MARIN CHIRCIU

Matematică

algebră, geometrie, trigonometrie

Clasa a IX-a

- pentru pregătirea la clasă și bacalaureat -

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Iași - 2019

CUPRINS

TRIGONOMETRIE

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulţimi şi elemente de logică matematică

Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă şi prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale.

Numerele sunt un produs al inteligenţei omului, cu ajutorul cărora acesta percepe aspecte cantitative ale lumii înconjurătoare şi stabileşte relaţii de ordine între ele.

Noţiunea de număr s-a perfecţionat odată cu evoluţia omului. Astfel, au rezultat următoarele mulţimi de numere: numere naturale, numere întregi, numere raţionale, numere reale.

Pornind de la mulţimea numerelor naturale, pot fi construite toate celelalte mulţimi de numere.

Fundamentul acestei construcţii logice îl constituie teoria mulţimilor şi logica matematică.

1. **Mulţimea numerelor naturale** este:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Pe mulţimea numerelor naturale se definesc operaţiile algebrice: ***adunarea*** şi ***înmulţirea***. Aceste operaţii au următoarele proprietăţi:

1) ***comutativitatea***: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$;

2) ***asociativitatea***: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$;

3) ***existenţa elementului neutru***: $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall\ a \in \mathbb{N}$ (0 este element neutru pentru adunare);
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall\ a \in \mathbb{N}$ (1 este element neutru pentru înmulţire);

4) ***distributivitatea înmulţirii faţă de adunare***: $a(b + c) = ab + ac$, $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$.

Relaţia de ordine pe mulţimea numerelor naturale verifică ***principiul trihotomiei***: Două numere naturale a şi b sunt într-una şi numai într-una dintre relaţiile:

$$a < b \text{ sau } a = b \text{ sau } b < a.$$

Axioma lui Arhimede. Pentru două numere naturale oarecare a şi b, $a > 0$, există un număr natural n, astfel încât $a \cdot n > b$.

Exerciţii propuse

1. Fie $A=\left\{\overline{abc} \mid a\cdot b\cdot c=4\right\}$. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 3.

(Gheorghe Crăciun, Ploieşti)

2. Fie $A=\left\{\overline{abc} \mid \overline{abc}=a+10b+100c\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 5?

(Nicolae Stănică, Brăila)

3. Fie $A \subset \mathbb{N}$, o mulţime având simultan proprietăţile:

i) $1 \in \mathbb{N}$; ii) Dacă $x \in A$, atunci $3x \in A$; iii) Dacă $4x + 1 \in A$, atunci $x \in A$.

Demonstraţi că $\{0, 6, 180, 182\} \subset A$. (Marin Chirciu, Piteşti)

4. Suma a 10 numere naturale distincte este 62. Demonstraţi că produsul lor se divide cu 60. (Concursul „Simon Petru", Târgu-Mureş, 2004)

5. Pe o circumferinţă se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există două perechi formate din numere vecine, astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală cu 8.

(Olimpiada Naţională, 2005, Marin Chirciu)

6. a) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că orice număr de forma $10^{2n}-10^{2n-1}-10^{2n-2}$ se poate scrie sub forma $x^2+y^2+z^2$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, x, y, z – distincte.

(G.M. 5/2006, Daniel Cojocaru, Slatina)

b) Dacă $a \in \{5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^{2n}-a^{2n-1}-a^{2n-2}$ se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte nenule distincte.

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Piteşti)

7. Să se găsească cel mai mic număr nenul n, pentru care numărul 2000 divide numărul $n(n+1)(n+2)(n+3)$. (O.M. 2000, Rusia)

8. Să se găsească valoarea expresiei:

$E=1!\cdot 3-2!\cdot 4+3!\cdot 5-4!\cdot 6+\ldots-2001!\cdot 2002+2001!$ (O.M. 2001, Rusia)

9. Numerele naturale p, q şi r sunt astfel încât $p+q$, $q+r$ şi $r+p$ sunt prime. Să se arate că două dintre numerele p, q, r sunt egale.

(O.M. 1996, Rusia)

10. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuaţia: $x\cdot y^{2008}+y\cdot x^{2008}=1+(xy)^{2007}$.

(Concursul „Mihai Eminescu", Satu Mare, 2007, Traian Tămâian)

11. Rezolvați în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuația: $xy^n + yx^n = 1 + (xy)^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat.

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

12. a) Să se arate că numărul $n = 1001^{1003} + 1003^{1001}$ este divizibil cu 2004.

(G.M. 4/2007, Vasile Solovăstru, Feldru, Bistrița-Năsăud)

b) Să se arate că $4001^{4003} + 4003^{4001}$ se divide cu 8004.

c) Fie a, număr natural impar. Demonstrați că $a^{a+2} + (a+2)^a$ se divide cu $2(a+1)$.

(Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești)

2. Mulțimea numerelor întregi este:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc operațiile algebrice: ***adunarea*** și ***înmulțirea***. Proprietățile verificate de aceste operații în cazul numerelor naturale rămân valabile și pentru numere întregi. În plus, la acestea se mai adaugă și alte proprietăți:

5) ***existența elementului opus***: Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ există elementul $-a \in \mathbb{Z}$ (numit ***opusul lui a***), cu proprietatea:

$$a + (-a) = -a + a = 0.$$

Exerciții propuse

1. Să se găsească toate numerele n cu proprietatea că $n^2 + 2$ este divizibil cu $n + 1$.
2. Arătați că, dacă suma pătratelor a două numere întregi se divide cu 7, atunci fiecare dintre aceste numere se divide cu 7.
3. Arătați că, pentru $k \in \mathbb{Z}$, avem $\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k \in \mathbb{Z}$.
4. Determinați elementele mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Fie mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^{10} + 3}{2x^2} \in \mathbb{Z} \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^{10} + 2}{3x^2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

   Arătați că $A = B$.
6. Rezolvați în numere întregi sistemul: $\begin{cases} xy + z = 94 \\ x + yz = 95 \end{cases}$.

   (O.M. 1994, Rusia)
7. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat. Rezolvați în numere întregi sistemul: $\begin{cases} xy + z = 3n + 1 \\ x + yz = 3n + 2 \end{cases}$.

   (Dezvoltare, Marin Chirciu, Pitești)

8. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât ab şi $(a + 1)(b - 1)$ sunt numere consecutive. Să se arate că $ab + 1$ este pătrat perfect.

(O.M. 2007, Satu Mare, Ovidiu Pop)

9. a) Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia: $x^2y^2 - 2003x = 2003$.

(G.M. 6/2007, Daniel Stretcu şi Eduard Gabriel Băzăvan, Drobeta Turnu Severin)

b) Fie p, număr prim fixat. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia:

$$x^2y^2 - (p-1)x = p.$$

(Dezvoltare, Marin Chirciu)

3. Mulţimea numerelor raţionale este:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Orice număr raţional poate fi scris în două moduri:

- sub formă de fracţie ordinară (ca raport de două numere întregi);
- sub formă de fracţie zecimală (finită sau infinită periodică).

Trecerea de la o fracţie ordinară la o fracţie zecimală

Aplicând algoritmul de împărţire a numerelor naturale, putem trece de la o fracţie ordinară $\frac{a}{b}$ la o fracţie zecimală (finită sau infinită, periodică simplă sau mixtă).

Exemple: a) $\frac{3}{5} = 0,6$; b) $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$; c) $\frac{7}{6} = 1,1666... = 1,1(6)$.

În cazul a) avem o fracţie zecimală ***finită***; în cazul b) avem o fracţie zecimală infinită ***periodică simplă***, cu perioada 3; în cazul c) avem o fracţie zecimală infinită ***periodică mixtă***, cu partea neperiodică 1 şi partea periodică 6.

Trecerea de la o fracţie zecimală finită sau infinită periodică la o fracţie ordinară

Exemple: a) $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; b) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$;

c) $1,1(6) = 1\frac{16-1}{90} = 1\frac{15}{90} = 1\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ sau $1,1(6) = \frac{116-11}{90} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$.

Teoremă. O fracţie ireductibilă se transformă în fracţie zecimală periodică simplă, dacă numitorul ei descompus în factori primi nu conţine nici factorul 2, nici factorul 5.

Dacă numitorul ei conţine cel puţin unul dintre factorii 2 sau 5, dar şi factori primi diferiţi de 2 şi 5, atunci fracţia se transformă în fracţie zecimală periodică mixtă, având la partea neperiodică *m* cifre, unde *m* este cel mai mare dintre exponenţii lui 2 şi 5.

Exerciții propuse

1. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală:

a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{1}{5}$; c) $x = \frac{1}{20}$; d) $x = \frac{1}{2^4 \cdot 5^3}$.

2. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală infinită periodică:

a) $x = \frac{1}{3}$; b) $x = \frac{1}{7}$; c) $x = \frac{1}{6}$; d) $x = \frac{1}{3 \cdot 5^2}$.

3. Pentru fracţiile zecimale periodice următoare să se găsească numărul raţional pe care îl reprezintă şi să se verifice apoi prin algoritmul de împărţire că se obţine fracţia zecimală iniţială:

a) 0,(142857); b) 0,1(6); c) − 4,14(857142).

4. Daţi exemple de numere reale care nu se pot reprezenta sub formă de fracţie zecimală periodică.

5. Fie $\overline{0,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Să se determine a_{2008}.

6. Scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{13}$ este $\overline{0,a_1a_2a_3...}$. Să se determine a_{2008}.

7. a) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a + b\sqrt{2} = 0$, atunci $a = b = 0$.

b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$. Demonstraţi că există $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât

$\left(a + b\sqrt{2}\right)x + \left(c + d\sqrt{2}\right) = 0$ dacă şi numai dacă $ad = bc$.

8. Demonstraţi că numărul $A = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$ este raţional, unde x, y, z sunt numere raţionale diferite două câte două.

(O.M. 2004, Arad)

9. Fie $\overline{0,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{11}$. Să se determine a_{2008}.

10. Fie $\overline{0,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{11}{13}$.

a) Determinaţi a_{2008}. b) Determinaţi suma $a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$.

11. Fie $\overline{1,a_1a_2a_3...}$, scrierea zecimală a numărului $\frac{16}{13}$.

a) Determinați a_{2008}. b) Calculați suma $a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$.

12. Numerele a şi b satisfac egalitatea $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Să se găsească toate valorile posibile ale expresiei $\frac{3a-b}{a+5b}$. (O.M. 1995, Rusia)

13. Numerele a şi b satisfac egalitatea $\frac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$. Să se găsească toate valorile posibile ale expresiei $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. (O.M. 1995, Rusia)

4. Mulţimea numerelor reale

Avem incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Mulţimea numerelor reale a apărut în istoria evoluţiei noţiunii de număr ca o oportunitate de rezolvare a unei ecuaţii de felul $x^2 = 2$, întrucât mulţimea numerelor raţionale nu putea să conţină soluţiile acestei ecuaţii.

Numerele reale care nu sunt raţionale de numesc ***numere iraţionale***.

Exemple: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π, ... etc.

Mulţimea numerelor iraţionale este $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Un ***număr real*** x este reprezentat de o scriere de forma: $x = a_0, a_1a_2a_3...$, unde $a_0 \in \mathbb{Z}$, iar a_1, a_2, a_3, ... sunt cifre din mulţimea $\{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Pe mulţimea numerelor reale se definesc operaţiile algebrice: ***adunarea*** şi ***înmulţirea***.

Proprietăţile algebrice ale lui $\mathbb{R}$ (axiomele adunării şi înmulţirii)

1) Adunarea este asociativă şi comutativă.
2) Există numărul real 0 (zero), astfel încât $0 + x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există numărul $-x \in \mathbb{R}$, astfel încât $x + (-x) = 0$.
   ($-x$ se numeşte ***opusul lui x***).
4) Înmulţirea este asociativă şi comutativă.
5) Există numărul real 1, astfel încât $1 \cdot x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (**1 *este element neutru*** pentru înmulţire).
6) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, există numărul x^{-1} din $\mathbb{R}$, astfel încât $x \cdot x^{-1} = 1$.
7) Înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea, adică
   $x(y+z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Proprietăţile de ordine ale lui $\mathbb{R}$ (axiomele de ordine)

8) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ este definită o relaţie de ordine, notată „$\leq$".

Aşadar, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$, $y \leq z$, atunci $x \leq z$, iar $x \leq y$, $y \leq x$, atunci $x = y$.

9) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (se mai spune că relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este ***totală***).

10) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

11) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \leq y$, atunci $xz \leq yz$, pentru orice $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$.

12) Orice submulţime nevidă majorată $C \subset \mathbb{R}$ admite un cel mai mic majorant (***axioma lui Cantor***).

Ca o consecinţă a proprietăţilor 1 – 12, se poate stabili următorul rezultat important, numit ***proprietatea*** (sau ***axioma***) lui ***Arhimede***.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un număr întreg n unic, astfel încât $n \leq x < n + 1$. Acest număr este numit ***partea întreagă*** a lui x şi este notat $[x]$.

Exemple: $[1{,}2] = 1$, $[1{,}99] = 1$, $[2] = 2$, $[-\pi] = -4$, $[-4{,}31] = -5$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $x = [x] + \{x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă ***partea fracţionară*** a lui x.

Avem $\{x\} \in [0, 1)$.

Exemple: $\{1{,}2\} = 0{,}2$; $\{1{,}99\} = 0{,}99$; $\{2\} = 0$; $\{-\pi\} = 4 - \pi$; $\{-4{,}31\} = 0{,}69$.

Identitatea lui Hermite

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc egalităţile:

a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$;

b) $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$;

c) $[x] + \left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x + \frac{2}{4}\right] + \left[x + \frac{3}{4}\right] = [4x]$;

d) $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rezolvați ecuația: $\left[\frac{3x-1}{2}\right]+\left[\frac{3x}{2}\right]=13$.

Soluție. Notăm $\frac{3x-1}{2}=t$. Rezultă $x=\frac{2t+1}{3}$. Ecuația se scrie $[t]+\left[t+\frac{1}{2}\right]=13$. Folosind identitatea lui Hermite, ecuația devine: $[2t] = 13 \Leftrightarrow 2t \in [13, 14) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x - 1 \in [13, 14) \Leftrightarrow 3x \in [14, 15) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{14}{3}, 5\right)$.

2. Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]+\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{x+1}{2}$.

Soluție. Notând $\frac{2x-1}{3}=t$, ecuația devine $[t]+\left[t+\frac{1}{3}\right]+\left[t+\frac{2}{3}\right]=\frac{3t+3}{4}$. Cu identitatea lui Hermite, ecuația este echivalentă cu $[3t]=\frac{3t+3}{4}$. Din $3t - 1 <$ $< [3t] \leq 3t$ rezultă $3t-1<\frac{3t+3}{4}\leq 3t \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right)$, (1).

Din $[3t] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3t+3}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3t+3}{4}=k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t=\frac{4k-3}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, (2).

Din (1) și (2) obținem $k = 1$, de unde $t=\frac{1}{3}$ și, în final, $x = 1$.

Proprietăți ale părții întregi

1) Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

2) Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$ avem $[x + y] \geq [x] + [y]$.

3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $k \in \mathbb{Z}$ avem $[k + x] = k + [x]$.

4) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem: $x - 1 < [x] \leq x$.

Proprietăți ale părții fracționare

1) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $0 \leq \{x\} < 1$.

2) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $k \in \mathbb{Z}$ avem: $\{k + x\} = \{x\}$.