Libris.ro

Marius PERIANU

Florian DUMITREL

Matematică

clasa a IX-a

semestrul al II-lea

filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)
filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)
filiera vocațională: profil militar (matematică-informatică)

art
educațional

Libris .RO
Respect pentru oameni și cărți

CUPRINS

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

Libris .RO
Respect pentru oameni și cărți

CAPITOLUL 1

FUNCȚII. LECTURI GRAFICE

Tema 1.1. Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice

Tema 1.2. Imaginea unei funcții. Preimagine. Funcții mărginite

Tema 1.3. Funcția de gradul întâi

Tema 1.4. Funcții pare. Funcții impare. Axe de simetrie. Centre de simetrie

Tema 1.5. Funcții monotone

Tema 1.6. Funcții periodice

Tema 1.7. Operații cu funcții. Compunerea funcțiilor
Teste de evaluare

Tema 1.8. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Libris .RO
Respect pentru oameni și cărți

Tema 1.1

Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice

Se numește *funcție* un triplet de forma (A, B, f), unde A și B sunt două mulțimi, iar f un procedeu prin care oricărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y \in B$, notat $y = f(x)$; se spune că f este o funcție definită pe A cu valori în B și se notează $f : A \to B$.

Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției, iar mulțimea B se numește *domeniul valorilor* funcției sau *codomeniul* funcției.

Dacă $x \in A$, atunci elementul $y = f(x) \in B$ se numește *imaginea lui x prin f* sau *valoarea lui f în x*.

Vom spune că două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ sunt *egale* (notăm $f = g$) dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Fie $f : A \to B$ o funcție și $D \subset A$ o submulțime a lui A. Funcția $g : D \to B$ definită prin $g(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in D$, se numește *restricția funcției* f *la mulțimea* D și se notează $g = f\big|_D$.

Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numește *graficul* lui f.

Observații. 1. $G_f \subset A \times B$.

2. $(a,b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Fie $f : A \to B$ o *funcție numerică* (adică $A, B \subset \mathbb{R}$) și xOy un reper cartezian în plan. Mulțimea punctelor $M(x,y)$ din plan cu $x \in A$ și $y = f(x)$ se numește *reprezentarea geometrică a graficului funcției f* (sau, pe scurt, *reprezentarea grafică a funcției f*). Dacă A este un interval sau o reuniune de intervale, reprezentarea geometrică a graficului lui f este o curbă numită *curba reprezentativă a funcției f*.

Curba reprezentativă a unei funcții numerice $f : A \to \mathbb{R}$ intersectează axa Ox în punctele $P(\alpha, 0)$, unde α este soluție a ecuației $f(x) = 0,\ x \in A$ (dacă ecuația are soluții). Dacă $0 \in A$, curba reprezentativă a funcției f intersectează axa Oy în punctul $Q(0, f(0))$.

*

1. Determinați mulțimile $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \to 3x - 2$ să definească o funcție definită D cu valori în $\{1, 7, 13\}$.

2. Determinați mulțimile $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \to x^2 + 1$ să definească o funcție definită pe D cu valori în $\{1, 2, 3\}$.

3. Determinați mulțimile $E \subset \mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x \to 2x - 1$ să definească o funcție $f : \{-1, 0, 1\} \to E$.

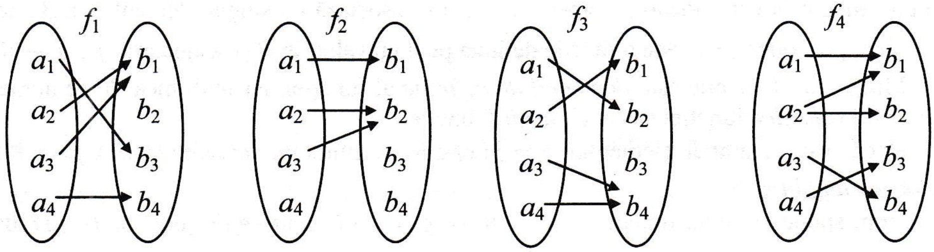
4. Fie mulțimea $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Determinați submulțimile A ale lui $2\mathbb{Z}$ astfel încât corespondența $x \to \frac{x}{3}$ să definească o funcție $f : A \to \mathbb{Z}$.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

5. Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3\}$ și $B=\{-1,0,1\}$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât corespondența $x\to ax+b$ să definească o funcție $f:A\to B$.

6. Corespondența $\frac{m}{n}\to m+n$ definește o funcție de la $\mathbb{Q}_+$ la $\mathbb{N}$?

7. Precizați care dintre următoarele diagrame definesc o funcție $f:A\to B$:



8. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(1)+f(2)=3$.

9. Găsiți toate funcțiile $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ cu proprietatea $f(x)\ge x$ pentru orice $x\in\{1,2,3\}$.

10. Determinați domeniul maxim de definiție pentru fiecare dintre funcțiile:

a) $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $D\subset\mathbb{R}$; *b)* $f:D\to\mathbb{Q}$, $f(k)=\dfrac{2k-1}{1+(-1)^k}$, $D\subset\mathbb{Z}$;

c) $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\{x\}}$, $D\subset\mathbb{R}$; *d)* $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{[x]-\sqrt{x}}$, $D\subset\mathbb{R}$.

11. Pentru fiecare număr natural m, notăm cu $u(m)$ ultima sa cifră. Considerăm funcția

$$f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N},\ f(n)=u(2^n).$$

a) Calculați $f(13)$, $f(39)$ și $f(2000)$.

b) Explicitați legea de corespondență a funcției f.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<1\\ x^2-4x+3, & x\ge 1\end{cases}$. Calculați:

a) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$; *b)* $f(1)$; *c)* $f\left(2-\sqrt{3}\right)$; *d)* $f\left(2+\sqrt{3}\right)$.

13. O funcție $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea $f(x,y)=x+f(x-1,x-y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Calculați $f(5,2)$ știind că $f(1,0)=3$.

14. *a)* Câte restricții are o funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$?

b) Câte dintre acestea conțin pe 1 în domeniul de definiție?

15. Determinați restricțiile funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ la mulțimile:

a) $\mathbb{Z}$; *b)* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; *c)* $A=\left\{\sqrt{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.

16. Arătați că funcțiile $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left[\dfrac{2x+1}{3}\right]$ și $g:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$ sunt egale.

Libris.RO

17. Fie funcțiile $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(k)=k+(-1)^k$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=[x]+\cos\pi x$. Arătați că $g\big|_{\mathbb{Z}}=f$.

18. Determinați graficul fiecărei funcții

a) $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$; ***b)*** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

19. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\le 2\\ x+b, & x>2\end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Determinați a,b știind că $(1,2)\in G_f$ și $(3,5)\in G_f$.

20. Fie mulțimile $A=\{0,1,2,3\}$ și $B=\{a,b,c\}$. Precizați care dintre următoarele submulțimi ale produsului cartezian $A\times B$ reprezintă graficul unei funcții $f:A\to B$:

a) $G_1=\{(0,a),(1,b),(2,c),(3,c)\}$; ***b)*** $G_2=\{(0,a),(1,b),(2,c)\}$;

c) $G_3=\{(0,a),(1,b),(2,c),(3,a),(3,b)\}$; ***d)*** $G_4=\{(0,a),(1,a),(2,b),(3,b)\}$.

21. Determinați intersecțiile graficelor următoarelor funcții numerice cu axele de coordonate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$; ***b)*** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$; ***d)*** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 2\\ 2x-5, & x>2\end{cases}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\le 1\\ x-2, & x>1\end{cases}$; ***f)*** $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\le x\le 0\\ \frac{1}{x}, & 0<x\le 1\end{cases}$.

**

22. Arătați că funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}[x], & \{x\}<\frac{1}{2}\\ [x]+1, & \{x\}\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ (funcția *„cel mai apropiat întreg de x"*) și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$ sunt egale.

23. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-a|+|x-b|$. Determinați mulțimile $D\subset\mathbb{R}$ astfel încât $f\big|_D$ este funcție constantă.

24. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 3\\ 2x+3, & x>3\end{cases}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 2\\ 2x+3, & x>2\end{cases}$.

Determinați cea mai mare mulțime $D\subset\mathbb{R}$ astfel încât $f\big|_D=g\big|_D$.

25. Arătați că mulțimea $G=\{(x+1,2x+1)\mid x\in\mathbb{R}\}$ este graficul unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Libris .RO
Respect pentru oameni și cărți

26. Determinați punctele de pe graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<1\\ x-3, & x\geq 1\end{cases}$ care au suma dintre abscisă și ordonată egală cu 1.

27. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 2\\ 2x-1, & x>2\end{cases}$. Determinați numerele reale a,b astfel încât $a-b=1$ și $f(a)+f(b)=1$.

28. Se consideră mulțimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid x^2-y=9\}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Determinați $A\cap G_f$.

29. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $2f(x)+3f(1-x)=2x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

30. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+1)\leq x\leq f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

***

31. O funcție $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ are proprietatea: pentru orice $a,b\in\mathbb{N}^*$ cu $a+b=2^n$, $n\in\mathbb{N}$, rezultă că $f(a)+f(b)=n^2$. Calculați $f(2012)$.

32. O funcție $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ are proprietatea $f(m)+f(n)=f(mn)$, $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$. Dacă, în plus, $f(2)=3$ și $f(3)=5$, calculați $f(2592)$.

33. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=mx+n$, unde $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Arătați că $f=g$ dacă și numai dacă $a=0$, $b=m$ și $c=n$.

34. Arătați că nu există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ și $g(x)=|x|$ să fie egale.

35. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+cx+d$, unde a,b,c,d sunt numere raționale. Arătați că, dacă există $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $f(x_0)=g(x_0)$, atunci $f=g$.

36. Arătați că două funcții $f,g:A\to B$ sunt egale dacă și numai dacă $G_f=G_g$.

37. Arătați că pentru o funcție $f:A\to B$ avem $G_f=A\times B$ dacă și numai dacă mulțime A are un singur element.

38. Fie A o mulțime cu a elemente și B o mulțime cu b elemente. Arătați că numărul funcțiilor $f:A\to B$ este egal cu b^a.

39. Fie A o mulțime cu n elemente și B o mulțime cu două elemente. Câte perechi de funcții (f,g) au proprietatea $G_f\cup G_g=A\times B$?

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

(1p) **1.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ care au proprietatea $f(1)+f(2)=4$.

(2p) **2.** ***a)*** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax+2, & x<1 \\ x+b, & x\geq 1 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Determinați a și b știind că $(-1,1)\in G_f$ și $(1,3)\in G_f$.

b) Determinați funcția f al cărei grafic este mulțimea $G=\{(1,0),(2,1),(3,0),(4,3),(5,2)\}$.

(4p) **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 2x+1, & x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calculați $f(f(-1))+f(f(1))$. ***b)*** Arătați că f este monotonă.

c) Determinați funcția $f\circ f$. ***d)*** Determinați $\operatorname{Im} f$.

(2p) **4.** ***a)*** Găsiți numerele reale a,b pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+b|x|$ este impară.

b) Arătați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}$ este periodică.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) **1.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ care au proprietatea $f(1)+f(2)=5$.

(2p) **2.** ***a)*** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\leq 2 \\ 2x+b, & x>2 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

Determinați a și b știind că $(2,3)\in G_f$ și $(3,2)\in G_f$.

b) Determinați funcția f al cărei grafic este mulțimea $G=\{(1,0),(2,1),(3,0),(4,1),(5,0)\}$.

(4p) **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x<0 \\ 5, & x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calculați $f(f(-1))+f(f(1))$. ***b)*** Arătați că f este monotonă.

c) Determinați funcția $f\circ f$. ***d)*** Determinați $\operatorname{Im} f$.

(2p) **4.** ***a)*** Găsiți numerele reale a,b pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+b|x|$ este pară.

b) Arătați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{5}\right\}$ este periodică.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Variante de subiecte pentru teză

Varianta 1

Algebră

(2p) 1. Rezolvați sistemul de inecuații: $\begin{cases} 2x^2 - 7x + 5 \le 0 \\ x^2 + 3x + 5 > 0 \end{cases}$.

(1p) 2. Determinați parametrul real m astfel încât între rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + mx + 2m + 8 = 0$ să existe relația $x_1 = 2x_2$.

(2p) 3. Fie ecuația $(2-m)x^2 - 2mx + m^2 - 3m = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Determinați numerele reale m pentru care $x_1, x_2 > 2$.

(1p) 4. Determinați funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (3a-1)x - 2b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, știind că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 5]$, strict crescătoare pe $[5, \infty)$, iar $\operatorname{Im} f = [-9, \infty)$.

(1⁺p) 5. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Demonstrați că dacă ecuațiile $x^2 + ax + bc = 0$ și $x^2 + bx + ca = 0$ au o rădăcină comună, atunci rădăcinile necomune verifică ecuația $x^2 + cx + ab = 0$.

Geometrie și trigonometrie

(2p) 6. Demonstrați identitatea $\dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \operatorname{tg} x$.

(1p) 7. Arătați că laturile a, b, c ale triunghiului ABC sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă numerele $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ sunt în progresie aritmetică.

Varianta 2

Algebră

(2p) 1. Rezolvați sistemul de inecuații: $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 \le 0 \\ -x^2 + 7x - 13 < 0 \end{cases}$.

(1p) 2. Determinați parametrul real m astfel încât între rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației $(m+1)x^2 + 2mx + 5 = 0$ să existe relația $x_1 - x_2 = 2$.

(2p) 3. Fie ecuația $mx^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Determinați numerele reale m pentru care $x_1, x_2 < -3$.

(1p) 4. Determinați numerele reale $m \ne 1$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 1$ este strict descrescătoare pe intervalul $(3, \infty)$.

(1⁺p) 5. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + ax + b = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - bx + a = 0\}$. Determinați numerele reale a și b astfel încât $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$.

Libris .RO
Respect pentru oameni și cărți

SOLUȚII

CAPITOLUL 1. Funcții. Lecturi grafice

Tema 1.1. Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice

1. $\varnothing \neq D \subset \{1,3,5\}$. **2.** $\varnothing \neq D \subset \left\{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}\right\}$. **3.** $E \subset \{-3,-1,1\}$. **4.** $\varnothing \neq A \subset 6\mathbb{Z}$. **5.** Dacă $a>0$, atunci $f(1)<f(2)<f(3)$, deci $f(1)=-1$, $f(2)=0$, $f(3)=1$; obținem $a=1$ și $b=-2$. La fel, dacă $a<0$, atunci $f(1)>f(2)>f(3)$, deci $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(3)=-1$, de unde $a=-1$ și $b=2$. În cazul $a=0$ obținem $b \in \{-1,0,1\}$. **6.** Corespondența nu definește o funcție, întrucât $\frac{1}{2} \to 3$, $\frac{2}{4} \to 6$ și $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. **7.** Diagramele a) și c) definesc funcții $f: A \to B$. **8.** Din ipoteză rezultă că $(f(1), f(2)) \in \{(0,3),(3,0),(1,2),(2,10)\}$. Cum $f(3) \in \{0,1,2,3\}$, deduce că 16 funcții au proprietatea din enunț. **9.** $f(3) \geq 3 \Rightarrow f(3)=3$ și $f(2) \geq 2 \Rightarrow f(2) \in \{2,3\}$. Cum $f(1) \in \{1,2,3\}$, rezultă că 6 funcții au proprietatea din enunț. **10** *a)* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; *b)* $2\mathbb{Z}$; *c)* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; *d)* $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. **11** *a)* $f(13)=2$; $f(39)=8$; $f(2000)=6$; *b)* $f(n)=\begin{cases} 6, & n=4k \ (k \neq 0) \\ 2, & n=4k+1 \\ 4, & n=4k+2 \\ 8, & n=4k+3 \end{cases}$, unde $k \in \mathbb{N}$. **12** *a)* $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$; *b)* $f(1)=0$; *c)* $f(2-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$; *d)* $f(2+\sqrt{3})=2$. **13.** $f(5,2)=5+f(4,3)$, $f(4,3)=4+f(3,1)$, $f(3,1)=3+f(2,2)$, $f(2,2)=2+f(1,0)=5 \Rightarrow f(5,2)=17$. **14** *a)* $2^3-1=7$; *b)* 4. **15** *a)* $f|_{\mathbb{Z}}(x)=2x+1$; *b)* $f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)=x^2$; *c)* $f|_A(\sqrt{n})=\begin{cases} 2\sqrt{n}+1, & n \in M \\ n, & n \in \mathbb{N} \setminus M \end{cases}$, unde $M=\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$. **16.** $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1 \Rightarrow f=g$.

17. $g(k)=k+\cos k\pi=k+(-1)^k=f(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow g|_{\mathbb{Z}}=f$. **18** *a)* $G_f=\{(-1,-3),(0,-1),(1,1)\}$; *b)* $G_g=\{(x,x) \mid x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. **19.** $(1,2) \in G_f$ și $(3,5) \in G_f \Leftrightarrow f(1)=2$ și $f(3)=5 \Leftrightarrow a+1=2$ și $3+b=5$ $\Leftrightarrow a=1$ și $b=2$. **20.** Fiecare dintre mulțimile G_1 și G_4 reprezintă graficul unei funcții $f: A \to B$. **21** *a)* Graficul lui f intersectează axa Ox în punctul $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ și axa Oy în punctual $(0.-5)$. *b)* Graficul lui f intersectează Ox în punctul $(1,0)$ și nu intersectează Oy. *c)* Graficul funcției nu intersectează axele de coordinate. *d)* Rezolvând ecuația $f(x)=0$, $x \in \mathbb{R}$, obținem $x \in \left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$, deci $G_f \cap Ox=\left\{(-1,0),\left(\frac{5}{2},0\right)\right\}$; $G_f \cap Oy=\{(0,1)\}$. *e)* $G_f \cap Ox=\{(0,0),(1,0),(2,0)\}$; graficul lui f intersectează Oy în punctul $(0,0)$. *f)* $G_f \cap Ox=\varnothing$ și $G_f \cap Oy=\{(0,-1)\}$. **22.** $g(x)=\left[[x]+\{x\}+\quad+\frac{1}{2}\right]=[x]+\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]$. Dacă $0 \leq \{x\}<\frac{1}{2}$, atunci $\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]=0$, deci $g(x)=[x]$. În cazul $\frac{1}{2} \leq \{x\}<1$ avem $\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]=1$, deci $g(x)=[x]+1$. Așadar, $f=g$. **23.** $\varnothing \neq D \subset [a,b]$. **24.** $D=\{2\} \cup (3,\infty)$. **25.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. **26.** Rezolvând