MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Constantin Năstăsescu
Constantin Niţă
Ion Chiţescu
Dan Mihalca

Matematică

Trunchi comun şi curriculum diferenţiat

Manual pentru clasa a IX - a

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ S.A.

CUPRINS

ALGEBRĂ

GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

Prof. univ. dr. CONSTANTIN NĂSTĂSESCU
Membru coresp. al Academiei Române

Prof. univ. dr. CONSTANTIN NIȚĂ

ALGEBRĂ

I. NUMERE REALE. ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA CU RĂDĂCINI REALE

II. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. INDUCȚIE MATEMATICĂ

III. MULȚIMI. FUNCȚII. FUNCȚIA DE GRADUL ÎNTÂI

IV. PROGRESII

V. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

1 NUMERE REALE. ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA CU RĂDĂCINI REALE

§1. Numere raționale. Reprezentarea numerelor raționale sub formă de fracții zecimale (periodice)

1.1. Noțiuni preliminarii

În clasele anterioare a apărut necesitatea extinderii mulțimilor de numere naturale, respectiv întregi.

Astfel, în gimnaziu s-a impus necesitatea extinderii mulțimilor numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, de exemplu pentru a putea rezolva ecuații de forma $m + x = n$, cu m și n numere naturale, obținându-se mulțimea $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, a numerelor întregi. Apoi s-a extins și mulțimea numerelor întregi, de exemplu pentru a putea rezolva ecuații de forma $qx = p$, cu p și q numere întregi, și $q \neq 0$, obținându-se mulțimea $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ a numerelor raționale. S-au definit de asemenea, operații cu numere raționale și s-a introdus reprezentarea zecimală a numerelor raționale, impusă în special de probleme de natură practică.

În practică se folosește, de obicei, reprezentarea (scrierea) numerelor raționale sub formă de fracții zecimale.

Așa cum este cunoscut din aritmetică, cu ajutorul algoritmului de împărțire orice număr rațional nenegativ $\frac{m}{n}$ $(m \geqslant 0,\ n > 0)$ se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite sau infinite (adică, cu o infinitate de zecimale). Astfel în loc de $\frac{1}{4}$ se scrie 0,25; în loc de $\frac{5}{8}$ se scrie 0,625; în loc de $\frac{1}{3}$ se scrie 0,333… Deoarece avem de-a face atât cu fracții zecimale finite, cât și cu fracții zecimale infinite, pentru uniformizare, se pot adăuga la dreapta fracției zecimale o infinitate de zerouri.

De exemplu: $\frac{1}{4} = 0{,}25000\ldots$; $\frac{5}{8} = 0{,}625000\ldots$.

Astfel putem spune că toate fracțiile zecimale sunt infinite.

Numerele întregi se reprezintă, evident, ca fracții zecimale cu o infinitate de zerouri după virgulă.

De exemplu: $5 = 5{,}000\ldots$; $13 = 13{,}000\ldots$.

Aşadar, orice număr raţional nenegativ $\frac{m}{n}$ poate fi reprezentat sub forma unei fracţii zecimale infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1a_2a_3\dots .$$

Numărul a_0 este *partea întreagă* a lui $\frac{m}{n}$, iar numărul $0, a_1a_2a_3\dots$ este *partea fracţionară* a sa. Numerele $a_1, a_2, a_3,\dots$ sunt cuprinse între 0 şi 9, adică $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, pentru $i = 1, 2, 3, \dots$.

Observăm acum că şi numerele raţionale negative au o astfel de reprezentare. Vom nota partea întreagă a unui număr negativ cu semnul minus deasupra. Astfel numărul $-\frac{5}{2} = -3 + \frac{1}{2}$ se poate scrie sub forma $\bar{3}, 5000\dots$.

Analog, $-0{,}321 = \bar{1}{,}679000\dots$;

$$-25\frac{2}{3} = -25{,}666\ldots = -26 + \frac{1}{3} = \overline{26}{,}333\ldots$$

În acest mod, orice număr raţional (negativ, pozitiv sau zero) se reprezintă sub forma unei fracţii infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1a_2a_3\dots \tag{1}$$

unde a_0 este partea întreagă a lui $\frac{m}{n}$, iar $0, a_1a_2a_3\dots$ este partea fracţionară (zecimală) a sa (a_0 este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3, \dots$ sunt numere cuprinse între 0 şi 9).

Partea fracţionară $0, a_1a_2a_3\dots$ din reprezentarea (1) a oricărui număr raţional este un număr pozitiv mai mic decât 1. Reprezentarea numerelor raţionale negative sub formă de fracţie zecimală infinită, cu partea întreagă număr negativ (iar partea fracţionară un număr pozitiv) o vom face cu sopul de a uniformiza în continuarea acestui capitol studiul numerelor reale (pozitive şi negative).

Observaţie. Scrierea numerelor negative sub forma indicată mai înainte se întâlneşte în practică la calculul cu logaritmi.

1.2. Fracţii zecimale periodice

Să vedem acum care sunt fracţiile zecimale prin care se reprezintă numerele raţionale. Mai întâi să definim fracţia zecimală periodică.

Definiție. *O fracție zecimală infinită $a_0, a_1a_2a_3...$ se numește periodică, dacă există numerele naturale k și p astfel încât $a_{n+p} = a_n$, pentru orice $n \geqslant k$.*

O fracție zecimală periodică se notează, pe scurt, prin

$$a_0, a_1a_2...a_{k-1}(a_ka_{k+1} \dots a_{k+p-1}).$$

Mulțimea cifrelor scrise (în această ordine) în paranteză se numește *perioada fracției zecimale.* Dacă $k = 1$, adică perioada începe imediat după virgulă, avem de-a face cu o *fracție zecimală periodică simplă*; în caz contrar avem de-a face cu o *fracție zecimală periodică mixtă.*

În exemplele numerice de mai înainte fracțiile zecimale sunt periodice. Astfel, pentru 0,333 ... avem $k = 1$, $p = 1$ și $a_{n+1} = a_n = 3$ pentru orice $n \geqslant 1$. Scriem $0,333... = 0,(3)$, aceasta fiind o fracție zecimală periodică simplă. Fracțiile zecimale finite, care după cum am observat pot fi considerate ca fracții zecimale infinite (prin adăugare de zerouri) sunt periodice. De exemplu, pentru 0,25000... avem $k = 3$, $p = 1$ și $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geqslant 3$; iar pentru 0,625000... avem $k = 4$, $p = 1$, $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geqslant 4$. Deci $0,25000... = 0,25(0)$, iar $0,625000... = 0,625(0)$. Așadar acestea sunt fracții zecimale periodice mixte. În sfârșit, fracția $\overline{15},723434 \dots$ este periodică și se scrie, pe scurt, $\overline{15},72(34)$.

Am observat că reprezentarea unui număr rațional sub formă de fracție zecimală se obține cu ajutorul algoritmului de împărțire. Să considerăm, de exemplu, numerele $\frac{5}{33}$ și $\frac{19}{55}$. Avem:

Exemplul 1

$$\begin{array}{l|l}
5 & 33 \\ \hline
50 & 0,15... \\
33 & \\ \cline{1-1}
170 & \\
165 & \\ \cline{1-1}
5 &
\end{array}$$

Exemplul 2

$$\begin{array}{l|l}
19 & 55 \\ \hline
190 & 0,345... \\
165 & \\ \cline{1-1}
250 & \\
220 & \\ \cline{1-1}
300 & \\
275 & \\ \cline{1-1}
25 &
\end{array}$$

Fiecare număr de după virgulă se obține printr-o împărțire parțială:

$$\begin{array}{l|l}
50 & 33 \\ \cline{2-2}
33 & 1 \\ \hline
17 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
170 & 33 \\ \cline{2-2}
165 & 5 \\ \hline
5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
190 & 55 \\ \cline{2-2}
165 & 3 \\ \hline
25 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
250 & 55 \\ \cline{2-2}
220 & 4 \\ \hline
30 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
300 & 55 \\ \cline{2-2}
275 & 5 \\ \hline
25 &
\end{array}$$

Exemplul 1 ***Exemplul 2***

Fiecare deîmpărțit parțial se deduce din restul precedent prin adăugarea unui zero la dreapta sa, adică mărindu-l de zece ori. Ori resturile parțiale sunt toate mai mici decât împărțitorul. După un număr finit de operații parțiale se regăsește deci, ori deîmpărțitul inițial (exemplul 1), ori un rest deja întâlnit (exemplul 2). De la acest pas putem să nu mai continuăm împărțirea, deoarece în câtul împărțirii lui 5 la 33, respectiv în câtul împărțirii lui 19 la 55, cifrele se vor repeta. De aceea,

$$\frac{5}{33} = 0,(15); \ \frac{19}{55} = 0,3(45).$$

În general, avem:

Teorema 1. Orice număr rațional se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică, care nu are perioada (9).

Demonstrație. Dacă a este un număr rațional oarecare, atunci $a = a_0 + a'$, unde a_0 este un număr întreg (partea întreagă a lui a), iar a' este un număr rațional nenegativ mai mic decât 1. Dacă a' se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică, care nu are perioada (9), atunci a se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică care nu are perioada (9), în care partea întreagă este a_0, iar partea fracționară îl reprezintă pe a'. Așadar, pentru demonstrația teoremei este suficient să considerăm numai numere raționale $\frac{m}{n}$, astfel încât $0 \leqslant \frac{m}{n} < 1$. Fie deci $\frac{m}{n}$ $(m \geqslant 0, n > 0)$ un astfel de număr rațional. Prin algoritmul de împărțire a lui m la n sunt posibile resturile: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Deoarece resturile iau cel mult n valori, rezultă că după cel mult n pași ai algoritmului, se repetă unul din ele. Deci va rezulta o fracție zecimală periodică.

Se arată că nu este posibil ca fracția zecimală periodică asociată unui număr rațional să aibă perioada (9). Să presupunem, prin absurd, că fracția ar avea perioada (9). Atunci, prin algoritmul de împărțire, ajungem la un moment dat la un rest r astfel încât înmulțindu-l cu 10, și împărțindu-l la n, să se obțină un cât egal cu 9 și restul să fie, de asemenea, r. Deci după teorema împărțirii cu rest, avem: $10r = n \cdot 9 + r$, cu $r < n$.

De aici se obține $9r = 9n$, de unde $r = n$ ceea ce este în contradicție cu ipoteza $r < n$.

Observație. Fracțiile zecimale finite (adică de perioadă (0) se obțin atunci când prin algoritmul de împărțire se obține la un moment dat un rest egal cu zero. După aceasta toate resturile vor fi egale cu zero.

Împărțirile parțiale din exemplele precedente se scriu astfel:

Exemplul 1 $50 = 33 \cdot 1 + 17$; $170 = 33 \cdot 5 + 5$.

Înmulțind cu 10 prima relație, și folosind pe a doua avem $500 = (33 \cdot 1 + 17) \cdot 10 = 33 \cdot 10 + 170 = 33 \cdot 10 + (33 \cdot 5 + 5) = 33 \cdot 15 + 5$.

Deci $100 \cdot 5 = 33 \cdot 15 + 5$, adică 15 este câtul împărțirii lui $100 \cdot 5$ la 33.

Exemplul 2 $190 = 55 \cdot 3 + 25$; $250 = 55 \cdot 4 + 30$; $300 = 55 \cdot 5 + 25$.

Împărțind cu 100 prima relație și folosind pe următoarele două avem $19\,000 = (55 \cdot 3 + 25) \cdot 100 = 55 \cdot 300 + 250 \cdot 10 = 55 \cdot 300 + (55 \cdot 4 + 30) \cdot 10 = 55 \cdot 300 + 55 \cdot 40 + 300 = 55 \cdot 340 + 55 \cdot 5 + 25 = 55 \cdot 345 + 25$.

Prof. univ. dr. ION CHIȚESCU

Prof. gr. I DAN MIHALCA

GEOMETRIE

I. VECTORI ÎN PLAN

II. PARALELISM, COLINIARITATE, CONCURENȚĂ
(calcul vectorial în geometria plană)

III. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

IV. PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI. RELAȚII METRICE

V. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ

1 VECTORI ÎN PLAN

§1. Segmente orientate

În acest capitol toate punctele şi figurile geometrice vor fi considerate într-un plan fixat $\mathscr{P}$.

Fiind date două puncte $A, B \in \mathscr{P}$, $A \neq B$, putem vorbi despre următoarele figuri geometrice:

- dreapta care trece prin A şi B, notată AB sau BA;
- segmentul închis determinat de A şi B, notat $[AB]$ sau $[BA]$;
- segmentul deschis determinat de A şi B, notat (AB) sau (BA)

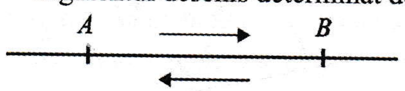


Fig. I.1

De asemenea, putem vorbi despre distanţa dintre A şi B, un număr real notat AB sau BA.

Segmentul $[AB]$ poate fi parcurs în două sensuri, de la A spre B sau de la B spre A. Pentru a ţine cont de acest aspect, introducem noţiunea de segment orientat.

Definiţie. *Se numeşte segment orientat o pereche ordonată de puncte (A, B), pe care o vom nota prin simbolul* $\overline{AB}$.

Punctul A se numeşte *originea,* iar punctul B se numeşte *extremitatea* sau *capătul* segmentului orientat $\overline{AB}$.

Dacă $A = B$, obţinem $\overline{AA}$ care se numeşte segment orientat *nul.* Dacă $A \neq B$ spunem ca segmentul orientat AB este *nenul.*

Uneori, segmentul orientat este denumit *bipunct* sau *vector legat.*

Observaţie. Dacă $A \neq B$, atunci segmentele $[AB]$ şi $[BA]$ sunt egale, dar segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ sunt diferite (la două puncte diferite putem asocia două segmente orientate diferite).

*

În continuare, vom da alte definiţii privind segmentele orientate.

• *Lungimea unui segment orientat* $\overline{AB}$ este lungimea segmentului $[AB]$ şi se notează $|\overline{AB}|$ sau AB. Prin definiţie, lungimea unui segment orientat nul este egală cu zero.

• *Dreapta suport* a unui segment orientat $\overline{AB}$ este dreapta AB.

• Vom spune că *două segmente orientate nenule au aceeaşi direcţie* dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.

Prin definiţie, un segment orientat nul are aceeaşi direcţie cu orice alt segment orientat.

• Vom spune că *segmentele orientate nenule* $\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$ *au același sens* dacă ele au aceeași direcție și este îndeplinită condiția:

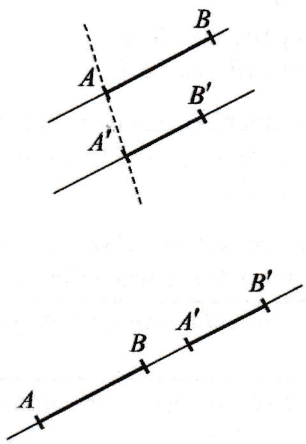
- dacă $AB \neq A'B'$ atunci extremitățile B și B' se află în același semiplan în raport cu dreapta AA';

- dacă $AB = A'B'$, atunci semidreapta $[A'B'$ este inclusă în semidreapta $[AB$ sau invers, semidreapta $[AB$ este inclusă în $[A'B'$ (fig. I.2).

• Vom spune că *segmentele orientate nenule* $\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$ *au sensuri opuse* daca ele au aceeași direcție și nu au același sens (fig. I.3).

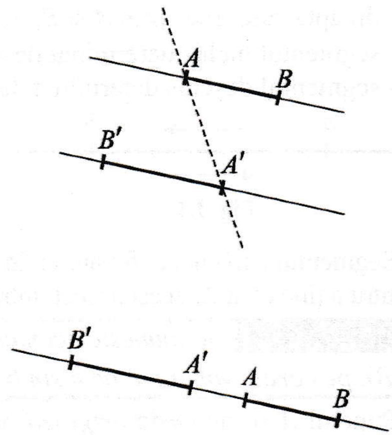
Se consideră că un segment orientat nul are, în același timp, și același sens și sens opus față de orice alt segment orientat.

Exemple



$\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$ au același sens

Fig. I.2



$\overline{AB}$ și $\overline{A'B'}$ au sensuri opuse

Fig. I.3

Observație. Dacă două segmente orientate au aceeași direcție, atunci ele se află în unul dintre următoarele două cazuri:

- cel puțin unul dintre ele este nul;
- ambele sunt nenule, caz în care au același sens sau au sensuri opuse.

Segmente orientate echipolente

Definiție. *Se spune că două segmente orientate* $\overline{AB}$ *și* $\overline{CD}$ *sunt echipolente dacă au același sens și aceeași lungime.*

Dacă $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ sunt echipolente, vom scrie $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. Prin definiție, orice două segmente orientate nule sunt echipolente.

Din definiție rezultă că două segmente orientate echipolente au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Propoziția 1. **Fie punctele A, B, C şi D.**

1) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow$ patrulaterul $ABDC$ este paralelogram, sau A, B, C, D sunt coliniare şi segmentele $[AD]$, $[BC]$ au acelaşi mijloc;

2) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow$ segmentele $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc;

3) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AC} \sim \overline{BD}$.

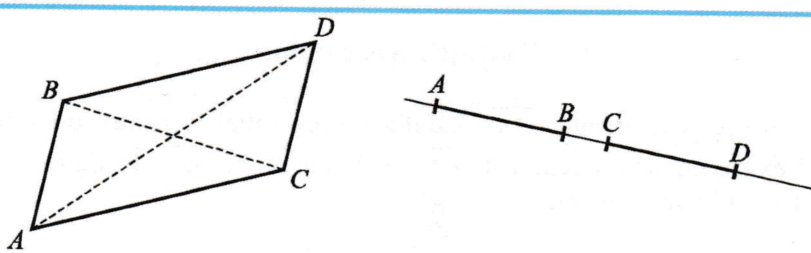


Fig. I.4

Observaţie. Avem următoarea imagine intuitivă asupra segmentelor echipolente. Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci „putem suprapune $\overline{AB}$ peste $\overline{CD}$ prin alunecare (translaţie) cu păstrarea direcţiei şi sensului“.

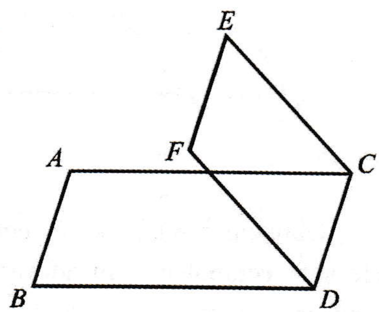


Fig. I.5

Propoziția 2. **Au loc proprietăţile:**

1) $\overline{AB} \sim \overline{AB}$.

2) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \sim \overline{AB}$.

3) $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ şi $\overline{CD} \sim \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{EF}$.

(se spune că relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate).

Următorul rezultat ne arată că există o infinitate de segmente orientate echipolente cu un segment orientat dat.

Propoziția 3. **Fie un segment orientat $\overline{AB}$. Pentru orice punct $M \in \mathscr{P}$ există un singur punct $N \in \mathscr{P}$ astfel încât $\overline{MN} \sim \overline{AB}$.**

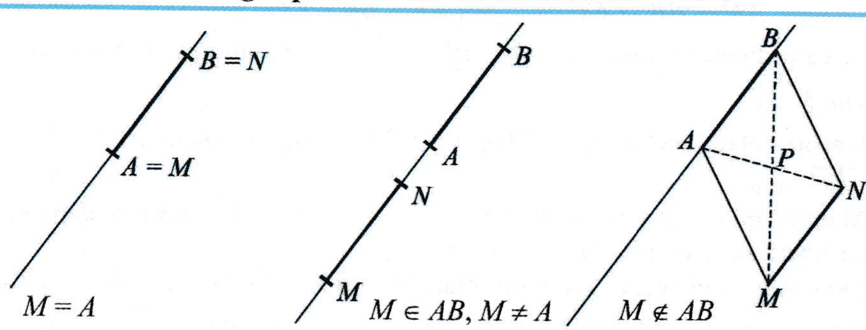


Fig. I.6

Propoziția 3 ne spune că pentru un segment orientat dat $\overline{AB}$ și un punct dat M din planul $\mathscr{P}$, există un singur segment orientat $\overline{MN}$ cu originea în M, care este echipolent cu $\overline{AB}$.

§2. Definiția vectorilor

Fie un segment orientat $\overline{AA'}$. Conform propoziției 3, pentru orice punct $M \in \mathscr{P}$ există un singur segment $\overline{MM'}$ echipolent cu $\overline{AA'}$. În figura I.7 am trasat patru astfel de segmente.

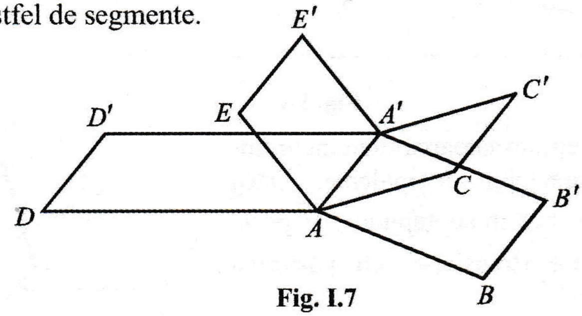


Fig. I.7

Obținem o *mulțime de segmente orientate* astfel încât oricare două dintre ele sunt echipolente. În adevăr, dacă $\overline{MM'} \sim \overline{AA'}$ și $\overline{NN'} \sim \overline{AA'}$, atunci, conform propoziției 2, rezultă $\overline{MM'} \sim \overline{NN'}$. Prin urmare, orice două segmente din această mulțime au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Definiție. *Mulțimea segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat fixat se numește vector.*

Mulțimea segmentelor orientate echipolente cu $\overline{AA'}$, adică mulțimea $\{\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'} \dots\}$ este un vector, care va fi notat $\overrightarrow{AA'}$ (citim „vectorul $\overrightarrow{AA'}$") sau $\overrightarrow{BB'}$ sau $\overrightarrow{CC'}$, ..., adică folosind oricare dintre segmentele orientate care îl definesc. Rezultă:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots = \{\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'} \dots\}.$$

Fiecare dintre segmentele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, ... se numește *reprezentant al vectorului* $\overrightarrow{AA'}$.

Uneori notăm vectorii și cu litere mici. De exemplu, putem scrie $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ (deci $\overline{AA'} \in \vec{u}$).

Menționăm că, în anumite lucrări, în loc de „vector" se folosește denumirea „vector liber" sau „vector alunecător".

Lungimea unui vector. Numărul real $AA' = BB' = CC' = \dots$, adică lungimea comună tuturor segmentelor orientate care definesc vectorul $\overrightarrow{AA'}$ se numește *lungimea vectorului* $\overrightarrow{AA'}$ și se notează $|\overrightarrow{AA'}|$.