

# Matematică

## *algebră, geometrie, trigonometrie*

### Clasa a IX-a

*- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -*



---

Cartea Românească  
EDUCAȚIONAL

Iași - 2019

Teste de evaluare inițială .....	12	... 205
----------------------------------	----	---------

## ALGEBRĂ

<b>Capitolul I. Mulțimi și elemente de logică matematică .....</b>	<b>17</b>	
1. Mulțimea numerelor naturale .....	17	... 206
2. Mulțimea numerelor întregi .....	19	... 207
3. Mulțimea numerelor raționale .....	20	... 207
4. Mulțimea numerelor reale .....	22	... 208
5. Modulul unui număr real .....	29	... 209
6. Intervale de numere reale .....	30	... 209
7. Inegalități remarcabile .....	33	... 210
8. Inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz .....	36	... 210
9. Inegalitatea lui Cebâșev .....	42	... 214
10. Inegalitatea lui Minkowski .....	45	... 215
11. Elemente de logică matematică .....	47	... 216
12. Echivalență și corelarea operațiilor logice elementare cu operațiile și relațiile cu mulțimi .....	53	
13. Inducția matematică .....	55	... 216
14. Evaluare sumativă .....	63	... 217
Test de autoevaluare .....	64	

<b>Capitolul II. Funcții .....</b>	<b>65</b>	
1. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale: siruri .....	65	... 218
2. Progresii aritmetice .....	70	... 218
3. Progresii geometrice .....	74	... 218
4. Evaluare sumativă .....	80	... 220
5. Funcții; lecturi grafice .....	81	... 220
6. Funcția de gradul întâi .....	96	... 222
7. Evaluare sumativă .....	105	... 223
8. Funcția de gradul al doilea .....	106	... 223
9. Evaluare sumativă .....	121	
Test de autoevaluare .....	122	
Test de autoevaluare (recapitulare) .....	123	

## GEOMETRIE

<b>Capitolul III. Vectori .....</b>	<b>124</b>	
1. Vectori; generalități .....	124	... 228
2. Operații cu vectori .....	125	... 228
3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat .....	127	... 229

4. Descompunerea unui vector după două direcții date .....	128	
5. Evaluare sumativă .....	128	.... 229
6. Coliniaritate, concurență, paralelism		
Calcul vectorial în geometria plană .....	129	
7. Teoreme de geometrie plană .....	134	.... 230
8. Evaluare sumativă .....	138	.... 231
Test de autoevaluare .....	139	

## TRIGONOMETRIE

<b>Capitolul IV. Elemente de trigonometrie .....</b>	140	
1. Cercul trigonometric; generalități .....	140	.... 231
2. Funcții trigonometrice definite pe $[0, 2\pi]$ , respectiv $[0, \pi]$ .....	141	
3. Funcții trigonometrice definite pe $\mathbb{R}$ .....	143	
4. Formule de reducere la primul cadran .....	144	.... 231
5. Formule trigonometrice pentru sume și diferențe de unghiuri .....	146	.... 231
6. Formule trigonometrice pentru unghiul dublu .....	150	.... 232
7. Exprimarea funcțiilor trigonometrice în raport cu $\operatorname{tg} x/2$ .....	150	
8. Formule pentru transformarea sumei în produs .....	154	
9. Formule pentru transformarea produselor de funcții trigonometrice în sume sau diferențe .....	155	.... 232
10. Evaluare sumativă .....	160	.... 232
Test de autoevaluare .....	161	

### **Capitolul V. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană .....**

1. Produsul scalar a doi vectori .....	162	
1.1. Teorema cosinusului .....	163	
1.2. Rezolvarea triunghiului dreptunghic .....	164	.... 232
2. Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie .....	166	
2.1. Teorema sinusurilor .....	166	
2.2. Rezolvarea triunghiului oarecare .....	166	.... 233
3. Calculul razei cercului inscris și a cercului circumscris triunghiului.....	168	
3.1. Calculul lungimilor unor segmente importante în triunghi .....	169	.... 233
3.2. Calcul de arii .....	170	.... 234
4. Evaluare sumativă .....	175	.... 234
Test de autoevaluare .....	176	
Test de autoevaluare (recapitulare) .....	177	

### PROBLEME RECAPITULATIVE

Algebra .....	178	.... 235
Geometrie .....	183	.... 243

**PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU BACALAUREAT**

Algebră .....	200	.... 264
Geometrie – Trigonometrie .....	202	.... 265

**INDICAȚII, REZOLVĂRI, SOLUȚII .....** 205

Soluții teste de autoevaluare .....	267
-------------------------------------	-----

**Bibliografie .....** 269

# ALGEBRĂ

## Capitolul I. Multimi și elemente de logică matematică

Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă și prin adăos, partea întreagă, partea fracționară a unui număr real; operații cu intervale de numere reale.

Numerele sunt un produs al inteligenței omului, cu ajutorul cărora acesta percep aspecte cantitative ale lumii înconjurătoare și stabilește relații de ordine între ele.

Noțiunea de număr s-a perfecționat odată cu evoluția omului. Astfel, au rezultat următoarele mulțimi de numere: numere naturale, numere întregi, numere raționale, numere reale.

Pornind de la mulțimea numerelor naturale, pot fi construite toate celelalte mulțimi de numere.

Fundamentul acestei construcții logice îl constituie teoria mulțimilor și logica matematică.

### 1. Mulțimea numerelor naturale este:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Pe mulțimea numerelor naturale se definesc operațiile algebrice: **adunarea** și **înmulțirea**. Aceste operații au următoarele proprietăți:

- 1) **comutativitatea**:  $a + b = b + a$ ;  $a \cdot b = b \cdot a$ , oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{N}$ ;
- 2) **asociativitatea**:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ;
- 3) **existența elementului neutru**:  $a + 0 = 0 + a = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{N}$  (0 este element neutru pentru adunare);  
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{N}$$
 (1 este element neutru pentru înmulțire);
- 4) **distributivitatea înmulțirii față de adunare**:  $a(b + c) = ab + ac$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .

$$a < b \text{ sau } a = b \text{ sau } b < a.$$

**Axioma lui Arhimede.** Pentru două numere naturale oarecare  $a$  și  $b$ ,  $a > 0$ , există un număr natural  $n$ , astfel încât  $a \cdot n > b$ .

### Exerciții propuse

- Fie  $A = \{\overline{abc} \mid a \cdot b \cdot c = 4\}$ . Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea  $A$ , acesta să fie divizibil cu 3. (Gheorghe Crăciun, Ploiești)
- Fie  $A = \{\overline{abc} \mid \overline{abc} = a + 10b + 100c\}$ . Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea  $A$ , acesta să fie divizibil cu 5? (Nicolae Stănică, Brăila)
- Fie  $A \subset \mathbb{N}$ , o mulțime având simultan proprietățile:  
 i)  $1 \in A$ ;   ii) Dacă  $x \in A$ , atunci  $3x \in A$ ;   iii) Dacă  $4x + 1 \in A$ , atunci  $x \in A$ .  
 Demonstrați că  $\{0, 6, 180, 182\} \subset A$ . (Marin Chirciu, Pitești)
- Suma a 10 numere naturale distințte este 62. Demonstrați că produsul lor se divide cu 60. (Concursul „Simon Petru”, Târgu-Mureș, 2004)
- Pe o circumferință se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există două perechi formate din numere vecine, astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală cu 8. (Olimpiada Națională, 2005, Marin Chirciu)
- a) Dacă  $n \in \mathbb{N}^*$ , să se arate că orice număr de forma  $10^{2n} - 10^{2n-1} - 10^{2n-2}$  se poate scrie sub forma  $x^2 + y^2 + z^2$ , unde  $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ ,  $x, y, z$  – distințte. (G.M. 5/2006, Daniel Cojocaru, Slatina)  
 b) Dacă  $a \in \{5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $a^{2n} - a^{2n-1} - a^{2n-2}$  se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte nenule distințte. (Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești)
- Să se găsească cel mai mic număr nenul  $n$ , pentru care numărul 2000 divide numărul  $n(n+1)(n+2)(n+3)$ . (O.M. 2000, Rusia)
- Să se găsească valoarea expresiei:  

$$E = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 2001! \cdot 2002 + 2001!$$
 (O.M. 2001, Rusia)
- Numerele naturale  $p$ ,  $q$  și  $r$  sunt astfel încât  $p + q$ ,  $q + r$  și  $r + p$  sunt prime. Să se arate că două dintre numerele  $p$ ,  $q$ ,  $r$  sunt egale. (O.M. 1996, Rusia)
- Rezolvați în  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  ecuația:  $x \cdot y^{2008} + y \cdot x^{2008} = 1 + (xy)^{2007}$ . (Concursul „Mihai Eminescu”, Satu Mare, 2007, Traian Tămăian)

11. Rezolvați în  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  ecuația:  $xy^n + yx^n = 1 + (xy)^n$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n$  fixat.

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

12. a) Să se arate că numărul  $n = 1001^{1003} + 1003^{1001}$  este divizibil cu 2004.

(G.M. 4/2007, Vasile Solovăstru, Feldru, Bistrița-Năsăud)

b) Să se arate că  $4001^{4003} + 4003^{4001}$  se divide cu 8004.

c) Fie  $a$ , număr natural impar. Demonstrați că  $a^{a+2} + (a+2)^a$  se divide cu  $2(a+1)$ .

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești)

## 2. Mulțimea numerelor întregi este:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc operațiile algebrice: **adunarea** și **înmulțirea**. Proprietățile verificate de aceste operații în cazul numerelor naturale rămân valabile și pentru numere întregi. În plus, la acestea se mai adaugă și alte proprietăți:

5) **existența elementului opus**: Pentru orice  $a \in \mathbb{Z}$  există elementul  $-a \in \mathbb{Z}$  (numit **opusul lui a**), cu proprietatea:

$$a + (-a) = -a + a = 0.$$

### Exerciții propuse

1. Să se găsească toate numerele  $n$  cu proprietatea că  $n^2 + 2$  este divizibil cu  $n + 1$ .

2. Arătați că, dacă suma pătratelor a două numere întregi se divide cu 7, atunci fiecare dintre aceste numere se divide cu 7.

3. Arătați că, pentru  $k \in \mathbb{Z}$ , avem  $\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k \in \mathbb{Z}$ .

4. Determinați elementele mulțimii  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$ .

5. Fie mulțimile  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^{10} + 3}{2x^2} \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^{10} + 2}{3x^2} \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Arătați că  $A = B$ .

6. Rezolvați în numere întregi sistemul:  $\begin{cases} xy + z = 94 \\ x + yz = 95 \end{cases}$ .

(O.M. 1994, Rusia)

7. Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n$  fixat. Rezolvați în numere întregi sistemul:  $\begin{cases} xy + z = 3n + 1 \\ x + yz = 3n + 2 \end{cases}$ .

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești)

8. Fie  $a, b \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $ab$  și  $(a+1)(b-1)$  sunt numere consecutive. Să se arate că  $ab + 1$  este pătrat perfect.

(O.M. 2007, Satu Mare, Ovidiu Pop)

9. a) Să se rezolve în  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ecuația:  $x^2y^2 - 2003x = 2003$ .

(G.M. 6/2007, Daniel Stretcu și Eduard Gabriel Băzăvan, Drobeta Turnu Severin)

- b) Fie  $p$ , număr prim fixat. Să se rezolve în  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ecuația:

$$x^2y^2 - (p-1)x = p.$$

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

### 3. Mulțimea numerelor raționale este:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Orice număr rațional poate fi scris în două moduri:

- sub formă de fracție ordinată (ca raport de două numere întregi);
- sub formă de fracție zecimală (finită sau infinită periodică).

#### Trecerea de la o fracție ordinată la o fracție zecimală

Aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale, putem trece de la o fracție ordinată  $\frac{a}{b}$  la o fracție zecimală (finită sau infinită, periodică simplă sau mixtă).

**Exemplu:** a)  $\frac{3}{5} = 0,6$ ;    b)  $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,(3)$ ;    c)  $\frac{7}{6} = 1,1666\dots = 1,1(6)$ .

În cazul a) avem o fracție zecimală **finită**; în cazul b) avem o fracție zecimală infinită **periodică simplă**, cu perioada 3; în cazul c) avem o fracție zecimală infinită **periodică mixtă**, cu partea neperiodică 1 și partea periodică 6.

#### Trecerea de la o fracție zecimală finită sau infinită periodică la o fracție ordinată

**Exemplu:** a)  $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ;    b)  $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ;

c)  $1,1(6) = 1\frac{16-1}{90} = 1\frac{15}{90} = 1\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$  sau  $1,1(6) = \frac{116-11}{90} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$ .

**Teorema.** O fracție ireductibilă se transformă în fracție zecimală periodică simplă, dacă numitorul ei descompus în factori primi nu conține nici factorul 2, nici factorul 5.

Dacă numitorul ei conține cel puțin unul dintre factorii 2 sau 5, dar și factori primi diferenți de 2 și 5, atunci fracția se transformă în fracție zecimală periodică mixtă, având la partea neperiodică  $m$  cifre, unde  $m$  este cel mai mare dintre exponenții lui 2 și 5.

### *Exerciții propuse*

1. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:
    - a)  $x = \frac{1}{2}$ ;
    - b)  $x = \frac{1}{5}$ ;
    - c)  $x = \frac{1}{20}$ ;
    - d)  $x = \frac{1}{2^4 \cdot 5^3}$ .
  2. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală infinită periodică:
    - a)  $x = \frac{1}{3}$ ;
    - b)  $x = \frac{1}{7}$ ;
    - c)  $x = \frac{1}{6}$ ;
    - d)  $x = \frac{1}{3 \cdot 5^2}$ .
  3. Pentru fracțiile zecimale periodice următoare să se găsească numărul rațional pe care îl reprezintă și să se verifice apoi prin algoritmul de împărțire că se obține fracția zecimală inițială:
    - a) 0,(142857);
    - b) 0,1(6);
    - c) -4,14(857142).
  4. Dați exemple de numere reale care nu se pot reprezenta sub formă de fracție zecimală periodică.
  5. Fie  $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ , scrierea zecimală a numărului  $\frac{1}{7}$ . Să se determine  $a_{2008}$ .
  6. Scrierea zecimală a numărului  $\frac{1}{13}$  este  $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ . Să se determine  $a_{2008}$ .
  7. a) Să se arate că, dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $a + b\sqrt{2} = 0$ , atunci  $a = b = 0$ .  
 b) Fie  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$ . Demonstrați că există  $x \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $(a + b\sqrt{2})x + (c + d\sqrt{2}) = 0$  dacă și numai dacă  $ad = bc$ .
  8. Demonstrați că numărul  $A = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$  este rațional, unde  $x, y, z$  sunt numere raționale diferite două câte două.
- (O.M. 2004, Arad)
9. Fie  $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ , scrierea zecimală a numărului  $\frac{1}{11}$ . Să se determine  $a_{2008}$ .
  10. Fie  $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ , scrierea zecimală a numărului  $\frac{11}{13}$ .
    - a) Determinați  $a_{2008}$ .
    - b) Determinați suma  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2008}$ .
  11. Fie  $\overline{1, a_1 a_2 a_3 \dots}$ , scrierea zecimală a numărului  $\frac{16}{13}$ .

12. Numerele  $a$  și  $b$  satisfac egalitatea  $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$ . Să se găsească toate

valorile posibile ale expresiei  $\frac{3a-b}{a+5b}$ . (O.M. 1995, Rusia)

13. Numerele  $a$  și  $b$  satisfac egalitatea  $\frac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$ . Să se găsească toate valorile posibile ale expresiei  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ . (O.M. 1995, Rusia)

## 4. Multimea numerelor reale

Avem inclusiunea  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Multimea numerelor reale a apărut în istoria evoluției noțiunii de număr ca o oportunitate de rezolvare a unei ecuații de felul  $x^2 = 2$ , încât multimea numerelor raționale nu putea să conțină soluțiile acestei ecuații.

Numerele reale care nu sunt raționale de numesc **numere iraționale**.

**Exemple:**  $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \pi, \dots$  etc.

Multimea numerelor iraționale este  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Un **număr real**  $x$  este reprezentat de o scriere de forma:  $x = a_0.a_1a_2a_3\dots$ , unde  $a_0 \in \mathbb{Z}$ , iar  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sunt cifre din multimea  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

Pe multimea numerelor reale se definesc operațiile algebrice: **adunarea** și **înmulțirea**.

### Proprietățile algebrice ale lui $\mathbb{R}$ (axiomele adunării și înmulțirii)

1) Adunarea este asociativă și comutativă.

2) Există numărul real 0 (zero), astfel încât  $0 + x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

3) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , există numărul  $-x \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x + (-x) = 0$ .

( $-x$  se numește **opusul lui  $x$** ).

4) Înmulțirea este asociativă și comutativă.

5) Există numărul real 1, astfel încât  $1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

(**1 este element neutru** pentru înmulțire).

6) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , există numărul  $x^{-1}$  din  $\mathbb{R}$ , astfel încât  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

7) Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea, adică

$$x(y+z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

8) Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  este definită o relație de ordine, notată „ $\leq$ ”.

Așadar, dacă  $x, y, z \in \mathbb{R}$  și  $x \leq y, y \leq z$ , atunci  $x \leq z$ , iar  $x \leq y, y \leq x$ , atunci  $x = y$ .

9) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  avem  $x \leq y$  sau  $y \leq x$  (se mai spune că relația de ordine pe  $\mathbb{R}$  este **totală**).

10) Dacă  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $x \leq y$ , atunci  $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$ .

11) Dacă  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $x \leq y$ , atunci  $xz \leq yz$ , pentru orice  $z \in \mathbb{R}, z \geq 0$ .

12) Orice submulțime nevidă majorată  $C \subset \mathbb{R}$  admite un cel mai mic majorant (**axioma lui Cantor**).

Ca o consecință a proprietăților 1 – 12, se poate stabili următorul rezultat important, numit **proprietatea** (sau **axioma**) lui **Arhimede**.

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  există un număr întreg  $n$  unic, astfel încât  $n \leq x < n + 1$ . Acest număr este numit **partea întreagă** a lui  $x$  și este notat  $[x]$ .

**Exemplu:**  $[1,2] = 1, [1,99] = 1, [2] = 2, [-\pi] = -4, [-4,31] = -5$ .

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem  $x = [x] + \{x\}$ , unde  $\{x\}$  reprezintă **partea fracționară** a lui  $x$ .

Avem  $\{x\} \in [0, 1)$ .

**Exemplu:**  $\{1,2\} = 0,2; \{1,99\} = 0,99; \{2\} = 0; \{-\pi\} = 4 - \pi; \{-4,31\} = 0,69$ .

### Identitatea lui Hermite

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  au loc egalitățile:

a)  $[x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] = [2x];$

b)  $[x] + \left[ x + \frac{1}{3} \right] + \left[ x + \frac{2}{3} \right] = [3x];$

c)  $[x] + \left[ x + \frac{1}{4} \right] + \left[ x + \frac{2}{4} \right] + \left[ x + \frac{3}{4} \right] = [4x];$

d)  $[x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \left[ x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx], \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*$ .

**1.** Rezolvați ecuația:  $\left[ \frac{3x-1}{2} \right] + \left[ \frac{3x}{2} \right] = 13$ .

*Soluție.* Notăm  $\frac{3x-1}{2} = t$ . Rezultă  $x = \frac{2t+1}{3}$ . Ecuația se scrie  $[t] + \left[ t + \frac{1}{2} \right] = 13$ .

Folosind identitatea lui Hermite, ecuația devine:  $[2t] = 13 \Leftrightarrow 2t \in [13, 14) \Leftrightarrow 3x - 1 \in [13, 14) \Leftrightarrow 3x \in [14, 15) \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{14}{3}, 5 \right)$ .

**2.** Rezolvați ecuația:  $\left[ \frac{2x-1}{3} \right] + \left[ \frac{2x}{3} \right] + \left[ \frac{2x+1}{3} \right] = \frac{x+1}{2}$ .

*Soluție.* Notând  $\frac{2x-1}{3} = t$ , ecuația devine  $[t] + \left[ t + \frac{1}{3} \right] + \left[ t + \frac{2}{3} \right] = \frac{3t+3}{4}$ . Cu

identitatea lui Hermite, ecuația este echivalentă cu  $[3t] = \frac{3t+3}{4}$ . Din  $3t - 1 < [3t] \leq 3t$  rezultă  $3t - 1 < \frac{3t+3}{4} \leq 3t \Leftrightarrow t \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{7}{9} \right)$ , (1).

Din  $[3t] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3t+3}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3t+3}{4} = k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{4k-3}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , (2).

Din (1) și (2) obținem  $k = 1$ , de unde  $t = \frac{1}{3}$  și, în final,  $x = 1$ .

### Proprietăți ale părții întregi

- 1) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  avem  $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$ .
- 2) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  avem  $[x + y] \geq [x] + [y]$ .
- 3) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și orice  $k \in \mathbb{Z}$  avem  $[k + x] = k + [x]$ .
- 4) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem:  $x - 1 < [x] \leq x$ .

### Proprietăți ale părții fraționare

- 1) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem  $0 \leq \{x\} < 1$ .
- 2) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și orice  $k \in \mathbb{Z}$  avem:  $\{k + x\} = \{x\}$ .