Marius PERIANU • Dinu ȘERBĂNESCU • Marian ANDRONACHE
Cătălin CIUPALĂ • Emil CIOLAN • George MIHAI

Matematică

pentru Bacalaureat

M 3

Filiera tehnologică,
toate profilurile și specializările

art
educațional

Cuprins

Algebră / Geometrie

Clasele IX–X

1

Tema 1.1

Mulțimi de numere.
Mulțimi și elemente de logică matematică

Modulul unui număr real

Definiție. *Modulul* numărului real x este numărul $|x|=\begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

3. $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x se numește *partea întreagă* a lui x. Se notează: $[x] = \max\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\}$.

Numărul real $\{x\} = x - [x]$ se numește *partea fracționară* a lui x.

Proprietăți

1a. $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

2a. $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

3a. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

4a. $[x + n] = [x] + n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$;

1b. $\{x\} \in [0,1), \forall x \in \mathbb{R}$;

2b. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

3b. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$,

4b. $\{x + n\} = \{x\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$.

Probleme propuse

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) p : „$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \in \mathbb{N}$“. ***b)*** q : „$\sqrt{2} + 2 \in \mathbb{Q}$“. ***c)*** r : „$\frac{1}{\sqrt{3}+2} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} \in \mathbb{Z}$“.

2. Transformați în fracție zecimală:

a) $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{50}$; ***b)*** $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{11}$; ***c)*** $\frac{1}{6}, \frac{2}{15}, \frac{3}{28}$.

3. Transformați în fracție ordinară ireductibilă:

a) $0{,}75$; $0{,}4$; $0{,}14$; ***b)*** $0{,}(6)$; $0{,}(571428)$; $0{,}(27)$;

c) $0{,}1(6)$; $0{,}1(3)$; $0{,}10(714285)$.

4. Calculați:

a) $\left[\sqrt{2019}\right] + \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \left\{-\sqrt{2}\right\}$; ***b)*** $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt{100}\right]$;

c) $\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2018 \cdot 2019}\right]$; ***d)*** $\left[\sqrt{2018}\right] + 3 \cdot \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

5. Notăm cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a. Determinați mulțimile:

a) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid [x]=1\}$; *b)* $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid [x]=1\}$.

6. Arătați că $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

7. *a)* Arătați că $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că, dacă $[x+a]=[x+b]$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci $a=b$.

8. Determinați cel mai mic element al mulțimii $M=\{x\in\mathbb{R} \mid (x+2)(x^2-4)\geq 0\}$.

9. Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, (x-1)\left(x-\frac{10}{3}\right)\leq 0\right\}$. Determinați cel mai mare element al mulțimii $B=\{|a-b| \mid a,b\in\mathbb{Z},\ a<b,\ [a,b]\subset A\}$.

10. Determinați numerele naturale din mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}<x\leq 2\right\}$.

11. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R} \mid |x|<2\}$ și $B=[-3,0)$. Determinați $A\cap B\cap\mathbb{Z}$.

12. Se consideră mulțimile $A=\{0,2,4,6,...,50\}$ și $B=\{0,3,6,9,...,48\}$. Aflați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile A, B, $A\cap B$ și $A\cup B$.

13. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2...$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$.

14. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{4}{11}=a_0,a_1a_2...$. Determinați suma elementelor mulțimii $A=\{a_0,a_1,a_2,...\}$.

15. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\{1;2\}\subseteq\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+mx+4=0\}$.

16. Determinați perechile $(m,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $\{1;2\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+mx+n=0\}$.

17. Determinați $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-ax+4=0\}\cap\{0,1,2,...,2011\}\neq\varnothing$.

18. Determinați $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pentru care $x^2+2xy+2y^2=0$.

19. Dați exemplu de două numere iraționale a și b care îndeplinesc condițiile $a+b\in\mathbb{N}^*$ și $a\cdot b\in\mathbb{Z}$.

20. Ordonați crescător numerele.

a) $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\ \sqrt{5}$; *c)* $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$.

Tema 1.2
Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale (şiruri)

1. Şiruri

Definiţie. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este:

- *monoton crescător*, dacă $x_n \leq x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *monoton descrescător*, dacă $x_n \geq x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *strict crescător*, dacă $x_n < x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *strict descrescător*, dacă $x_n > x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;

Definiţie. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este:

- *mărginit inferior*, dacă există un număr real m astfel încât $x_n \geq m$, $\forall n \geq 1$;
- *mărginit superior*, dacă există un număr real M astfel încât $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit atât inferior, cât şi superior se numeşte *şir mărginit*.

2. Progresii aritmetice

Definiţie. Şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie aritmetică de raţie r*, dacă $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \geq 1$ (adică diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este constantă).

Proprietăţi ale progresiilor aritmetice

1. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $\forall n \geq 1$.

2. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.

3. $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + r\dfrac{n(n-1)}{2}$, $\forall n \geq 1$, unde $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

4. $n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1$, $\forall n \geq 1$, $r \neq 0$.

3. Progresii geometrice

Definiţie. Şirul de numere reale nenule $(b_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie geometrică de raţie q*, dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (adică raportul oricăror doi termeni consecutivi este constant).

Proprietăţi ale progresiilor geometrice

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

2. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2$.

3. $S_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$, unde $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$.

Probleme propuse

1. Determinați al unsprezecelea termen al șirului 1, 6, 11, 16,... .

2. Calculați sumele:
a) $1+4+7+\ldots+31$; *b)* $1+3+5+\ldots+31$; *c)* $1+11+21+\ldots+131$.

3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $a_3=5$ și $a_6=11$. Calculați a_{11}.

4. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație 2, cu $a_3+a_4=10$. Aflați a_1.

5. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_5=17$ și $a_{13}=41$.
a) Determinați a_3.
b) Stabiliți dacă numărul 2018 este termen al progresiei.
c) Calculați suma $T=a_2+a_5+a_8+\ldots+a_{2018}$.

6. Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_4-a_2=6$ și $a_1+a_3+a_5+a_6=37$.

7. Determinați în fiecare caz $x\in\mathbb{R}$, știind că fiecare dintre următoarele triplete este format din termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice:
a) $x, (x-1)^2, x+2$; *b)* $x, 2x-5, x-4$;
c) $x-1, x+1, 2x-1$; *d)* $x+1, 1-x, 4$.

8. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1=-6$ și $r=2$. Calculați produsul primilor zece termeni.

9. Aflați $a\in\mathbb{R}$ pentru care numerele 2^a, $2^{-a+1}+1$, $2^{a+2}+1$ sunt în progresie aritmetică.

10. Calculați sumele:
a) $A=1+4+7+\ldots+100$; *b)* $B=2+6+10+\ldots+2018$;
c) $C=1+3+5+\ldots+(2n+3)$, $n\in\mathbb{N}^*$; *d)* $D=1+5+9+\ldots+(4n-3)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

11. Aflați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_{10}-a_3=14$.

12. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1=3$ și $a_3=7$. Aflați suma primilor zece termeni.

13. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$. Știind că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $a_1+a_2+\ldots+a_n=n^2+n$, demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

14. Determinați numărul natural x din egalitățile:
a) $1+5+9+\ldots+x=780$; *b)* $1+3+5+\ldots+x=625$;
c) $x+(x+1)+\ldots+(x+x)=165$; *d)* $2+5+8+\ldots+x=155$.

15. Determinați al zecelea termen al șirului $x_1, x_2, 7, 10, 13,\ldots$.

16. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_4+a_{18}=10$, calculați a_6+a_{16}.

17. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3+a_{19}=10$, calculați S_{21}.

18. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_2 + a_3 + a_{19} + a_{20} = 8$. Calculați:

a) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{21}$; *b)* $a_2 + a_4 + \ldots + a_{20}$.

19. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 1$, și $S_{10} = 145$. Calculați a_{11}.

20. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $r = 3$, și $S_{11} = 176$. Calculați a_{11}.

21. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică și 2, 4, a sunt în progresie aritmetică.

22. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele a, b, 12 sunt în progresie geometrică și 1, a, 5 sunt în progresie aritmetică.

23. Determinați al cincilea termen al progresiei geometrice în care $b_1 = 32$ și $q = \frac{1}{2}$.

24. Determinați $x > 0$ știind că numerele $1,\ x-1, x+5$ sunt în progresie geometrică.

25. Fie ecuația $x^2 - 4x + a = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2.

Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ știind că $x_1, x_2, 3x_2$ sunt în progresie geometrică.

26. Fie ecuația $x^2 + ax + 2 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2.

Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că x_1, x_2, x_2^2 sunt în progresie geometrică.

27. Determinați primul termen al șirului $a_1, a_2, 4, 8, 16, 32, \ldots$.

28. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 54, \ldots$.

29. Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2018}}$. Arătați că $s \in (1, 2)$.

30. Arătați că $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} > \frac{2}{3}$.

31. Fie $a = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4}$ și $b = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5}$. Calculați $[a] + [b]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

32. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$. Aflați b_1 și rația q dacă:

a) $\begin{cases} b_2 - b_1 = 2 \\ b_3 - b_1 = 8 \end{cases}$; *b)* $\begin{cases} b_4 - b_1 = 7 \\ b_3 + b_2 + b_1 = 7 \end{cases}$; *c)* $\begin{cases} b_4 + b_1 = 28 \\ b_3 - b_2 + b_1 = 7 \end{cases}$.

33. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 4$ și $b_3 + b_4 = 36$.

34. Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Știind că $d - a = 13$ și $c - b = 3$, determinaţi rația progresiei.

35. Se consideră progresia geometrică cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\geq 0}$ și $S_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$, astfel încât $b_4 - b_0 = 15$ și $b_2 + b_0 = 5$.

a) Determinați b_2. *b)* Calculați S_8.

36. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_4 = 8$ și $b_6 = 2$. Aflați b_2.

37. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai unei progresii geometrice știind că rația este egală cu 2, iar suma primilor patru termeni este egală cu 15.

38. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 6$ și $b_5 = 54$, determinați termenul b_7.

39. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$. Calculați $f(2)+f(2^2)+\ldots+f(2^9)$.

40. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$. Calculați sumele:

a) $S_1 = f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(11)$;

b) $S_2 = f\left((-3)^0\right)+f\left((-3)^1\right)+f\left((-3)^2\right)+\ldots+f\left((-3)^{10}\right)$.

41. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x-1$. Calculați sumele:

a) $S_1 = f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$;

b) $S_2 = f(0)-f(1)+f(2)-f(3)+\ldots+f(50)$;

c) $S_3 = f(2^0)-f(2^1)+f(2^2)-f(2^3)+\ldots+f(2^9)$.

4.1

Modele de teste similare testelor date la Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I

1. Arătați că $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{36}{7}=3$.

2. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,\ 0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=3$.

4. Fie mulțimea $M=\{0,10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M, acesta să fie multiplu de 20.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$ și $B(5,4)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

6. Arătați că $\sin x=\frac{5}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{12}{13}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=-2$.

b) Arătați că $A+B=C$.

c) Demonstrați că $AB+BA+4I_2=5C$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy-4x-4y+20$.

a) Arătați că $5\circ 4=4$.

b) Arătați că $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-3x^2+5$.

a) Arătați că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-3x^2$.

a) Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+3x^2\right)dx=15$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=2015$.

c) Determinați numărul natural n, $n>1$ știind că $\int_1^n\left(\frac{f(x)}{x^2}dx\right)=3$.

4.2

Teste de antrenament pentru pregătirea Bacalaureatului

Testul 1

Subiectul I

1. Calculați $\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2$.

2. Se consideră ecuația $x^2-6x+8=0$. Calculați $x_1^2+x_2^2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației date.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=2$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{11, 12,\dots, 50\}$, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 6.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$ și $C(3, 0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

6. Calculați $\cos 30° + \cos 60° + \cos 120° + \cos 150°$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, și $B=\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A)=1$.

b) Determinați numărul real x, pentru care $\det(B)=0$.

c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$, știind că $AX=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+2x+2y+2$.

a) Arătați că $x*y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

b) Determinați numărul real e astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice număr real x.

c) Calculați $(-5)*(-4)*\dots*0$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$, $x\in(0,\infty)$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $[1,\infty)$.

c) Demonstrați că $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=e(e-1)$.

Soluții

Capitolul 1. ALGEBRĂ/GEOMETRIE (clasele IX–X)

Tema 1.1 Mulțimi de numere. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Propoziția este falsă *b)* Propoziția este falsă. *c)* Propoziția este adevărată, $\frac{1}{\sqrt{3}+2}-\frac{1}{\sqrt{3}-2}=4$. **2.** *a)* $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{2}{5}=0{,}4$, $\frac{7}{50}=0{,}14$; *b)* $\frac{2}{3}=0{,}(6)$, $\frac{4}{7}=0{,}(571428)$, $\frac{3}{11}=0{,}(27)$; *c)* $\frac{1}{6}=0{,}1(6)$, $\frac{2}{15}=0{,}1(3)$, $\frac{3}{28}=0.10(714285)$. **3.** *a)* $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{50}$; *b)* $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{11}$; *c)* $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{28}$.
4. *a)* $\left[\sqrt{2019}\right]+\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left\{-\sqrt{2}\right\}=44+\left(2+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}+2\right)=42$. *b)* $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{100}\right]=3\cdot1+5\cdot2+$ $+7\cdot3+\ldots+19\cdot9+10=625$. *c)* $\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot2019}\right]=\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right]=$ $=\left[1-\frac{1}{2019}\right]=0$. *d)* $\left[\sqrt{2019}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}=44+3\left(\frac{-1}{3}-(-1)\right)=46$. **5.** *a)* $x\in[1,2)$, $A=[1,2)$. *b)* $x\in[1,2)\cap\mathbb{Z}$, $A=\{1\}$. **6.** $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n\Leftrightarrow n\le n^2+n<(n+1)^2$, inegalități care sunt evidente. **7.** *a)* Fie $[x]=k$, $k\in\mathbb{Z}$. Dacă $x\in\left[k,k+\frac{1}{2}\right)$, atunci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k$ și $[2x]=2k$. Dacă $x\in\left[k+\frac{1}{2},k+1\right)$, atunci $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k+1$ și $[2x]=2k+1$. În ambele cazuri, se verifică egalitatea $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$. *b)* Dacă $x=-a$ avem $[-a+b]=0\Rightarrow b\ge a$. Pentru $x=-b$, avem $[a-b]=0\Rightarrow b\le a$. Ca urmare, $a=b$. **8.** $M=\{-2\}\cup[2,+\infty)$; $\min M=-2$. **9.** $A=\left[1,\frac{10}{3}\right]$; $B=\{0,1,2\}$; $\max B=2$. **10.** $A\cap\mathbb{N}=\{1,2\}$. **11.** $A=(-2,2)$; $A\cap B\cap\mathbb{Z}=\{-1\}$. **12.** $\text{card}\,A=26$, $\text{card}\,B=17$, $\text{card}(A\cap B)=9$ și $\text{card}(A\cup B)=$ $=\text{card}\,A+\text{card}\,B-\text{card}(A\cap B)=34$. **13.** $\frac{1}{7}=0{,}(142857)\Rightarrow\text{card}\,A=6$. **14.** $\frac{4}{11}=0{,}(36)$ deci suma cerută este egală cu 9. **15.** Numerele 1 și 2 sunt printre rădăcinile ecuației $x^2+mx+4=0$, deci $m\in\{-5,-4\}$. **16. Soluția 1.** Înlocuind soluțiile 1 și 2 în ecuația $x^2+mx+n=0$, obținem sistemul $\begin{cases}m+n+1=0\\2m+n+4=0\end{cases}\Rightarrow(m,n)=(-3,2)$. **Soluția 2.** $n=x_1\cdot x_2=2$ și $-m=x_1+x_2=3$. **17.** Observăm că soluțiile întregi ale ecuației se găsesc printre divizorii lui 4, deci soluțiile posibile sunt 1,2 sau 4, adică $a\in\{4,5\}$. **18.** $x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2=0\Rightarrow$ $(x,y)=(0,0)$. **19.** $a=2+\sqrt{3}$ și $b=2-\sqrt{3}$. **20.** *a)* $\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}$; *b)* $\frac{1}{2}<\sqrt{5}<\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; *c)* $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$.

Tema 1.2 Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)

1. $a_{11}=1+50=51$. **2.** *a)* $1+(n-1)3=31\Rightarrow n=11\Rightarrow S_{11}=176$; *b)* $S_{14}=924$; *c)* $S_{14}=924$.
3. $a_6-a_3=3r\Rightarrow r=2\Rightarrow a_{11}=a_6+5r=21$. **4.** $2a_1+5r=10$; $r=2$, deci $a_1=0$.
5. *a)* Fie r rația progresiei. $a_{13}-a_5=8r=24\Rightarrow r=3$; $a_5=a_1+4r=17\Rightarrow a_1=5$; $a_3=a_1+2r=11$.