Luminița Curtui

# Memorator de
# - Analiză matematică și trigonometrie -
pentru clasele 9-12

Booklet
București, 2016

10. $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$;
11. $\cos(4\arccos x)=8x^4-8x^2+1,\ \forall x\in[-1, 1]$;
12. $\operatorname{arctg}x^2+\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2},\ \forall x\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$;
13. $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,\ \forall x\ge 1$.

## 9.8. Ecuaţii trigonometrice

Fie funcţia $f:E\to\mathbb{R}$, $x\to f(x)$, unde $E\subset\mathbb{R}$, iar $f(x)$ depinde de $x$ numai prin intermediul funcţiilor sin, cos, tg, ctg. O egalitate de forma $f(x)=0$ se numeşte **ecuaţie trigonometrică**.

***Ecuaţiile trigonometrice fundamentale:***

1. $\sin x=a$
- dacă $a\in(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$ ecuaţia nu are soluţii;
- dacă $a\in[-1,1]$, at. $x\in\{\arcsin a+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\arcsin a+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

În particular: $\sin x=1\Rightarrow x\in\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$;

$\sin x=-1\Rightarrow x\in\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$;

$\sin x=0\Rightarrow x\in\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

2. $\cos x=a$
- dacă $a\in(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$ ecuaţia nu are soluţii;
- dacă $a\in[-1, 1]$, atunci $x\in\{\pm\arccos a+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

În particular: $\cos x=1\Rightarrow x\in\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$;

$\cos x=-1\Rightarrow x\in\{(2k+1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$;

$\cos x=0\Rightarrow x\in\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

3. $\operatorname{tg}x=c\Rightarrow x\in\{\operatorname{arctg}c+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.



## Cuprins

**Editura Booklet**
**www.booklet.ro**

**Pentru comenzi:**

**tel:** 021 4303095
**e-mail:** comenzi@booklet.ro

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**
**CURTUI, LUMINIŢA**
**Memorator de analiză matematică şi trigonometrie /** Luminiţa Curtui. - Bucureşti : Booklet, 2015
**ISBN 978-606-590-300-5**

517(075.35)
514.116(075.35)

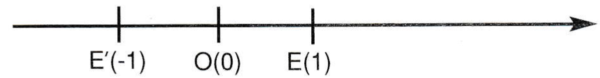




# 1. ŞIRURI DE NUMERE REALE

## 1.1. Dreapta reală

***Definiţie:*** *Se numeşte **axa numerelor (axa de coordonate)** o dreaptă pe care sunt fixate: un punct O (origine), un segment OE (de lungime unitate) şi un sens pozitiv (de la O spre E).*




Între mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ şi axa numerelor se poate stabili o corespondenţă biunivocă astfel:
- numărului 0 îi corespunde punctul O;
- numărului pozitiv a îi corespunde punctul de pe semidreapta OE situat la distanţa a de O;
- numărului negativ b îi corespunde punctul de pe semidreapta OE′ situat la distanţa -b de O.

Punctul P(x) asociat numărului real x se numeşte **imaginea** lui x, iar numărul x se numeste **abscisa** punctului P(x).

***Observaţii:***
1. Dintre două puncte de pe axa numerelor, abscisa celui din dreapta este mai mare decât abscisa celuilalt punct.
2. Distanţa dintre P(x) si O este: $d(P(x),O)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$.
3. Distanţa dintre punctele P(x) şi P(y) este $d(P(x), P(y))=|x-y|$

***Teoremă (Proprietăţile modulului):*** Pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$:
1. $|x|=0\Leftrightarrow x=0$;
2. $|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$;
3. $|-x|=|x|$;
4. $|xy|=|x|\cdot|y|$;
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $y\neq 0$;
6. $|x|=y,\ y>0\Rightarrow x\in\{-y,\ y\}$;

7. $|x|\le y,\ y>0 \Leftrightarrow -y\le x\le y$;
8. $-|x|\le x\le |x|$;
9. $|x+y|\le |x|+|y|$;
10. $||x|-|y||\le |x-y|$.

***Definiție:*** *Notăm* $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$; $\overline{\mathbb{R}}$ *se numește **dreaptă reală încheiată**.*

▪ Pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ considerăm:

- $-\infty < x < \infty$;
- $x+\infty=\infty+x=\infty$
- $x-\infty=-\infty+x=-\infty$
- $x\cdot\infty=\infty\cdot x=\begin{cases}\infty, & x>0\\ -\infty, & x<0\end{cases}$
- $\dfrac{x}{\infty}=\dfrac{x}{-\infty}=0$
- $\infty+\infty=\infty$;
- $-\infty-\infty=-\infty$;
- $\infty\cdot\infty=\infty$;
- $-\infty\cdot\infty=-\infty$;
- $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$;

▪ Nu se definesc și nu au sens:

- $\infty-\infty$;
- $-\infty+\infty$;
- $0\cdot(\pm\infty)$;
- $(\pm\infty)\cdot 0$;
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$;
- $\dfrac{0}{0}$;

## 1.2 Mărginire. Marginile unei mulțimi.

### *1.2.1. Ordonarea numerelor reale*

***Teoremă*** ***(Proprietățile relației de ordine pe $\mathbb{R}$):*** $\forall\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$:
1. $a\le a$
2. $a\le b$ sau $b\le a$ (relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este totală)
3. $a\le b$ și $b\le a \Rightarrow a=b$
4. $a\le b$ și $b\le c \Rightarrow a\le c$
5. $a\le b \Rightarrow a+c\le b+c$
6. $a\ge 0$ și $b\ge 0 \Rightarrow a\cdot b\ge 0$
7. $a\ge 0$ și $b\le 0 \Rightarrow a\cdot b\le 0$
8. $a\le 0$ și $b\le 0 \Rightarrow a\cdot b\ge 0$
9. $a\le b,\ c\le d \Rightarrow a+c\le b+d$
10. $a\le b,\ c\ge 0 \Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$
11. $a\le b,\ c\le 0 \Rightarrow a\cdot c\ge b\cdot c$



12. $0<a\le b \Rightarrow \dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$.

***Definiție:*** *Fie* $A\ne\emptyset$, $A\subset\mathbb{R}$.
*Un număr real m se numește **minorant** pentru A, dacă m este mai mic sau egal decât orice număr din A* ($m\le x,\ \forall x\in A$).
*Un număr real M se numește **majorant** pentru A, dacă M este mai mare sau egal decât orice număr din A* ($M\ge x,\ \forall x\in A$).
*A se numește **mărginită superior (majorată)** dacă admite majorant.*
*A se numește **mărginită inferior (minorată)** dacă admite minorant.*
*A se numește **mărginită** dacă este mărginită superior și inferior.*
*O mulțime nevidă care nu este mărginită se numește **nemărginită**.*

***Observație:*** O mulțime este nemărginită dacă nu este mărginită superior sau nu este mărginită inferior.

***Exemple:*** 1. $A=\{1,2,3\}$ este mărginită ($\exists 1\in\mathbb{R}$ a.î. $1\le x,\ \forall x\in A$ și $\exists 3\in\mathbb{R}$ a.î. $3\ge x,\ \forall x\in A$).
2. $(-\infty,0]$ nu este mărginită ($\exists 0\in\mathbb{R}$ a.î. $0\ge x,\ \forall x\in(-\infty,0]$, dar $\forall m\in\mathbb{R},\ \exists x\in(-\infty,0]$ a.î. $x\le m$ - mulțimea este mărginită superior, dar nu este mărginită inferior).

***Teoremă:*** *Fie* $A\subset\mathbb{R}$, $A\ne\emptyset$.
*1. Sunt echivalente afirmațiile:*
*i) mulțimea A este mărginită;*
*ii)* $\exists a,b\in\mathbb{R}$ a.î. $a\le x\le b,\ \forall x\in A$;
*iii)* $\exists M\in\mathbb{R}_+^*$ a.î. $|x|\le M,\ \forall x\in A$.
*2. Mulțimea nevidă A este nemărginită dacă și numai dacă*
$\forall M\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists x_M\in A$ cu $|x_M|>M$.

***Definiție:*** *Fie* $A\subset\mathbb{R}$, $A\ne\emptyset$.
*Numărul* $m\in\mathbb{R}$ *se numește **minimul** mulțimii A și se notează min A dacă m este minorant pentru A și* $m\in A$.

*Numărul* $M \in \mathbb{R}$ *se numește* ***maximul*** *mulțimii A și se notează max A dacă M este majorant pentru A și* $M \in A$.

***Observație:*** Minimul (maximul), dacă există, este unic.

***Definiție***: *Fie* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.
*Se numește* ***infimum (margine inferioară)*** *pentru mulțimea A (și se notează inf A) cel mai mare minorant (dacă există) al mulțimii A.*
*Se numește* ***supremum (margine superioară)*** *pentru mulțimea A (notat supA) cel mai mic majorant (dacă există) al mulțimii A.*

***Obervații:*** 1. Dacă $\exists$ inf A și $\inf A \in A$, atunci $\inf A = \min A$.
2. Dacă $\exists$ sup A și $\sup A \in A$, atunci $\sup A = \max A$.

***Axioma lui Cantor:*** *Orice mulțime de numere reale, nevidă, mărginită superior admite supremum.*

***Teoremă:*** *Orice mulțime nevidă de numere reale, mărginită inferior admite infimum.*

***Consecință:*** $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ și A mărginită $\Rightarrow \exists$ inf A și sup A.

***Teorema lui Arhimede:*** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\alpha < n \cdot \beta$.

***Propoziție:*** Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există un unic număr întreg p astfel încât $p \leq x < p+1$; p se numește **partea întreagă** a lui x și se notează $p=[x]$.

***Teoremă (de densitate a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$):*** $\forall a,b \in \mathbb{R}$ *cu* $a<b$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ *astfel încât* $a<q<b$.

### *1.2.2. Vecinătăți*

***Definiție:*** *Se numește* ***vecinătate*** *a numărului real a mulțimea de numere reale V care conține un interval deschis centrat în a.*
*(V este vecinătatea lui* a $\Leftrightarrow \exists r > 0$ a.î. $(a-r,a+r) \subset V$)

Notăm cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea vecinătăților numărului x.

***Observație:*** Intervalele siometrice (bilele) de centru a și rază r, notate $B(a,r)=(a-r,a+r)$, sunt vecinătăți ale punctului a.



***Consecință:*** O mulțime V nu este vecinătate a punctului a dacă $\forall r > 0$, $B(a, r) \not\subset V$.

***Propoziție:*** Intervalele deschise (a, b) sunt vecinătăți pentru orice punct al lor.

***Observații:*** 1. $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $\exists V_x \in \mathcal{V}(x)$, $V_y \in \mathcal{V}(y)$ a.î. $V_x \cap V_y = \emptyset$ (două puncte diferite au două vecinătăți disjuncte).
2. $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} V = \{x\}$. (intersecția tuturor vecinătăților unui punct este chiar punctul).

***Observație:*** Se pot defini vecinătățile lui $-\infty$ sau $\infty$ astfel: se numește vecinătate a lui $\infty$ (respectiv $-\infty$) orice mulțime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $(b,\infty]$ (respectiv de forma $[-\infty,b)$), unde $b \in \mathbb{R}$.

***Definiție:*** *Fie* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. *Un element* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numește* ***punct de acumulare*** *pentru mulțimea A dacă în orice vecinătate a lui x există cel puțin un punct din* $A-\{x\}$.($x \in \overline{\mathbb{R}}$ punct de acumulare pentru $A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap (A-\{x\}) \neq \emptyset$.).
*Un element* $x \in A$ *care nu este punct de acumulare pentru A se numește* ***punct izolat*** *al lui A.*

***Observație:*** Notăm A′ mulțimea punctelor de acumulare ale lui A.

## 1.3 Noțiunea de șir

### *1.3.1. Modalitățile de a defini un șir*

***Definiție:*** *Se numește* ***șir de numere reale (șir numeric, șir real)*** *o funcție reală definită pe* $\mathbb{N}$ *sau* $\mathbb{N}^*$ ($u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sau* $u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$).
*Imaginea lui n prin funcția u se notează cu* $u_n$ *și se numește* ***termenul de rang n.***

***Observații:*** 1. Indicele n din $u_n$ arată poziția (sau rangul) termenului în șir.
2. Șirul se notează $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sau $(u_n)$.

***Observație:*** Dacă $I \subset \mathbb{N}$, I infinită și $k_1<k_2<\ldots<k_n<\ldots$ elementele lui I, atunci funcția $u: I \to \mathbb{R}$ este un șir de numere reale, $u(k_n)=n_{k_n}$.

Șirurile pot fi definite prin:

1. Formula termenului general:

   Exemplu: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n = \frac{1}{1+n^2}$. Putem calcula termenii șirului: $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{5}, u_3 = \frac{1}{10}, u_4 = \frac{1}{17}, \ldots 3$

2. O relație de recurență:

   Exemplu: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_0=3$, $u_{n+1}=(-2)\cdot u_n$.
   Atunci: $u_1=(-2)\cdot 3$, $u_2=(-2)^2\cdot 3$, $u_3=(-2)^3\cdot 3, \ldots$

3. Cu ajutorul primilor termeni

   Exemplu: 2, 3, 5, 7, 11, 13 ... este șirul numerelor prime.

### 1.3.2. Monotonia șirurilor

***Definiție:*** *Un șir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **constant** dacă $u_{n+1}=u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*

***Definiție:*** *Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **crescător** dacă $u_{n+1}\geq u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*
*Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **descrescător** dacă $u_{n+1}\leq u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*
*Șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **monoton** dacă este crescător sau descrescător.*
*Un șir monoton (crescător sau descrescător) în care oricare doi termeni consecutivi sunt diferiți se numește **strict monoton** (respectiv, strict crescător, strict descrescător).*

***Observație:*** 1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător (respectiv, strict descrescător) $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}>u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (respectiv, $u_{n+1}<u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$).

2. Pentru a studia monotonia unui șir putem folosi următoarele metode:

   a) Studiem semnul diferenței a doi termeni consecutivi:
   - dacă $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ atunci $u_n$ este crescător;
   - dacă $u_{n+1} - u_n \leq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, atunci $u_n$ este descrescător.



   b) Dacă $u_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, putem studia raportul a doi termeni consecutivi:
   - dacă $u_n>0$ și $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n\in\mathbb{N}$, atunci $(u_n)$ este descrescător;
   - dacă $u_n>0$ și $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1, \forall n\in\mathbb{N}$, atunci $(u_n)$ este descrescător.

3. Există șiruri care nu sunt monotone, de exemplu, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(u_n)=(-1)^n$.
   Un șir nu este monoton dacă există $n_1$, $n_2$, $n_3\in\mathbb{N}$, $n_1<n_2<n_3$, astfel încât:
   $a_{n_1} < a_{n_2}$ și $a_{n_2}>a_{n_3}$ (sau $a_{n_1}>a_{n_2}$ și $a_{n_2}<a_{n_3}$) .

### 1.3.3. Periodicitate

***Definiție:*** *Un șir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **periodic** dacă și numai dacă $\exists p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $u_{n+p}=u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*
*Cel mai mic număr natural nenul p cu această proprietate se numește **perioada** șirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

***Observație:*** Un șir periodic neconstant nu este monoton.

### 1.3.4. Mărginire

***Definiție:*** *Un șir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **majorat** (**mărginit superior**) dacă $\exists a\in\mathbb{R}$ astfel încât $u_n\leq a$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*
*Un șir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **minorat** (**mărginit inferior**) dacă $\exists b\in\mathbb{R}$ astfel încât $u_n\geq b$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*
*Un șir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **mărginit** dacă este minorat și majorat.*
*Șirurile care nu sunt mărginite se numesc **nemărginite**.*

***Observații:*** 1. Un șir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă $\exists M\in\mathbb{R}$, $M>0$ a.î. $|u_n|\leq M, \forall n\in\mathbb{N}$.

2. Orice șir crescător are ca minorant primul său termen.
3. Orice șir descrescător are ca majorant primul său termen.

**Definiție:** *Fie şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea că $\exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $a_n\le b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge n_0$. În aceste condiții, spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **majorat** de şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iar şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **minorat** de şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Exemplu:** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, a_n=\frac{1}{n^2+1}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, b_n=\frac{1}{n^2}$; $a_n\le b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge 1$.

## 1.4. Limita unui şir. Şiruri convergente

### *1.4.1. Şiruri cu limită infinită*

**Definiție:** *Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir. Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tinde la $\infty$** (are limita $\infty$) pentru $n\to\infty$ şi scriem $a_n\to\infty$, sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, dacă este adevărată oricare din următoarele propoziții:*

1. *orice vecinătate a lui $\infty$ conține toți termenii şirului cu excepția (eventual) unui număr finit dintre ei;*
2. $\forall V\in\mathcal{V}(\infty)$, $\exists n_V\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n\in\mathbb{N}, n>n_V \Rightarrow a_n\in V$;
3. $\forall M\in\mathbb{R}$, $\exists n_M\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n\in\mathbb{N}, n>n_M \Rightarrow a_n>M$.

**Exemple:** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\infty$

**Definiție:** *Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir. Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tinde la $-\infty$** (are limita $-\infty$) şi scriem $a_n\to\infty$, $n\to\infty$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$, dacă este adevărată oricare din următoarele propoziții:*

1. *orice vecinătate a lui $-\infty$ conține toți termenii şirului exceptând eventual unui număr finit dintre ei;*
2. $\forall V\in\mathcal{V}(-\infty)$, $\exists n_V\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n\in\mathbb{N}, n>n_V \Rightarrow a_n\in V$;
3. $\forall M\in\mathbb{R}$, $\exists n_M\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n\in\mathbb{N}, n>n_M \Rightarrow a_n<M$.

**Exemple:** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$ ; 2. $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3+2)=-\infty$.



**Propoziție:** Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tinde la $\infty$ dacă şi numai dacă şirul $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tinde la $-\infty$.

**Observație:** Şirurile cu limita $\infty$ sau $-\infty$ nu sunt mărginite superior (respectiv mărginite inferior).

Şirurile care au limita $\infty$, $-\infty$ sau care nu au limită se numesc **şiruri divergente.**

**Teoremă** ***(criteriul minorării la $\infty$):*** *Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este minorat prin şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care tinde la $\infty$, atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tinde la $\infty$. Adică,* $\exists n_1\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\ge n_1$, $u_n\le a_n$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

**Observație:** Un şir cu limita $\infty$ nu este neapărat crescător. De exemplu, $(a_n)$, $a_n=n+(-1)^n$; $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=2$, ...

**Teoremă** ***(criteriul majorării la $-\infty$):*** *Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este majorat prin şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care tinde la $-\infty$, atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tinde la $-\infty$. Adică,* $\exists n_1\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\ge n_1$, $u_n\ge a_n$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

**Observație:** Un şir cu limita $-\infty$ nu este neapărat descrescător.

**Exemple:** 1. şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n=a\cdot n$, $a\neq 0$.

- dacă $a>0$, atunci $(u_n)$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$;
- dacă $a<0$, atunci $(u_n)$ este strict descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-\infty$.

2. şirul $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a>1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n=+\infty$

3. şirul $(\sqrt[k]{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{n}=\infty$