

Memorator de
- Analiză matematică și trigonometrie -
pentru clasele 9-12

10. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}x, \forall x \in \mathbb{R};$
11. $\cos(4\arccos x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \forall x \in [-1, 1];$
12. $\operatorname{arctg}x^2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty);$
13. $2\operatorname{arctg}x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi, \forall x \geq 1.$

9.8. Ecuații trigonometrice

Fie funcția $f:E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, unde $E \subset \mathbb{R}$, iar $f(x)$ depinde de x numai prin intermediul funcțiilor sin, cos, tg, ctg. O egalitate de forma $f(x)=0$ se numește **ecuație trigonometrică**.

Ecuațiile trigonometrice fundamentale:

1. $\sin x = a$

- dacă $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ecuația nu are soluții;
- dacă $a \in [-1, 1]$, at. $x \in \{\arcsina + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsina + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

În particular: $\sin x = 1 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. $\cos x = a$

- dacă $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ecuația nu are soluții;
- dacă $a \in [-1, 1]$, atunci $x \in \{\pm\arccosa + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

În particular: $\cos x = 1 \Rightarrow x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x \in \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. $\operatorname{tg}x = c \Rightarrow x \in \{\operatorname{arctgc} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

Cuprins

1. Şiruri de numere reale	3
1.1. Dreapta reală.....	3
1.2. Mărginire. Marginile unei mulțimi.....	4
1.2.1. Ordonarea numerelor reale.....	4
1.2.2. Vecinătăți.....	6
1.3. Notiunea de sir.....	7
1.3.1. Modalitățile de a defini un sir.....	7
1.3.2. Monotonia sirurilor.....	9
1.3.3. Periodicitate.....	9
1.3.4. Mărginire.....	9
1.4. Limita unui sir. Siruri convergente.....	10
1.4.1. Siruri cu limită infinită.....	10
1.4.2. Siruri cu limită finită.....	12
1.4.3. Subsiruri.....	13
1.4.4. Siruri monotone.....	13
1.4.5. Proprietăți ale sirurilor convergente. Criterii de convergență.....	14
1.5. Operații cu siruri care au limită. Cazuri exceptate la limitele de siruri.....	15
1.6. Numărul e.....	17
1.7. Siruri tip. Siruri remarcabile. Calculul limitelor în cazuri de nedeterminare.....	18
1.7.1. Limita unui polinom $P(n)$ având gradul $k \geq 1$	18
1.7.2. Limita unui raport de polinoame.....	19
1.7.3. Limita unui sir al căruia termen general conține puteri.....	19
1.7.4. Limita unui sir al căruia termen general conține radicali.....	20
1.7.5. Sirul cu termenul general $x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1), a > 0, a \neq 1$	21
1.7.6. Alte rezultate remarcabile.....	22
1.7.7. Criteriul Cesaro-Stolz și consecințe.....	22
1.8. Trecerea la limită în inegalități.....	23
1.9. Siruri recurente.....	23
1.9.1. Relații de recurentă liniare de ordinul întâi.....	24
1.9.2. Relații de recurentă liniară de ordinul doi.....	24
2. Limite de funcții	26
2.1. Limita unei funcții într-un punct.....	26
2.1.1. Limita unei funcții într-un punct.....	26
2.1.2. Limite laterale.....	27

Memorator de analiză matematică și trigonometrie	
2.2. Operații cu limite de funcții.....	28
2.3. Limite de funcții elementare.....	29
2.4. Limite remarcabile.....	32
2.5. Metode de eliminare a nedeterminării.....	33
2.5.1. Limitele funcțiilor polinomiale.....	33
2.5.2. Limitele funcțiilor raționale.....	33
2.5.3. Limitele funcțiilor iraționale.....	34
2.5.4. Utilizarea limitelor remarcabile.....	34
2.6. Criterii de existență a limitei unei funcții.....	35
3. Funcții continue.....	36
3.1. Continuitate punctuală. Continuitate pe un interval.....	36
3.1.1. Continuitate punctuală.....	36
3.1.2. Puncte de discontinuitate.....	37
3.1.3. Continuitate pe un interval.....	37
3.1.4. Prelungirea prin continuitate.....	37
3.1.5. Continuitate laterală.....	38
3.2. Operații cu funcții continue.....	38
3.3. Proprietăți ale funcțiilor continue.....	39
3.3.1. Proprietăți locale.....	39
3.3.2. Proprietăți globale.....	39
3.3.3. Proprietatea lui Darboux.....	40
4. Funcții derivabile.....	42
4.1. Definiția derivatei.....	42
4.1.1. Derivabilitatea într-un punct.....	42
4.1.2. Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct.....	42
4.1.3. Derivabilitatea pe o mulțime. Funcția derivată.....	43
4.1.4. Derivate laterale. Interpretare geometrică.....	44
4.2. Operații cu funcții derivabile.....	47
4.3. Derivatele funcțiilor elementare și a funcțiilor compuse.....	49
4.4. Derivate de ordin superior.....	50
4.5. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile.....	51
4.5.1. Punct de extrem.....	51
4.5.2. Teoremele lui Rolle, Lagrange și Cauchy.....	52
4.5.3. Teorema lui Darboux.....	55
4.6. Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor.....	56
5. Reprezentarea grafică a funcțiilor.....	58
5.1. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor.....	58
5.1.1. Intervale de monotonie ale unei funcții.....	58
5.1.2. Punctele de extrem ale unei funcții.....	58
5.1.3. Inegalități demonstrează cu ajutorul derivatelor.....	59

5.2. Rolul derivatei a două în studiul funcțiilor.....	60
5.2.1. Intervale de convexitate și concavitate ale unei funcții.....	60
5.2.2. Punctele de inflexiune ale unei funcții.....	62
5.3. Asimptotele unei funcții.....	63
5.3.1. Asimptote verticale.....	63
5.3.2. Asimptote orizontale și oblice.....	64
5.4. Sirul lui Rolle.....	66
5.5. Etapele reprezentării grafice a funcțiilor.....	67
5.5.1. Domeniul de definiție al funcției.....	67
5.5.2. Derivata întâi.....	67
5.5.3. Derivata a două.....	68
5.5.4. Tabelul de variație.....	68
5.5.5. Trasarea graficului.....	68
5.6. Reprezentarea grafică a conicelor.....	70
5.6.1. Reprezentarea grafică a cercului.....	70
5.6.2. Reprezentarea grafică a elipsei.....	70
5.6.3. Reprezentarea grafică a parabolei.....	71
5.6.4. Reprezentarea grafică a hiperbolei.....	72
5.7. Proprietăți geometrice ale conicelor.....	74
5.7.1. Intersecția unei conice cu o dreaptă.....	74
5.7.2. Intersecția a două conice.....	74
5.7.3. Tangenta într-un punct al unei conice.....	74
5.7.4. Tangente paralele cu o direcție dată, la o conică.....	75
5.7.5. Tangente dintr-un punct exterior la o conică.....	76
6. Primitive.....	77
6.1. Notiunea de integrală.....	77
6.1.1. Notiunea de primitivă.....	77
6.1.2. Integrala nefinilită.....	78
6.1.3. Operații cu integralele nefinfinite.....	78
6.1.4. Tabel de integrale nefinfinite.....	79
6.2. Integrarea prin părți.....	80
6.3. Prima metodă de schimbare de variabilă.....	80
6.4. Integrarea funcțiilor raționale.....	82
7. Funcții integrabile.....	85
7.1. Diviziuni.....	85
7.2. Funcții integrabile.....	86
7.3. Integrabilitatea funcțiilor monotone și a funcțiilor continue.....	90
7.4. Integrarea funcțiilor continue.....	92

8. Aplicații ale integralei definite.....	94
8.1. Calculul ariilor cuprinse între două curbe.....	94
8.2. Volumul corpuriilor de rotație.....	95
8.3. Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă.....	96
8.4. Aria suprafețelor de rotație.....	97
8.5. Lucrul mecanic.....	98
9. Elemente de trigonometrie.....	99
9.1. Noțiuni preliminare.....	99
9.2 Funcțiile trigonometrice sinus și cosinus.....	100
9.2.1. Definiții și proprietăți.....	100
9.2.2. Formulele importante.....	101
9.3. Funcțiile trigonometrice tangentă și cotangentă.....	102
9.3.1. Definiții. Proprietăți.....	102
9.3.2. Rezultate și formule importante.....	103
9.4. Transformarea sumelor în produse.....	104
9.5. Graficele funcțiilor sin, cos, și tg.....	104
9.5.1. Graficul funcției sin: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \sin x$	104
9.5.2. Graficul funcției cos: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \cos x$	105
9.5.3. Graficul funcției tg.....	106
9.6. Identități conditionate.....	106
9.7. Inversarea funcțiilor trigonometrice.....	107
9.8. Ecuatii trigonometrice.....	108

Pentru comenzi:

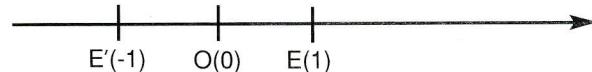
tel: 021 4303095

e-mail: comenzi@booklet.ro

1. ȘIRURI DE NUMERE REALE

1.1. Dreapta reală

Definiție: Se numește **axa numerelor** (**axa de coordonate**) o dreaptă pe care sunt fixate: un punct O (origine), un segment OE (de lungime unitate) și un sens pozitiv (de la O spre E).



Între mulțimea numerelor reale \mathbb{R} și axa numerelor se poate stabili o corespondență biunivocă astfel:

- numărului 0 îi corespunde punctul O ;
- numărului pozitiv a îi corespunde punctul de pe semidreapta OE situat la distanța a de O ;
- numărului negativ b îi corespunde punctul de pe semidreapta OE' situat la distanța $-b$ de O .

Punctul $P(x)$ asociat numărului real x se numește **imaginăea** lui x , iar numărul x se numește **abscisa** punctului $P(x)$.

Observații:

1. Dintre două puncte de pe axa numerelor, abscisa celui din dreapta este mai mare decât abscisa celuilalt punct.
2. Distanța dintre $P(x)$ și O este: $d(P(x), O) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.
3. Distanța dintre punctele $P(x)$ și $P(y)$ este $d(P(x), P(y)) = |x-y|$.

Teoremă (Proprietățile modulului): Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$;
2. $|x|>0 \Leftrightarrow x \neq 0$;
3. $|-x|=|x|$;
4. $|xy|=|x|\cdot|y|$;
5. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$;
6. $|x|=y, y>0 \Rightarrow x \in \{-y, y\}$;

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
CURTUI, LUMINIȚA

Memorator de analiză matematică și trigonometrie /

Luminița Curtui. - București : Booklet, 2015

ISBN 978-606-590-300-5

517(075.35)

514.116(075.35)

Respect pentru natura și carții

7. $|x| \leq y, y > 0 \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$
8. $-|x| \leq x \leq |x|$;
9. $|x+y| \leq |x|+|y|$;
10. $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

Definiție: Notăm $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $\bar{\mathbb{R}}$ se numește dreaptă reală încheiată.

■ Pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ considerăm:

- $-\infty < x < \infty$;
- $x + \infty = \infty + x = \infty$
- $x - \infty = -\infty + x = -\infty$
- $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} \infty, x > 0 \\ -\infty, x < 0 \end{cases}$
- $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$
- $\infty + \infty = \infty$;
- $-\infty - \infty = -\infty$;
- $\infty \cdot \infty = \infty$;
- $-\infty \cdot \infty = -\infty$;
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$;

■ Nu se definesc și nu au sens:

- $\infty - \infty$;
- $-\infty + \infty$;
- $0 \cdot (\pm\infty)$;
- $(\pm\infty) \cdot 0$;
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$;
- $\frac{0}{0}$;

1.2 Mărginire. Marginile unei multimi.

1.2.1. Ordonarea numerelor reale

Teoremă (Proprietățile relației de ordine pe \mathbb{R}): $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

1. $a \leq a$
2. $a \leq b$ sau $b \leq a$ (relația de ordine pe \mathbb{R} este totală)
3. $a \leq b$ și $b \leq a \Rightarrow a = b$
4. $a \leq b$ și $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
5. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6. $a \geq 0$ și $b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$
7. $a \geq 0$ și $b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$
8. $a \leq 0$ și $b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$
9. $a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
10. $a \leq b, c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
11. $a \leq b, c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

$$12. 0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Definiție: Fie $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$.

Un număr real m se numește **minorant** pentru A , dacă m este mai mic sau egal decât orice număr din A ($m \leq x, \forall x \in A$).

Un număr real M se numește **majorant** pentru A , dacă M este mai mare sau egal decât orice număr din A ($M \geq x, \forall x \in A$).

A se numește **mărginită superior (majorată)** dacă admite majorant.

A se numește **mărginită inferior (minorată)** dacă admite minorant.

A se numește **mărginită** dacă este mărginită superior și inferior.

O mulțime nevidă care nu este mărginită se numește **nemărginită**.

Observație: O mulțime este nemărginită dacă nu este mărginită superior sau nu este mărginită inferior.

Exemplu: 1. $A = \{1, 2, 3\}$ este mărginită ($\exists 1 \in \mathbb{R}$ a.î. $1 \leq x, \forall x \in A$ și $\exists 3 \in \mathbb{R}$ a.î. $3 \geq x, \forall x \in A$).

2. $(-\infty, 0]$ nu este mărginită ($\exists 0 \in \mathbb{R}$ a.î. $0 \geq x, \forall x \in (-\infty, 0]$, dar $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists x \in (-\infty, 0]$ a.î. $x \leq m$ - mulțimea este mărginită superior, dar nu este mărginită inferior).

Teoremă: Fie $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

1. Sunt echivalente afirmațiile:

- i) mulțimea A este mărginită;
- ii) $\exists a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \leq x \leq b, \forall x \in A$;
- iii) $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ a.î. $|x| \leq M, \forall x \in A$.

2. Mulțimea nevidă A este nemărginită dacă și numai dacă

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \exists x_M \in A \text{ cu } |x_M| > M .$$

Definiție: Fie $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

Numărul $m \in \mathbb{R}$ se numește **minimul mulțimii A** și se notează $\min A$ dacă m este minorant pentru A și $m \in A$.

Numărul $M \in \mathbb{R}$ se numește **maximul mulțimii A** și se notează $\max A$ dacă M este majorant pentru A și $M \in A$.

Observație: Minimul (maximum), dacă există, este unic.

Definiție: Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Se numește **infimum (margină inferioară)** pentru mulțimea A (și se notează $\inf A$) cel mai mare minorant (dacă există) al mulțimii A .

Se numește **supremum (margină superioară)** pentru mulțimea A (notat $\sup A$) cel mai mic majorant (dacă există) al mulțimii A .

Observații: 1. Dacă $\exists \inf A$ și $\inf A \in A$, atunci $\inf A = \min A$.
2. Dacă $\exists \sup A$ și $\sup A \in A$, atunci $\sup A = \max A$.

Axioma lui Cantor: Orică multime de numere reale, nevidă, mărginită superior admite supremum.

Teoremă: Orică multime nevidă de numere reale, mărginită inferior admite infimum.

Consecință: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ și A mărginită $\Rightarrow \exists \inf A$ și $\sup A$.

Teorema lui Arhimede: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha < n \cdot \beta$.

Propoziție: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un unic număr întreg p astfel încât $p \leq x < p+1$; p se numește **partea întreagă** a lui x și se notează $p=[x]$.

Teoremă (de densitate a lui \mathbb{Q} în \mathbb{R}): $\forall a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a < q < b$.

1.2.2. Vecinătăți

Definiție: Se numește **vecinătate** a numărului real a mulțimea de numere reale V care conține un interval deschis centrat în a .
(V este vecinătatea lui $a \Leftrightarrow \exists r > 0$ a.î. $(a-r, a+r) \subset V$)

Notăm cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea vecinătăților numărului x .

Observație: Intervalele siometrice (bilele) de centru a și rază r , notate $B(a, r) = (a-r, a+r)$, sunt vecinătăți ale punctului a .

Consecință: O mulțime V nu este vecinătate a punctului a dacă $\forall r > 0$, $B(a, r) \not\subset V$.

Propoziție: Intervalele deschise (a, b) sunt vecinătăți pentru orice punct al lor.

Observații: 1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists V_x \in \mathcal{V}(x), V_y \in \mathcal{V}(y)$ a.î. $V_x \cap V_y = \emptyset$ (două puncte diferite au două vecinătăți disjuncte).
2. $\cap_{x \in V(x)} V = \{x\}$. (intersecția tuturor vecinătăților unui punct este chiar punctul).

Observație: Se pot defini vecinătățile lui $-\infty$ sau ∞ astfel: se numește vecinătate a lui ∞ (respectiv $-\infty$) orice mulțime $V \subset \mathbb{R}$ care conține un interval de forma $(b, \infty]$ (respectiv de forma $[-\infty, b)$), unde $b \in \mathbb{R}$.

Definiție: Fie $A \subset \mathbb{R}$. Un element $x \in \mathbb{R}$ se numește **punct de acumulare** pentru mulțimea A dacă în orice vecinătate a lui x există cel puțin un punct din $A - \{x\}$. ($x \in \mathbb{R}$ punct de acumulare pentru $A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$).

Un element $x \in A$ care nu este punct de acumulare pentru A se numește **punct izolat** al lui A .

Observație: Notăm A' mulțimea punctelor de acumulare ale lui A .

1.3 Noțiunea de sir

1.3.1. Modalitățile de a defini un sir

Definiție: Se numește **sir de numere reale** (**sir numeric, sir real**) o funcție reală definită pe \mathbb{N} sau \mathbb{N}^* ($u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sau $u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$).

Imaginea lui n prin funcția u se notează cu u_n și se numește **termenul de rang n** .

Observații: 1. Indicele n din u_n arată poziția (sau rangul) termenului în sir.

2. Sirul se notează $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sau (u_n) .

Observație: Dacă $I \subset \mathbb{N}$, I infinită și $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ elementele lui I , atunci funcția $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ este un sir de numere reale, $u(k_n) = u_{k_n}$.

Sirurile pot fi definite prin:

1. Formula termenului general:

Exemplu: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n = \frac{1}{1+n^2}$. Putem calcula termenii

$$\text{șirului: } u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{5}, u_3 = \frac{1}{10}, u_4 = \frac{1}{17}, \dots, 3$$

2. O relație de recurență:

Exemplu: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_0 = 3, u_{n+1} = (-2) \cdot u_n$.

$$\text{Atunci: } u_1 = (-2) \cdot 3, u_2 = (-2)^2 \cdot 3, u_3 = (-2)^3 \cdot 3, \dots$$

3. Cu ajutorul primilor termeni

Exemplu: 2, 3, 5, 7, 11, 13 ... este sirul numerelor prime.

1.3.2. Monotonia sirurilor

Definiție: Un sir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **constant** dacă $u_{n+1} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definiție: Sirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **crescător** dacă $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **descrescător** dacă $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **monoton** dacă este crescător sau descrescător.

Un sir monoton (crescător sau descrescător) în care oricare doi termeni consecutivi sunt diferenți se numește **strict monoton** (respectiv, strict crescător, strict descrescător).

Observație: 1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător (respectiv, strict descrescător) $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (respectiv, $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$).

2. Pentru a studia monotonia unui sir putem folosi următoarele metode:

a) Studiem semnul diferenței a doi termeni consecutivi:

- dacă $u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci u_n este crescător;

- dacă $u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci u_n este descrescător.

b) Dacă $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, putem studia raportul a doi termeni consecutivi:

- dacă $u_{n+1} > u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci (u_n) este descrescător;

- dacă $u_{n+1} < u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci (u_n) este crescător.

3. Există siruri care nu sunt monotone, de exemplu, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $(u_n) = (-1)^n$.

Un sir nu este monoton dacă există $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 < n_3$, astfel încât:
 $a_{n_1} < a_{n_2} \text{ și } a_{n_2} > a_{n_3}$ (sau $a_{n_1} > a_{n_2} \text{ și } a_{n_2} < a_{n_3}$) .

1.3.3. Periodicitate

Definiție: Un sir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **periodic** dacă și numai dacă $\exists p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $u_{n+p} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Cel mai mic număr natural nenul p cu această proprietate se numește **perioada** sirului $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Observație: Un sir periodic neconstant nu este monoton.

1.3.4. Mărginire

Definiție: Un sir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **majorat (mărginit superior)** dacă $\exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât $u_n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}$.

Un sir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **minorat (mărginit inferior)** dacă $\exists b \in \mathbb{R}$ astfel încât $u_n \geq b, \forall n \in \mathbb{N}$.

Un sir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **mărginit** dacă este minorat și majorat.

Şirurile care nu sunt mărginite se numesc **nemărginite**.

Observații: 1. Un sir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit dacă $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0$ a.i. $|u_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Orice sir crescător are ca minorant primul său termen.

3. Orice sir descrescător are ca majorant primul său termen.

Definiție: Fie sirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea că $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. În aceste condiții, spunem că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este **majorat** de sirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar sirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este **minorat** de sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplu: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n = \frac{1}{n^2 + 1}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, b_n = \frac{1}{n^2}; a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

1.4. Limita unui sir. Siruri convergente

1.4.1. Siruri cu limită infinită

Definiție: Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir. Spunem că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tinde la ∞** (are limită ∞) pentru $n \rightarrow \infty$ și scriem $a_n \rightarrow \infty$, sau $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, dacă este adevărată oricare din următoarele propoziții:

1. orice vecinătate a lui ∞ conține toti termenii sirului cu excepția (eventual) unui număr finit dintre ei;
2. $\forall V \in \mathcal{V}(\infty), \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_V \Rightarrow a_n \in V$;
3. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_M \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_M \Rightarrow a_n > M$.

- Exemplu:**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = \infty$
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

Definiție: Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir. Spunem că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tinde la $-\infty$** (are limită $-\infty$) și scriem $a_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, dacă este adevărată oricare din următoarele propoziții:

1. orice vecinătate a lui $-\infty$ conține toti termenii sirului exceptând eventual unui număr finit dintre ei;
2. $\forall V \in \mathcal{V}(-\infty), \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_V \Rightarrow a_n \in V$;
3. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_M \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_M \Rightarrow a_n < M$.

- Exemplu:**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3 + 2) = -\infty$.

Propoziție: Sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tinde la ∞ dacă și numai dacă sirul $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tinde la $-\infty$.

Observație: Sirurile cu limită ∞ sau $-\infty$ nu sunt mărginile superioare (respectiv mărginile inferioare).

Sirurile care au limită ∞ , $-\infty$ sau care nu au limită se numesc **siruri divergente**.

Teoremă (criteriul minorării la ∞): Dacă sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este minorat prin sirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care tinde la ∞ , atunci sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tinde la ∞ . Adică, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_1, u_n \geq a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Observație: Un sir cu limită ∞ nu este neapărat crescător. De exemplu, $(a_n), a_n = n + (-1)^n; a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 2, \dots$

Teoremă (criteriul majorării la $-\infty$): Dacă sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este majorat prin sirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care tinde la $-\infty$, atunci sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tinde la $-\infty$. Adică, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_1, u_n \leq a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Observație: Un sir cu limită $-\infty$ nu este neapărat descrescător.

Exemplu: 1. sirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n = a \cdot n, a \neq 0$.

- dacă $a > 0$, atunci (u_n) este strict crescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$;
- dacă $a < 0$, atunci (u_n) este strict descrescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

2. sirul $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}, a > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$$

3. sirul $(\sqrt[k]{n})_{n \in \mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{n} = \infty$$