle| x > -1 \right\}$ .

- a) Să se arate că  $M$  este o parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
- b) Studiați proprietățile referitoare la asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile în raport cu operația de înmulțire a matricelor din  $M$ .

*Soluție.* a) Avem:  $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(x+y+xy) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+x+y+xy \end{pmatrix} = A(x+y+xy)$

și  $x + y + xy > -1 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) > 0$ , evident, deoarece  $x > -1$  și  $y > -1$ .

b) Înmulțirea matricelor este o operație asociativă.

Din  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy) = A(y + x + yx) = A(y) \cdot A(x)$ , deducem că înmulțirea matricelor din  $M$  este comutativă.  $A(0)$  este elementul neutru, deoarece

$$A(0) \cdot A(x) = A(x) \cdot A(0) = A(x)$$

Pentru element simetribil cercetăm dacă există  $A(x') \in M$ , astfel încât  $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0)$ .

$$\text{Avem } A(x) \cdot A(x') = A(x + x' + xx') = A(0) \Rightarrow x + x' + xx' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-x}{x+1} > -1.$$

Dedecem că orice element din  $M$  este simetribil în raport cu înmulțirea (adică inversabil) și inversa matricei  $A(x)$  este matricea  $A\left(\frac{-x}{x+1}\right) \in M$ .

1. Fie  $\mathcal{R}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$ , mulțimea resturilor împărțirii unui număr întreg dat la 6. Să se alcătuiască tablele operațiilor induse pe  $\mathcal{R}_6$  de adunarea și înmulțirea modulo 6. Să se deducă din tablele întocmite proprietățile operațiilor (asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile).

2. Rezolvați în  $\mathcal{R}_6$  ecuațiile:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 3 \oplus x = x \oplus 3; \quad 5 \odot x = x \odot 5; \\ \text{b)} \quad & 3 \oplus x \odot 2 = 5; \\ \text{c)} \quad & 4 \odot x \oplus 3 = 2, \end{aligned}$$

unde  $\oplus$  și  $\odot$  sunt simbolurile adunării și înmulțirii modulo 6.

(Remarcă: operația  $\odot$  are prioritate față de  $\oplus$ ).

3. Arătați că submulțimea  $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{Z}$  este o parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu legea de compozиție:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto |x - y|$$

și alcătuți tabla operației induse.

4. Pentru ce valori ale parametrului  $\lambda$  intervalul  $(a, \infty)$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ , este o parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea de compozиție „\*”, dată prin:

$$x * y = xy - ax - ay + \lambda, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Fie  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ax \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \middle| x > -1 \right\}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$  este fixat.

a) Să se arate că  $M$  este o parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

b) Studiați proprietățile referitoare la asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile.

6. Pe mulțimea  $G = (-a, \infty)$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a$  fixat, se definește legea de compozиție „\*”, dată prin  $x * y = xy + ax + ay + a(a - 1)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

a) Să se arate că  $G$  este o parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operația „\*”.

b) Studiați proprietățile referitoare la asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile.

7. Fie  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Pe  $\mathbb{Z}$  definim legea de compozиție „\*” prin:

$$x * y = \underset{\text{def}}{axy + b(x + y) + c}, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Arătați că legea de compozиție „\*” este asociativă dacă și numai dacă  $b^2 - b - ac = 0$ .