Valentin Vornicu

Olimpiada de Matematică

de la provocare la experienţă

Biblioteca Olimpiadelor de Matematică

Editura GIL

Cuprins

Algebră

Tehnici de abordare

De obicei cele mai abordabile probleme la un examen sunt cele de algebră. De ce este aşa, nu vă pot spune. Dar cu siguranţă trebuie să încercaţi să valorificaţi cât mai mult aceste tipuri de probleme.

Pentru inegalităţi există foarte multe tehnici - însă trebuie să reţineţi câteva de bază. În articolul [21] subliniez patru metode foarte folosite şi anume: inegalitatea Cauchy-Schwartz, inegalităţile generate de studierea semnului trinomului de gradul II, inegalităţi--le lui Jensen, legate de proprietăţi ale unor funcţii anume şi nu în ultimul rând, ceva mai neobişnuit în România, metoda de calcul direct sau *straightforward* cum o numesc americanii. Cu toate acestea sunteţi obişnuiţi, şi puteţi găsi destule referinţe în [1], [2], [22], [23], [24], [25], [26] precum şi în alte materiale.

O nouă metodă, "la modă" acum printre subiectele de olimpiadă din alte ţări sunt problemele care folosesc inegalitatea lui *Schur*. O generalizare a acesteia reprezintă problema 6. La început nu se întrevăd aplicaţiile acestei inegalităţi, foarte puţin folosită şi cunoscută la noi; dar totuşi ele nu întârzie să apară: probleme ca 7, 10, 12, 14 îşi găsesc rezolvarea cu ajutorul inegalităţii lui Schur, uneori într-un mod neaşteptat de cititor.

Un alt sfat este următorul: încercaţi să folosiţi cât mai puţine abordări de tipul Sturm sau metoda de interpolare a lui Lagrange. Aceste metode "analitice" au darul de a oferi concurentului o soluţie, calculatorie, la care nu mai trebuie să-şi folosească mintea. Un concurent mai citit va încerca aceste metode după ce nu a reuşit să doboare problema repede; rezultatul: de foarte puţine ori favorabil, în marea majoritate a timpului este un punctaj rotund, adică 0.

Se poate pierde extrem de mult timp încercând o astfel de abordare - care pe lângă şansele de mici reuşită, mai necesită şi o atenţie specială la redactare, şi deci pierderi de timp şi energie considerabile, afectând, negativ, rezultatul concursului.

Am trecut în continuare cele mai importante inegalităţi pe care le puteţi folosi la olimpiadă fără a mai preciza şi demonstraţia. Puteţi încerca să le demonstraţi, căci a şti demonstraţiile la inegalităţile celebre nu poate decât să fie de ajutor.

- CAUCHY-SCHWARZ. Pentru orice numere reale $a_i, b_i, i \in \overline{1,n}$ avem

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

- CAUCHY - BUNIAKOWSKY. Pentru orice numere reale strict pozitive $a_i, b_i, i \in \overline{1,n}$

avem

$$\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

Observație: Această inegalitate de fapt este o derivată a primei, aplicând-o pentru numerele $\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$ și $\sqrt{a_i \cdot b_i}$

- HÖLDER. Pentru numerele reale $a_i, b_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ și $p, q > 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ avem următoarea inegalitate

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n| \leq (|a_1|^p+\cdots+|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|b_1|^q+\cdots+|b_n|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Observație: Inegalitatea Cauchy-Schwarz se obține din inegalitatea lui Hölder pentru $p=q=2$.

- INEGALITATEA MEDIILOR. Pentru orice numere reale strict pozitive $a_i, b_i, i \in \overline{1,n}$ avem

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

- INEGALITATEA MEDIILOR GENERALIZATĂ. Pentru orice numere strict reale pozitive $a_i, i \in \overline{1,n}$, și orice numere reale $p \geq q$ avem

$$\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{a_1^q+a_2^q+\cdots+a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

- CEBÂȘEV. Pentru orice două șiruri $(a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq n}$, de numere reale la fel (invers) ordonate avem următoarea inegalitate:

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \underset{(\leq)}{\geq} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$$

- BERNOULLI. Pentru orice număr natural n, și orice număr real a, cu $a > -1$ avem

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Observație: Această inegalitate se mai poate pune și sub forma $(1+a)^{\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}a$.

- MINKOWSKI. Pentru orice numere reale $a_i, b_i, i \in \overline{1,n}$ avem

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2}$$

- INEGALITATEA RE-ARANJAMENTELOR. Fie $(a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq n}$, de numere rea--le la fel ordonate, iar şirul (c_i) este format din numerele b_i, eventual în altă ordine. Atunci avem

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

Un exemplu de folosire a acestei ultimei inegalităţi este problema următoare:

- Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numerele naturale distincte. Să se arate că:

$$a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

SOLUŢIE. Fie b_i numerele a_i aşezate în ordine crescătoare. Cum b_i sunt numere naturale distincte, avem $b_1 \geq 1 \Rightarrow b_2 \geq 2 \Rightarrow b_k \geq k$, pentru orice $1 \leq k \leq n$. Pentru că $1 > \frac{1}{2^2} > \cdots > \frac{1}{n^2}$, din inegalitatea re-aranjamentelor deducem că

$$a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq b_1 + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{3^2} + \cdots + \frac{b_n}{n^2} \geq 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

care este chiar inegalitatea cerută.

Trecând mai departe la şiruri, de multe ori este necesară determinarea termenului general al unui şir exprimat recursiv. Pentru o recurenţă care depinde numai de ultimul, sau de ultimii doi termeni aflaţi există metode clasice şi simple, care se folosesc de ecuaţia caracteristică.

Să luăm exemplu. Dacă $a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n$, pentru orice n, atunci putem să considerăm ecuaţia caracteristică a şirului respectiv $r^2 = xr + y$. Aceasta are două soluţii $r_{1,2}$. Dacă ele sunt distincte atunci şirul nostru are termenul general dat de

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

unde α, β sunt doi coeficienţi, ce vor fi determinaţi în funcţie de termenii şirului daţi, de obicei primii doi.

Dacă nu sunt distincte atunci şirul are termenul general de forma:

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta n r_1^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mai mult această metodă se poate extinde la orice recurenţă liniară de ordin k. Problema majoră pentru $k \geq 3$ este găsirea tuturor soluţiilor ecuaţiei caracteristice (care în acest caz este de gradul k).

Printre alte metode se încadrează folosirea şirurilor auxiliare pentru determinarea termenului general. Un bun exemplu îl constituie problema 57, funcţiile generatoare - despre care puteţi citi în [3], inducţia matematică - iarăşi un articol bun se găseşte în [3].

La funcţii trebuie ştiute câteva ecuaţii funcţionale de bază, cum ar fi ecuaţia funcţio--nală a lui Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Această ecuaţie apare în foarte multe probleme. Cunoaşterea ei se dovedeşte un avantaj, chiar şi la Olimpiada Internaţională - spre exemplu problema 5 din anul 2002 care sună astfel:

- Să se determine toate funcţile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia:

$$(f(x) + f(y)) + (f(z) + f(t)) = f(xz - yt) + f(xz + yt), \quad \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

Nu voi expune aici soluţia acestei probleme, ea putând fi găsită în articolul [6]. Cert este că la un moment dat se ajunge exact la ecuaţia lui Cauchy. Soluţia generală a ecuaţiei este $f(x) = f(1)x$, pentru orice număr raţional x, iar dacă nu se mai dă o condiţie în plus, una dintre f crescătoare, continuă într-un punct, pozitivă pe numere pozitive (de aici se deduce că f este crescătoare), atunci folosind faptul că pentru orice număr real există două şiruri de numere raţionale care converg la el, unul strict crescător şi unul strict descrescător (pentru un număr iraţional acestea sunt chiar aproximările sale cu un anumit număr de zecimale) putem deduce că $f(x) = f(1)x$ pentru orice x real. O altă problemă care este în legătură este problema 81.

Un alt lucru foarte important, pe care echipa României care a participat la Olimpiada Internaţională din Scoţia 2002 l-a neglijat, a fost *verificarea soluţiilor ecuaţiei funcţionale.* Astfel s-au pierdut 6 puncte, care au însemnat o cădere de 2 locuri în clasamentul neoficial pe naţiuni, şi chiar pierderea unei medalii de aur.

Despre polinoame, pe lângă celebra Teoremă a lui Bézout, noţiunile fundamentale de divizibilitate, precum şi relaţiile lui Viète, am descoperit că un procedeu foarte folositor poate fi studierea rădăcinilor sale. Astfel dacă dintr-o relaţie putem găsi un şir definit recurent ai cărui termeni sunt rădăcini ale unui polinom (eventual definit de noi), şi dacă putem demonstra că toţi termenii şirului sunt diferiţi atunci polinomul este polinomul nul. O problemă care se bazează pe această tehnică este problema 88.

Deasemenea alte exerciţii des întâlnite sunt cele referitoare la ireductibilitatea polinoamelor cu coeficienţi întregi. Există câteva teoreme folositoare, şi precizăm mai jos câteva dintre ele:

- CRITERIUL LUI EISENSTEIN. Fie $f \in \mathbb{Z}[X], f(x) = a_n x_n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinom cu coeficienţi întregi, şi p un număr prim astfel încât $p|a_i$, pentru toţi indicii i cu $0 \leq i \leq n-1, p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0$. Atunci dacă cel mai mare divizor al coeficienţilor a_i este 1, polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

- CRITERIUL LUI SCHONEMANN. Fie $p \geq 2$ un număr prim, iar $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom monic (având coeficientul dominant egal cu 1) de forma $f(x) = g^n(x) + ph(x)$, unde $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ sunt două polinoame. Dacă g este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$ şi redusul lui $g, \overline{g}$, nu îl divide pe redusul lui $h, \overline{h}$, în $\mathbb{Z}_p[X]$ atunci f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

  Aplicaţii la aceste două criterii se pot găsi în [27], iar alte două criterii frumoase sunt date de problemele 80 şi 90.

Probleme de algebră

Inegalităţi

1. Să se arate că oricare ar fi numerele reale strict pozitive x, y, z avem:

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z$$

2. Arătaţi că în orice triunghi ABC avem:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{2}{R}$$

unde h_a, h_b, h_c reprezintă lungimile înălţimilor triunghiului, iar R raza cercului circumscris triunghiului.

3. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci are loc următoarea inegalitate:

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$$

4. Demonstraţi că:

$$\frac{1}{2003} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2001}{2002} < \frac{1}{44}$$

5. Să se arate că într-un triunghi ABC avem inegalitatea:

$$p^2 \geq 3r^2 + 12Rr$$

unde p, r, R sunt respectiv semiperimetrul, raza cercului înscris şi raza cercului circumscris triunghiului.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ şi $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

$$f(a)(a-b)(a-c) + f(b)(b-c)(b-a) + f(c)(c-a)(c-b) \geq 0$$

în fiecare din cazurile

a) f este crescătoare;

b) f este convexă.

7. Să se demonstreze că pentru orice numere reale pozitive avem:

$$xy(y-z)(z-x) + yz(z-x)(x-y) + xz(x-y)(y-z) \leq 0$$

8. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive cu suma 1. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \geq \frac{1}{2}$$

9. Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$ şi $ab + bc + ca = abc$ atunci:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} \geq \frac{3}{2}$$

10. Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci are loc:

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)$$

11. Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, c cu produsul 1, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1$$

12. Să se arate că oricare ar fi a, b, c avem:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

13. Să se arate că pentru orice numere strict pozitive x, y, z avem:

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \leq \frac{9}{4(x+y+z)}$$

14. Demonstraţi că dacă A, B, C sunt măsurile unghiurilor unui triunghi, atunci urmă--toarea inegalitate are loc:

$$\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \geq \sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{3B}{2} + \sin\frac{3C}{2}$$

15. Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc:

$$a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab} \leq (a+b+c)^2$$

16. Să se arate că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

17. Fie un triunghi ABC de perimetru $2p$. Să se arate că:

$$p\sqrt{3} \geq l_a + l_b + l_c$$

unde l_a, l_b şi l_c sunt lungimile bisectoarelor interioare ale triunghiului.

18. Fie $x_i \geq 1, i = \overline{1,n}$, numere reale. Să se arate că:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

19. Arătaţi că dacă n numere pozitive x_i au suma $n, n \in \mathbb{N}^*$ atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i^2}$$

20. Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cinci numere reale astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$. Să se arate că:

$$\min_{1\leq i<j\leq 5} (a_i - a_j)^2 \leq \frac{1}{10}$$

21. Fie x, y, z numere reale. Demonstraţi că:

$$(-x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2) \geq (-x+y+z)^2(x-y+z)^2(-x+y+z)^2$$

22. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale strict pozitive. Să se arate că:

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geq \left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_1}\right).$$

23. Fie $n \geq 4$ un număr întreg şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive astfel încât:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1.$$

Demonstraţi că:

a) $\dfrac{1}{4} \geq a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + \cdots + a_{n-1}^2 a_n^2 + a_n^2 a_1^2$;

b) $\dfrac{a_1}{a_2^2+1} + \dfrac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_1^2+1} \geq \dfrac{4}{5}(a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + \cdots + a_n\sqrt{a_n})^2$.

24. Să se arate că pentru orice $a, b, c, x, y, z > 0$ avem:

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

25. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Să se arate că:

$$2 \leq (1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 \leq (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

26. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale pozitive, cu $n \geq 2$ atunci:

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1)(a_2^2 a_3 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1).$$

27. Fie $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$. Să se arate că:

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_{n+1} x_{n+2}} \leq n - 1.$$

28. Numerele reale a, b, c, x, y, z sunt alese în aşa fel încât: $a \geq b \geq c > 0$ şi $x \geq y \geq z > 0$. Demonstraţi că:

$$\frac{a^2 x^2}{(by + cz) + (bz + cy)} + \frac{b^2 y^2}{(cz + ax) + (cx + az)} + \frac{c^2 z^2}{(ax + by) + (ay + bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

29. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Să se arate că:

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

30. Demonstraţi că pentru numerele naturale $a < b < c < d$ care satisfac relaţia: $ad = bc$, este valabilă următoarea inegalitate:

$$\left(\frac{a - d}{2}\right)^2 \geq a + 2.$$