Marius PERIANU
Costel ANGHEL
Grațian SAFTA
Lucian PETRESCU

ESENȚIAL
Matematică
clasa a VIII-a

I

CLUBUL MATEMATICIENILOR

art educațional

Referenți științifici:
prof. drd. Livia Harabagiu
prof. gr. I Mircea Popescu
prof. gr. I Liviu Adrian Stroie

Tehnoredactare:
Cornel Drăghia

Coperta:
Alexandru Daş

ISBN 978-606-8948-39-3

Tiparul executat la:

EuroBusiness Tiper

office@tipografiaeurobusiness.ro
www.tipografiaeurobusiness.ro

Pentru **comenzi** vă puteți adresa:

Departamentului Difuzare
C.P. 22, O.P. 84, sector 61, București

telefon
021.224.17.65
0721.213.576
0744.300.870

CUPRINS

CAPITOLUL 1
NUMERE REALE

1.1. Mulţimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea numerelor reale
1.3. Modulul unui număr real
1.4. Intervale de numere reale
Teste de evaluare
Fişă pentru portofoliul individual
1.5. Operaţii cu numere reale
1.6. Raţionalizarea numitorilor
Teste de evaluare
Fişă pentru portofoliul individual
1.7. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere
1.7.1. Adunarea şi scăderea
1.7.2. Înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la putere
1.8. Formule de calcul prescurtat
1.9. Descompunerea în factori
Teste de evaluare
Fişă pentru portofoliul individual
1.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea
1.11. Operaţii cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere
1.11.1. Adunarea şi scăderea
1.11.2. Înmulţirea şi împărţirea
1.11.3. Ordinea efectuării operaţiilor
Teste de evaluare
Fişă pentru portofoliul individual
1.12. Probleme cu caracter aplicativ
1.13. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade

CAPITOLUL 1 Numere reale

1.1. Mulţimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Mulţimea numerelor naturale

Notaţii. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ este *mulțimea numerelor naturale;*

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, ..., n, ...\}$ este *mulțimea numerelor naturale nenule.*

Observaţie. Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare* şi *înmulțire*, adică suma a două numere naturale este un număr natural, iar produsul a două numere naturale este tot un număr natural.

Mulţimea numerelor întregi

Notaţii. $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$ este *mulțimea numerelor întregi;*

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor întregi nenule.*

Observaţia 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z} = \{\pm n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^*$.

Observaţia 2. Mulţimea numerelor întregi este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere* şi *înmulțire*, adică suma, diferența şi produsul a două numere întregi sunt numere întregi.

Mulţimea numerelor raţionale

Notaţii. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ este *mulțimea numerelor raționale;*

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor raționale nenule.*

Observaţia 1. Mulţimea numerelor raționale este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere, înmulțire* şi *împărțire*, adică suma, diferența, produsul şi câtul a două numere raționale (dintre care împărțitorul este nenul) sunt numere raționale.

Observaţia 2. Pentru orice număr rațional nenul q există o *unică fracție ireductibilă* $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Observaţia 3. Un număr rațional poate fi reprezentat prin *fracții ordinare echivalente* sau printr-o *fracție zecimală finită* sau *periodică.*

Exemple. **a.** $\frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4$, fracție zecimală *finită;*

b. $\frac{250}{6} = \frac{125}{3} = 41,666... = 41,(6)$, fracție zecimală *periodică simplă;*

c. $\frac{1505}{6} = 250,8333... = 250,8(3)$, fracție zecimală *periodică mixtă.*

Mulţimea numerelor reale

Notaţii. $\mathbb{R}$ este *mulțimea numerelor reale*;
$\mathbb{R}^*$ este *mulțimea numerelor reale nenule*;
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ este *mulțimea numerelor iraționale*.

Observaţia 1. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Observaţia 2. Orice *număr irațional* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică*.

Observaţia 3. Reciproc, dacă un *număr real* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică*, atunci *numărul este irațional*.

CUNOAŞTERE ŞI EXERSARE

1. În dreptul fiecăreia dintre propozițiile de mai jos, înscrieți litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau **F** dacă propoziția este falsă:

a) $101\in\mathbb{N}$; ***b)*** $\sqrt{25}\notin\mathbb{Q}$; ***c)*** $1,(5)\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$;

d) $5^{-1}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; ***e)*** $\frac{24}{18}\in\mathbb{Z}$; ***f)*** $-\frac{6}{-2}\in\mathbb{N}$.

2. Înscrieți în celulele tabelului de mai jos cuvântul **da** sau **nu** în funcție de relația de apartenență a numerelor aflate pe prima coloană la mulțimile indicate pe prima linie:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-\sqrt{9}$							
$0,2$							
$1,(3)$							
$\sqrt{5}$							
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$							
$4\cdot\sqrt{0,25}$							
$\frac{4}{5}$							
$-\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$							

3. Se consideră secvența de numere: $-(-2)$; $-\frac{1}{3}$; $-\sqrt{9}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; $0,2013$; $-\sqrt{5^3}$; $1,(2)$; $2,0(3)$; $-\sqrt{0,25}$. Dintre acestea,

a) numerele naturale sunt ... ; ***b)*** numerele întregi și negative sunt ... ;

c) numerele iraționale sunt ... ; ***d)*** numerele raționale și neîntregi sunt ... .

4. Fie mulțimea $A=\left\{\sqrt{5};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1};\ 2,0(14);\ 0^{2014};\ -\sqrt{1\frac{7}{9}};\ \sqrt{5^2-4^2}\right\}$. Determinați elementele fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

a) $A\cap\mathbb{N}$; ***b)*** $A\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})$; ***c)*** $A\cap\mathbb{Q}$;

d) $A\cap(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})$; ***e)*** $A\cap\mathbb{Q}^*$; ***f)*** $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

5. Asociați fiecărei litere aflată în coloana din stânga cifra corespunzătoare aflată în coloana din dreapta astfel încât numărul real scris în dreptul literei să aparțină mulțimii scrise în dreptul cifrei:

A) $-\sqrt{(-3)^2}$ — **1)** $\mathbb{N}$
B) $5^{-1}+0,8$ — **2)** $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$
C) $0,1(6)$ — **3)** $\mathbb{Q}_-\setminus\mathbb{Z}$
D) $\sqrt{2^3+3^2}$ — **4)** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
5) $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$

6. Asociați fiecărei litere aflată în coloana din stânga numărul corespunzător aflat în coloana din dreapta astfel încât calculul scris în dreptul literei să aibă ca rezultat numărul aflat în dreptul cifrei:

A) suma dintre un număr real și opusul său — **1)** 1
B) inversul numărului 0,5 — **2)** 3
C) produsul dintre un număr real nenul și inversul său — **3)** 9
4) 2
D) rădăcina pătrată a numărului $\sqrt{81}$ — **5)** 0

7. Asociați fiecărei litere aflată în coloana din stânga numărul corespunzător aflat în coloana din dreapta astfel încât numărul real scris în dreptul literei să fie egal cu cel aflat în dreptul cifrei:

A) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ — **1)** 0,5
B) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ — **2)** 0,(6)
3) 0,(3)
C) $-\left(-\frac{1}{2}\right)$ — **4)** 0,75
D) $\sqrt{3^{-2}}$ — **5)** 1,5

8. Dintre următoarele fracții, indicați fracțiile reductibile:

a) $\frac{42}{24}$; ***b)*** $\frac{11}{12}$; ***c)*** $\frac{33}{18}$; ***d)*** $\frac{1005}{105}$;

e) $\frac{100}{92}$; ***f)*** $\frac{77}{30}$; ***g)*** $\frac{2013}{2014}$; ***h)*** $\frac{2424}{3636}$.

ACUMULARE ŞI CONSOLIDARE

9. Reprezentaţi sub formă de fracţie ordinară fiecare dintre numerele:

a) $5{,}2$; ***b)*** $11{,}22$; ***c)*** $3{,}(5)$; ***d)*** $2{,}(6)$;
e) $1{,}(02)$; ***f)*** $1{,}2(32)$; ***g)*** $2{,}3(2)$; ***h)*** $0{,}2(14)$.

10. Reprezentaţi sub formă de fracţie ordinară ireductibilă fiecare dintre numerele:

a) $1{,}2$; ***b)*** $0{,}75$; ***c)*** $1{,}(2)$; ***d)*** $0{,}(12)$;
e) $1{,}0(3)$; ***f)*** $0{,}1(3)$; ***g)*** $1{,}10(6)$; ***h)*** $3{,}1(45)$.

11. Transformaţi următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale, amplificându-le, eventual, convenabil:

a) $\frac{17}{10}$; ***b)*** $\frac{11}{50}$; ***c)*** $\frac{1}{20}$; ***d)*** $\frac{31}{25}$;
e) $\frac{11}{40}$; ***f)*** $\frac{2}{9}$; ***g)*** $\frac{41}{99}$; ***h)*** $\frac{25}{33}$.

12. Transformaţi următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale, simplificându-le, eventual, mai întâi:

a) $\frac{42}{20}$; ***b)*** $\frac{66}{200}$; ***c)*** $\frac{35}{500}$; ***d)*** $\frac{14}{18}$;
e) $\frac{18}{27}$; ***f)*** $\frac{100}{198}$; ***g)*** $\frac{21}{270}$; ***h)*** $\frac{37}{330}$.

13. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală:

a) $\frac{3}{4}$; ***b)*** $\frac{4}{5}$; ***c)*** $\frac{123}{6}$; ***d)*** $\frac{41}{6}$;
e) $\frac{30}{45}$; ***f)*** $\frac{51}{21}$; ***g)*** $\frac{12}{11}$; ***h)*** $\frac{12}{13}$.

14. Dintre următoarele fracţii, indicaţi fracţiile echivalente cu fracţia $\frac{2}{3}$:

a) $\frac{6}{9}$; ***b)*** $\frac{30}{20}$; ***c)*** $\frac{15}{25}$; ***d)*** $\frac{12}{18}$;
e) $\frac{36}{54}$; ***f)*** $\frac{8}{16}$; ***g)*** $\frac{-14}{-21}$; ***h)*** $-\frac{-100}{150}$.

15. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$ este echivalentă cu fracţia:

a) $\frac{12}{21}$; ***b)*** $\frac{26}{18}$; ***c)*** $\frac{120}{55}$; ***d)*** $\frac{77}{88}$;
e) $\frac{123}{321}$; ***f)*** $\frac{404}{303}$; ***g)*** $\frac{5000}{6000}$; ***h)*** $\frac{9898}{8989}$.

16. Scrieţi numerele raţionale de mai jos sub forma $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi $b \in \mathbb{N}^*$:

a) $\frac{-7}{-6}$; ***b)*** $-\frac{-41}{-23}$; ***c)*** $-2\frac{1}{11}$; ***d)*** $0{,}125$;
e) $1{,}(6)$; ***f)*** $-4{,}(56)$; ***g)*** $-5{,}2(6)$; ***h)*** $0{,}65(4)$.

17. Daţi câte un exemplu de :
a) număr întreg al cărui opus este număr natural;
b) număr raţional al cărui invers este număr întreg;
c) număr iraţional al cărui pătrat este număr natural;
d) număr real exprimat sub forma unei fracţii zecimale neperiodică şi infinită.

18. Reprezentaţi în baza 10 următoarele numere raţionale:

a) 321; ***b)*** $0{,}123$; ***c)*** $65{,}43$; ***d)*** $13{,}579$;
e) $20{,}(1)$; ***f)*** $3{,}(09)$; ***g)*** $0{,}1(2)$; ***h)*** $1{,}23(45)$.

Rezolvare. ***a)*** $321 = 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0$.

c) $65{,}43 = 6\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + 4\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} = 6\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + \frac{4}{10^1} + \frac{3}{10^2}$.

19. Determinaţi, în fiecare din situaţiile următoare, numerele întregi n pentru care relaţiile următoare reprezintă propoziţii adevărate:

a) $\frac{7}{n+1} \in \mathbb{N}$; ***b)*** $\frac{15}{2n-1} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; ***c)*** $\frac{10}{3n+1} \in \mathbb{Z}$;
d) $\frac{3n}{3n+1} \in \mathbb{Z}_+$; ***e)*** $\frac{4n+2}{4n-3} \in \mathbb{Z}$; ***f)*** $\frac{6n+15}{3n+2} \in \mathbb{N}$.

20. Numerele 12,12 ; 0,(12) şi 1,1(6) se scriu sub formă de fracţie zecimală.
a) Scrieţi a 100-a zecimală a fiecărui număr;
b) Determinaţi a 2013-a zecimală a fiecărui număr;
c) Calculaţi suma primelor 2014 zecimale pentru fiecare număr.

21. Daţi câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracţia $\frac{12}{n}$ este:

a) subunitară; ***b)*** ireductibilă; ***c)*** reductibilă;
d) zecimală finită; ***e)*** periodică simplă; ***f)*** periodică mixtă.

22. Aflaţi cel mai mic număr natural nenul a pentru care fracţiile $\frac{a}{8}$, $\frac{a}{6}$ şi $\frac{a}{12}$ reprezintă simultan numere naturale.

23. Scrieţi un număr raţional cuprins între $\frac{3}{5}$ şi $\frac{2}{3}$ sub formă de:

a) fracţie zecimală finită; ***b)*** fracţie zecimală periodică; ***c)*** fracţie ordinară.

24. Demonstraţi că numerele următoare sunt raţionale:

a) $\left(5\sqrt{27}+3\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$; ***b)*** $\left(8\sqrt{8}-18\sqrt{18}\right):\left(32\sqrt{32}\right)$;

c) $\left(\sqrt{\dfrac{25}{98}}+\sqrt{\dfrac{49}{32}}\right):\sqrt{2}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{a^2}}{|a|}$, unde $a\in\mathbb{R}^*$.

25. Stabiliți dacă numărul $\sqrt{A}$ este rațional în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $A=1^2+2^3$; *b)* $A=1+3+5+7+\ldots+2013$;

c) $A=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2014+2$; *d)* $A=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$.

26. Scrieți elementele mulțimilor:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{N}\mid x=\sqrt{n},\ n\in\{1,2,\ldots,10\}\right\}$; *b)* $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{x+6}{x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c) $C=\left\{x\in\mathbb{N}\mid x<10 \text{ și } \sqrt{x}\notin\mathbb{N}\right\}$; *d)* $D=\left\{x\in\mathbb{N}\mid \sqrt{x^2+1}\in\mathbb{N}\right\}$.

27. Determinați cifrele a, b, c astfel încât să aibă loc relațiile:

a) $\sqrt{\overline{baa}}\in\mathbb{N}$; *b)* $\sqrt{\overline{abc}}\ \vdots\ 10$; *c)* $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}\in\mathbb{N}$.

28. Se consideră numărul $a=\dfrac{12}{18}$ și mulțimea $A=\{a;2a;3a;\ldots;18a\}$.

a) Determinați numărul de elemente din mulțimea $A\cap\mathbb{N}$;
b) Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din A, acesta să fie număr natural.

APROFUNDARE ȘI DEZVOLTARE

29. Arătați că dacă $p\in\mathbb{Q}$, atunci numărul $\sqrt{(p^2+1)^2-(p^2-1)^2}$ este rațional.

30. Fie $n\geq 2$ un număr natural. Arătați că dacă numărul $x\in\mathbb{R}^*$ verifică relația $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{n^2+2}$, atunci $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\in\mathbb{N}$.

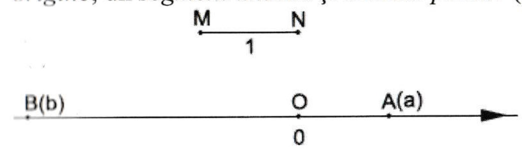
31. Înscrieți în celulele tabelului alăturat patru numere iraționale, respectând, în fiecare caz de mai jos, condițiile precizate:

a) sumele numerelor aflate pe fiecare linie, respectiv coloană să fie raționale;
b) produsele numerelor aflate pe fiecare linie, respectiv coloană să fie raționale;
c) atât sumele, cât și produsele numerelor aflate pe fiecare linie, respectiv coloană să fie raționale.

32. Marius face următoarea afirmație către prietenul său Cristi: „orice număr natural nenul n ai alege, eu îți pot găsi dimensiunile unui dreptunghi (și care nu pătrat!), a cărui arie să fie egală cu n și în care diferența dintre lungime și lățime să fie egală cu 2". Este oare adevărată afirmația lui Marius? Justificați răspunsul.

1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea și ordonarea numerelor reale

Axa numerelor reale este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O numit *origine*, un *segment unitate* și un *sens pozitiv* (consemnat printr-o săgeată).



Oricărui punct A de pe axa numerelor îi corespunde un număr real a, numit *abscisa punctului A* și notăm $A(a)$.

Reciproc, oricărui număr real b îi corespunde pe axa numerelor punctul $B(b)$, numit *imaginea* numărului real b. Punctului O îi corespunde numărul real 0. Numerele *reale pozitive* se reprezintă pe semidreapta care indică sensul pozitiv.

Observație. Abscisa unui punct A de pe axa numerelor se mai notează și x_A. Dacă $A(x_A)$ și $B(x_B)$ sunt două puncte pe axa numerelor, lungimea segmentului $[AB]$ este $AB=|x_B-x_A|$.

Compararea și ordonarea numerelor reale.

Spunem că numărul real a este *mai mare* decât numărul real b, dacă există un număr real pozitiv c astfel încât $a=b+c$. Notăm $a>b$.

Echivalent, scriem $b<a$ și citim b este mai mic decât a. Dacă $a>b$ sau $a=b$, spunem că numărul real a este *mai mare sau egal* cu numărul real b și notăm $a\geq b$, sau, echivalent, spunem că b este *mai mic sau egal* cu a și notăm $b\leq a$.

Observații.

1. Oricare două numere reale *pot fi comparate* în sensul că, dacă a și b sunt numere reale, atunci $a>b$ sau $a=b$ sau $b>a$.
2. Orice număr *pozitiv* este *mai mare* decât zero și orice număr *negativ* este *mai mic* decât zero.
3. Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv.

Proprietățile relației de ordine

1. *Reflexivitatea*: $a\geq a$, oricare ar fi numărul real a.
2. *Antisimetria*: Oricare ar fi numerele a și b, dacă $a\geq b$ și $b\geq a$, atunci $a=b$.
3. *Tranzitivitatea*: Oricare ar fi numerele a, b și c, dacă $a\geq b$ și $b\geq c$, atunci $a\geq c$.
4. Relația $\geq$ este *compatibilă* cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor reale, adică, oricare ar fi numerele a și b, inegalitatea $a\geq b$ este echivalentă cu:
   a) $a+c\geq b+c, \forall c\in\mathbb{R}$; *b)* $a\cdot c\geq b\cdot c, \forall c>0$; *c)* $a\cdot c\leq b\cdot c, \forall c<0$.
5. Dacă $a\geq b$ și $c\geq d$, atunci $a+c\geq b+d$.
   Dacă $a\geq b\geq 0$ și $c\geq d\geq 0$, atunci $a\cdot c\geq b\cdot d\geq 0$.

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real.

Partea întreagă a numărului real x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Numărul $\{x\}=x-[x]$ se numește *partea fracționară* a numărului real x.

Exemple.

1. $[1{,}53] = 1$, deoarece $1 \le 1{,}53 < 2$ și $\{1{,}53\} = 1{,}53 - [1{,}53] = 1{,}53 - 1 = 0{,}53$.
2. $[-1{,}53] = -2$, fiindcă $-2 \le 1{,}53 < -1$ și $\{-1{,}53\} = -1{,}53 - [-1{,}53] = -1{,}53 - (-2) = 0{,}47$.

Proprietăţi ale părţii întregi a unui număr real

1. $[x] \le x < [x] + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2. $[x] = x$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.
3. $[x + k] = [x] + k$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.
4. $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi ale părţii fracţionare a unui număr real

1. $0 \le \{x\} < 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2. $\{x\} = x$ dacă şi numai dacă $0 \le x < 1$.
3. $\{x\} = 0$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.
4. $\{x + k\} = \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Aproximări și rotunjiri. Fie x un număr real, r un număr raţional şi e un număr real dat. Spunem că numărul raţional r îl *aproximează* pe x (este *aproximare* a lui x) cu *eroare* cel mult egală cu e dacă $|x - r| \le e$.

Aproximarea se face prin *lipsă* dacă $r < x$ sau prin *adaos* dacă $r \ge x$.

Observaţie. Fie x un număr real pozitiv şi $e = 10^{-p}, p \in \mathbb{Z}$. Atunci:

1. O aproximare a lui x prin lipsă cu eroare de cel mult 10^{-p} este
$$x_l = 10^{-p} \cdot [10^p \cdot x].$$
2. O aproximare a lui x prin adaos cu eroare de cel mult 10^{-p} este
$$x_a = 10^{-p}\left([10^p \cdot x] + 1\right).$$
3. Rotunjirea lui x cu eroare de cel mult 10^{-p} este $r = \begin{cases} x_l, \text{ dacă } x - x_l < x_a - x \\ x_a, \text{ dacă } x - x_l \ge x_a - x \end{cases}$.

Exemple:

1. Pentru $p = 1$ se obţin aproximări ale lui x, prin lipsă sau prin adaos, cu eroare cel mult egală cu 10^{-1} (altfel spus, aproximările cu eroare de cel mult o zecime). Fie $x = 24{,}53$ avem
   – o aproximare a lui x prin lipsă: $x_l = 10^{-1} \cdot [10 \cdot 24{,}53] = 24{,}5$;
   – o aproximare a lui x prin adaos: $x_a = 10^{-1}\left([10^1 \cdot 24{,}53] + 1\right) = 24{,}6$.

   Cum $x - x_l = 24{,}53 - 24{,}5 = 0{,}03$ și $x_a - x = 24{,}6 - 24{,}53 = 0{,}07$, iar $0{,}03 < 0{,}07$ rezultă că numărul 24,5 îl rotunjește pe 24,53 cu eroare de cel mult 10^{-1} (o zecime).
2. Pentru $p = -2$, se obţin aproximări ale lui x cu eroare cel mult egală cu 10^2 (altfel spus aproximările la ordinul sutelor). Pentru $x = 321{,}4$ avem:
   – o aproximare a lui x prin lipsă : $x_l = 10^2 \cdot [10^{-2} \cdot 321{,}4] = 10^2 \cdot 3 = 300$;
   – o aproximare a lui x prin adaos: $x_a = 10^2 \cdot \left([10^{-2} \cdot 321{,}4] + 1\right) = 10^2 \cdot 4 = 400$.

CUNOAȘTERE ȘI EXERSARE

1. Reprezentaţi pe axă numerele $0 ; -2 ; 3 ; 6 ; -5$, luând ca unitate de măsură un segment de 1 cm.
2. Luaţi ca unitate de măsură un segment de 6 cm şi reprezentaţi pe axă numerele: $-1 ; \frac{2}{3} ; -\frac{5}{6} ; 0{,}5 ; -0{,}(3) ; 1\frac{1}{2}$.
3. Reprezentaţi pe axă numerele $0 ; -\frac{3}{4} ; \frac{1}{2} ; -1 ; \frac{4}{3} ; 0{,}5 ; 1{,}25 ; \sqrt{2} ; -\sqrt{3}$, alegând ca unitate de măsură un segment convenabil.
4. Reprezentaţi pe axă punctele $O(0)$, $A(-2)$, $B(1)$, $C(3)$ şi $D(-5)$.
   a) Calculaţi lungimea segmentului $[AB]$;
   b) Determinaţi abscisa mijlocului segmentului $[DC]$.
   c) Arătaţi $AD+OB=OA+BC$.
5. Reprezentaţi pe axă punctele O, M, N, P, Q, de abscise $0, -4, 3, 5$ şi respectiv -2.
   a) Calculaţi lungimea celui mai mare segment dintre cele formate.
   b) Calculaţi lungimea celui mai mic segment dintre cele formate.
   c) Determinaţi abscisa punctului S, mijlocul segmentului $[MQ]$.
   d) Arătaţi că punctul O este mijlocul segmentului $[SN]$.
6. Comparaţi numerele:
   a) -8 şi 4 ; *b)* -3 şi -4 ; *c)* $0{,}2$ şi $0{,}(2)$;
   d) $-0{,}1(2)$ şi $-0{,}(12)$; *e)* $1{,}323$ şi $1{,}332$; *f)* $\frac{3}{5}$ şi $\frac{4}{5}$;
   g) $-\frac{4}{7}$ şi $-\frac{5}{7}$; *h)* $\frac{5}{7}$ şi $\frac{5}{8}$; *i)* $-2\frac{3}{4}$ şi $-2\frac{4}{5}$.
7. Se consideră numerele: $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{5}$ şi $d = 1{,}41$. Alegeţi dintre cele patru variante de mai jos pe cea corespunzătoare ordinii crescătoare a celor patru numere.
   a) $a < b < c < d$; *b)* $c < d < a < b$; *c)* $d < a < b < c$; *d)* $b < c < d < a$.
8. Determinaţi partea întreagă a următoarelor numere reale:
   a) $2{,}4$; *b)* $-5{,}21$; *c)* $3{,}(12)$; *d)* $-4{,}1(7)$;
   e) $\frac{4}{3}$; *f)* $-\frac{5}{4}$; *g)* $\sqrt{13}$; *h)* $-\sqrt{2}$.
9. Calculaţi partea fracţionară a următoarelor numere reale:
   a) $1{,}23$; *b)* $-2{,}3$; *c)* -10 ; *d)* $5{,}(2)$;
   e) $\frac{8}{3}$; *f)* $-\frac{9}{5}$; *g)* $\sqrt{6}$; *h)* $-\sqrt{5}$.