Gheorghe Iurea, Dorel Luchian,
Gabriel Popa, Ioan Șerdean, Adrian Zanoschi

matematică

evaluarea națională 2020

clasa a VIII-a

Memorator de matematică •
Teme recapitulative •
5 Variante de subiecte pentru luna Decembrie •
5 Variante de subiecte pentru luna Martie •
80 Variante de subiecte după modelul M.E.N. •

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Editura Paralela 45

Cuprins

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

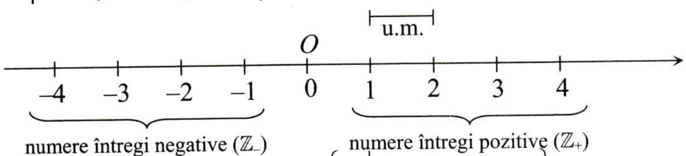
ALGEBRĂ

MULŢIMI NUMERICE

$\mathbb{N}$ – mulţimea numerelor naturale; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}$ – mulţimea numerelor întregi; $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.



$\mathbb{Q}$ – mulţimea numerelor raţionale; $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ şi } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

$\mathbb{R}$ – mulţimea numerelor reale, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulţimea numerelor iraţionale.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

OPERAŢII CU MULŢIMI

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.
Intersecţia: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$.
Diferenţa: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$.

OPERAŢII CU NUMERE

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (citim: „n factorial”); $0! = 1$.

Factor comun: $f \cdot a \pm f \cdot b = f \cdot (a \pm b)$, $\forall\, a, b, f \in \mathbb{R}$.

Opusul numărului real r este numărul real $-r$.

Inversul numărului real nenul r este numărul real $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$.

TEOREMA ÎMPĂRŢIRII CU REST

În $\mathbb{N}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, \exists!\, c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$.

În $\mathbb{Z}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \exists!\, c \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < |b|$.

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale

Partea I

La fiecare dintre exercițiile de la 1 la 10 trebuie să efectuați calculele.

1. $40 : 8 - 4 : 2$.

2. $30 - 4 \cdot 7$.

3. $(253 + 147) : 25$.

4. $142 : (1 + 2 \cdot 35)$.

5. $2^3 + 3^2 - 4^0$.

6. $0^7 + 3^{10} : 3^8 - 9$.

7. $(2^5)^{12} : 2^{56} - 3^{20} : 3^{18}$.

8. $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 : 2^7 + 0^8 - 1^9$.

9. $25^7 : 5^{14} + 3^{90} : 27^{29}$.

10. $(2 + 4 + 6 + ... + 20) - (1 + 3 + 5 + ... + 19)$.

11. Aflați restul împărțirii numărului 120 la 7.

12. Calculați suma tuturor numerelor naturale care, împărțite la 4, dau câtul 5 și restul nenul.

13. Calculați suma numerelor pare cuprinse între 9 și 21.

14. Aflați câte numere de forma $\overline{a1b}$ sunt impare.

15. Determinați suma numerelor prime având o singură cifră.

16. Stabiliți care dintre următoarele numere este prim: 17, 21, 29, 37, 39, 41, 51, 67, 91, 97.

17. Determinați toți divizorii naturali ai numărului 18.

18. Scrieți toți multiplii de două cifre ai numărului 13.

19. Calculați suma divizorilor naturali ai numărului 28.

20. Descompuneți în factori primi numerele: 54, 75, 120 și 300.

21. Determinați cifra x, știind că numărul $\overline{x8x}$ se divide cu 2.

22. Determinați toate numerele de forma $\overline{32a}$ care se divid cu 4.

23. Aflați cel mai mare număr de forma $\overline{2c18}$ care se divide cu 3.

24. Determinați toate numerele de forma $\overline{2x34}$ care se divid cu 9.

25. Aflați câte numere de forma $\overline{xy6}$ se divid cu 12.

26. Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 48.

27. Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor 45, 180 și 195.

28. Aflați cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 8.

29. Aflați cel mai mic multiplu comun al numerelor 9, 12 și 15.

30. Determinați numărul pătratelor perfecte nenule, mai mici decât 500.

Partea a II-a

1. Un număr natural $\overline{ab}$, adunat cu suma cifrelor sale, dă 54. Aflați numărul.

2. Aflați numerele naturale a și b, știind că suma lor este egală cu 19 și că, împărțind pe a la b, obținem câtul 3 și restul 3.

3. Suma a trei numere naturale este 502. Aflați cele trei numere, știind că al doilea este triplul primului și că, împărțind pe al treilea la al doilea, obținem câtul 7 și restul 2.

4. Determinați toate numerele naturale nenule care, împărțite la 12, dau câtul de trei ori mai mic decât restul.

5. Determinați toate numerele naturale care, împărțite la un număr de două cifre, dau câtul 10 și restul 97.

6. Aflați câte numere naturale de trei cifre dau restul 7 la împărțirea cu 25.

7. Arătați că suma a trei numere naturale, care dau resturi diferite la împărțirea cu 3, este, întotdeauna, un multiplu de 3.

8. Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $b = a + 2c$ și, împărțind pe $\overline{abc}$ la 112, obținem câtul a și restul 59.

9. Calculați: $2^5 - 3 \cdot [3 \cdot 7 - 2 \cdot (6^2 - 2^3) : 4] + 1^{123}$.

10. Determinați numărul natural n, știind că $7 \cdot 7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^4 \cdot 7^5 = 7^{2n+1}$.

11. Fie numerele naturale $a = 2^{29} + 2^{40} : 2^{11}$ și $b = 12^{20} : 2^{40}$.

a) Arătați că $a = 2^{30}$.

b) Comparați numerele a și b.

12. a) Arătați că numărul natural $a = 5 \cdot 3^{42} + 9^{20} - 10 \cdot 3^{40}$ este pătrat perfect.

b) Demonstrați că numărul natural $b = 3^{42} + 2^{43}$ nu este pătrat perfect.

13. Fie $a = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{10} + 3^{11}$.

a) Arătați că a este număr par.

b) Arătați că numărul a este divizibil cu 10.

14. Demonstrați că numărul natural $a = 2^{n+3} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 2^n - 3 \cdot 14^n$ se divide cu 12, pentru orice număr natural n.

15. Determinați toate numerele naturale n astfel încât $2n + 1$ să dividă pe 60.

16. Determinați toate numerele naturale n, știind că $n + 1$ divide pe $2n + 11$.

17. Demonstrați că, dacă $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 198$, atunci numărul $\overline{abc}$ este un multiplu de 9.

18. Determinați numerele prime p, q, r astfel încât $2p + 3q + 6r = 78$.

19. Arătați că suma a trei numere naturale consecutive a, $a + 1$ și $a + 2$ este număr prim doar dacă $a = 0$.

20. Demonstrați că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul natural $\overline{abcd}$ se divide cu 7.

21. Se consideră mulțimea $A = \left\{\overline{abc} \mid a \cdot b \cdot c = 8\right\}$.

a) Aflați elementele mulțimii A.

b) Stabiliți dacă mulțimea A conține numere divizibile cu 3.

22. Fie n un număr natural care împărțit la 12 și la 18 dă, de fiecare dată, câtul diferit de zero și restul 5.

a) Arătați că cel mai mic număr n cu aceaste proprietăți este 41.

b) Determinați toate numerele n cu proprietățile considerate care îndeplinesc și condiția $100 < n < 200$.

23. Fie n un număr natural care împărțit la 20 dă restul 18 și împărțit la 15 dă restul 13.

a) Arătați că cel mai mic număr n cu aceste proprietăți este 58.

b) Stabiliți câte numere n, care îndeplinesc condițiile din enunț, sunt mai mici decât 1000.

24. a) Determinați toate numerele de două cifre $\overline{ab}$ pentru care numărul $\overline{ab} + \overline{ba}$ este pătrat perfect.

b) Demonstrați că nu există numere de trei cifre $\overline{abc}$, astfel încât numărul $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ să fie pătrat perfect.

25. Determinați numerele naturale a și b, știind că $a \geq b > 0$, $a + b = 78$ și cel mai mare divizor comun al lor este 13.

26. Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $a = n^3 - n$ este divizibil atât cu 2, cât și cu 3.

27. Dacă scriem pe o tablă toate numerele naturale de la 1 la 100, apoi ștergem toți multiplii de 2 și toți multiplii de 3, aflați câte numere rămân scrise pe tablă.

28. Ionel a ales dintr-o carte 7 foi și a adunat numerele înscrise pe cele 14 pagini ale foilor selectate. Este posibil ca suma obținută să fie 1428? (Bineînțeles, presupunem că Ionel nu greșește la adunare.)

29. Un elev a dat un test cu 20 de probleme. Se știe că pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 8 puncte, pentru fiecare problemă rezolvată greșit se scad 5 puncte, iar problemele nerezolvate se punctează cu zero. Aflați câte probleme a rezolvat corect elevul, știind că el a obținut 13 puncte la test.

30. Într-un tramvai gol, în care încap cel mult 70 de pasageri, s-au urcat, la plecare, n pasageri ($n \in \mathbb{N}^*$). Jumătate dintre ei au luat loc pe scaune. Aflați numărul n, știind că la prima stație 8% dintre pasageri au coborât din tramvai.

TEMA 2. Numere întregi. Numere raționale

Partea I

La fiecare dintre exercițiile de la 1 la 20 trebuie să efectuați calculele.

1. $3 \cdot (-5) - (-12)$.

2. $(1 - 2 + 3 - 4) : 2$.

3. $(-45) : (3 - 8) + (-2) \cdot 2$.

4. $13 + 24 : (-2)$.

5. $25 : (-5) - (2 - 7)$.

6. $(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3$.

7. $(-2)^2 - (-2)^3 + 3^2$.

8. $2^8 : (-2)^6 - (-5)^0$.

9. $2 - (-3)^4 \cdot 3^5 : (-3)^7$.

10. $2{,}25 + 3{,}75 - 5$.

11. $4 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot (-0{,}2)$.

12. $1{,}4 \cdot 1{,}5 - 4{,}1$.

13. $4{,}35 : 0{,}15 - 140 \cdot 0{,}2$.

14. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{12}{5}$.

15. $\frac{1}{12} - \frac{5}{18} + \frac{1}{9}$.

16. $[0{,}5 + 0{,}(3)] : \frac{5}{6}$.

17. $\left[1{,}1(6) - \frac{1}{6}\right] : (1{,}2)$.

18. $15 \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{6} + 0{,}6\right)$.

19. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right] \cdot 10$.

20. $\left[2^{-2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right] : (0{,}25)$.

21. Calculați suma dintre opusul numărului întreg 2 și inversul numărului rațional $-\frac{1}{3}$.

22. Calculați produsul modulelor numerelor întregi -1, 2 și -3.

23. Aflați toate numerele întregi care au valoarea absolută egală cu 12.

24. Scrieți toate numerele întregi impare cuprinse între -4 și 2.

25. Găsiți cel mai mare număr întreg mai mic decât $-23{,}4$.

80 DE VARIANTE DE SUBIECTE DUPĂ MODELUL M.E.N.

TESTUL 11

Subiectul I. ***Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.*** **(30 puncte)**

1. Rezultatul calculului $20 - 10 : 5 + 5$ este egal cu … .
2. Dacă trei caiete costă 7,20 lei, atunci un caiet costă … lei.
3. Dacă $\frac{x}{12} = \frac{5}{4}$, atunci numărul $3x - 40$ este egal cu … .
4. Un triunghi echilateral ABC are perimetrul egal cu 12,6 m. Lungimea laturii AB este egală cu … m.
5. În *figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu aria totală de 96 cm^2. Lungimea laturii AB este egală cu … cm.
6. În tabelul de mai jos sunt trecute rezultatele obţinute în urma măsurării înălţimii fiecărui elev dintr-o clasă:

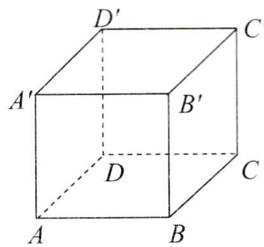


Figura 1

Înălţimea (în cm)	≤ 150	151-160	161-170	171-180	≥ 180
Număr de elevi	2	3	4	18	7

Numărul elevilor din clasă cu înălţimea mai mare de 1,60 m este egal cu … .

Subiectul al II-lea. ***Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.*** **(30 puncte)**

1. Desenaţi, pe foaia de examen, un con circular drept cu vârful V.
2. Determinaţi elementele mulţimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2 + x| = 5\}$.
3. Bursa lunară a unui elev este mai mică decât 450 lei cu jumătate din valoarea ei. Aflaţi câţi lei primeşte elevul ca bursă lunară.
4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

   a) Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axele Ox şi Oy ale unui sistem de coordonate xOy.

   b) Determinaţi coordonatele punctelor de pe graficul funcţiei f care se află la 3 unităţi distanţă de originea sistemului de coordonate xOy.
5. Fie $E(x) = \frac{x}{x^3 + x^2} : \frac{(x+2)(2x-1) - x(x+3) + 1}{(2x+2)(3x-3)}$, unde x este număr real, $x \neq -1$, $x \neq 0$ şi $x \neq 1$. Arătaţi că $E(x) = \frac{6}{x(x+1)}$, pentru orice x număr real, $x \neq -1$, $x \neq 0$ şi $x \neq 1$.

Subiectul al III-lea. ***Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.*** **(30 puncte)**

1. În *figura 2* este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 60$ cm și $BC = 50$ cm. Pătratele $AEFG$ și $CHIJ$ au laturile egale cu 10 cm.

a) Aflați câți cm^2 are aria suprafeței hașurate.

b) Arătați că, dacă M este mijlocul segmentului AB, atunci dreptele FM și IM sunt perpendiculare.

c) Arătați că dreptele EH, FI și GJ sunt concurente.

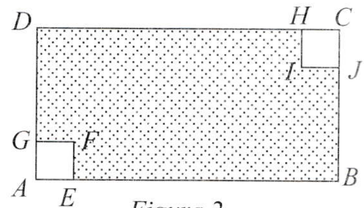


Figura 2

2. În *figura 3* este reprezentată o prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu latura bazei $AB = 4$ m și muchia laterală $AA' = 2\sqrt{2}$ m.

a) Calculați volumul prismei (în m^3).

b) Determinați sinusul unghiului format de dreptele $A'C$ și AD.

c) Arătați că planele $(A'BD)$ și $(C'BD)$ sunt perpendiculare.

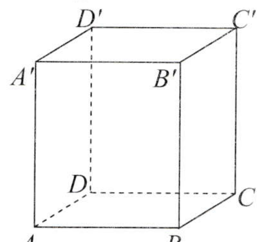


Figura 3

TESTUL 12

Subiectul I. ***Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.*** **(30 puncte)**

1. Rezultatul calculului $-2^2 + 4 \cdot (-3)$ este egal cu … .

2. Dacă $a = 250$, atunci 30% din a este egal cu … .

3. Dintr-o clasă cu 12 băieți și 18 fete se alege, la întâmplare, un elev. Probabilitatea ca elevul ales să fie băiat este egală cu … .

4. Lungimea diagonalei unui pătrat cu perimetrul de 24 cm este egală cu … cm.

5. În *figura 1* este reprezentat un cilindru circular drept cu raza bazei $OA = 8$ cm și înălțimea $OO' = 10$ cm. Aria laterală a cilindrului este de …π cm^2.

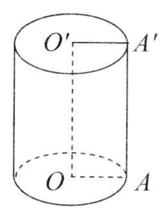
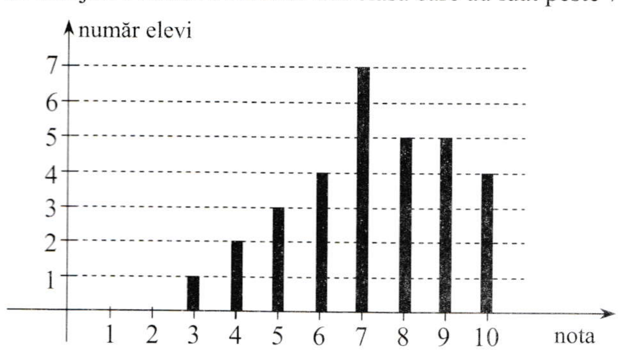


Figura 1

6. Rezultatele elevilor unei clase la teza de matematică sunt reprezentate în graficul de mai jos. Numărul elevilor din clasă care au luat peste 7 este egal cu … .



Subiectul al II-lea. ***Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.*** **(30 puncte)**

1. Desenați, pe foaia de examen, un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.
2. Dacă $x \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x + \frac{1}{x} = 4$, aflați valoarea sumei $x^2 + \frac{1}{x^2}$.
3. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit la numerele 15, 30 și 45 dă, de fiecare dată, un cât diferit de zero și restul 13.
4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 6$.
   a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.
   b) Calculați $P = f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(99) \cdot f(100)$.
5. Se consideră expresia $E(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 5x + 6}$, unde x este un număr real, $x \neq -3$ și $x \neq -2$. Arătați că $E(x) \geq 0$, pentru orice x număr real, $x \neq -3$ și $x \neq -2$.

Subiectul al III-lea. ***Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.*** **(30 puncte)**

1. Triunghiul ABC, din *figura 2*, are $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AB = 30$ cm și $AC = 40$ cm. Fie $AQ \perp BC$, $Q \in (BC)$ și M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB.
   a) Arătați că triunghiurile APN și QPN sunt congruente.
   b) Calculați perimetrul patrulaterului $MNPQ$ (în cm).
   c) Demonstrați că punctele M, N, A, P, Q se află pe un cerc.

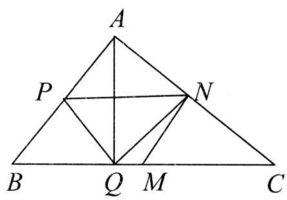


Figura 2

2. În *figura 3* este reprezentată o piramidă triunghiulară regulată $ABCD$, cu baza $AB = 3$ m, apotema $DM = 1$ m ($M \in BC$) și înălțimea DO. Fie punctul $V \in DO$ ($D \in (VO)$) astfel încât $VD = 9DO$.
   a) Arătați că $DO = 0{,}5$ m.
   b) Aflați lungimea segmentului VO (în m).
   c) Calculați tangenta unghiului format de dreapta DA cu planul (ABC).

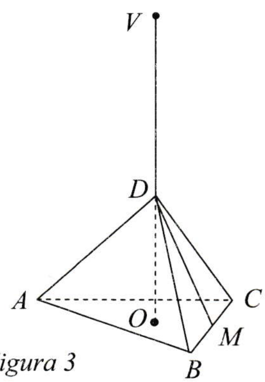


Figura 3

TESTUL 13

Subiectul I. ***Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.*** **(30 puncte)**

1. Rezultatul calculului $10 \cdot 0{,}23 + 1{,}7$ este egal cu … .
2. Dacă $\frac{2}{x} = \frac{y}{7}$, atunci numărul $xy - 20$ este egal cu … .

80 DE VARIANTE DE SUBIECTE DUPĂ MODELUL M.E.N.

TESTUL 11

I. 1. 23. **2.** 2,40. **3.** 5. **4.** 4,2. **5.** 4. **6.** 29.

II. 2. $A = \{-7, 3\}$. **3.** 300 lei. **4.** a) $G_f \cap Ox = \left\{A\left(\frac{3}{2}, 0\right)\right\}$; $G_f \cap Oy = \{B(0, -3)\}$; b) $P(x, y) \in$ $\in G_f \Leftrightarrow y = 2x - 3$; $OP = 3 \Leftrightarrow x^2 + (2x-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{12}{5}\right\}$. Punctele sunt $P_1\ (0, -3)$ şi $P_2\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

III. 1. a) $2800\ cm^2$; b) $FM^2 + IM^2 = 500 + 2000 = 2500 = FI^2 \Rightarrow FM \perp IM$; c) Deoarece patrulaterele $EIHF$ şi $GFJI$ sunt paralelograme, rezultă că dreptele EH şi GJ trec prin mijlocul segmentului FI, deci dreptele EH, FI şi GJ sunt concurente. **2.** a) $32\sqrt{2}\ m^3$; b) $\sin(\sphericalangle(A'C, AD)) =$ $= \sin(\sphericalangle(A'C, BC)) = \sin(\sphericalangle A'CB) = \frac{A'B}{A'C} = \frac{\sqrt{15}}{5}$; c) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $A'B = A'D$ şi $BO = OD$, rezultă că $A'O \perp BD$. Analog, obţinem $C'O \perp BD$, deci $m(\sphericalangle((A'BD), (\sphericalangle C'BD))) =$ $= m(\sphericalangle(A'O, C'O))$. Cum $A'O^2 + C'O^2 = 32 = A'C'^2$, înseamnă că $m(\sphericalangle(A'O, C'O)) = 90°$, deci $(A'BD) \perp (C'BD)$.

TESTUL 12

I. 1. -16. **2.** 75. **3.** $\frac{2}{5}$. **4.** $6\sqrt{2}$. **5.** 160. **6.** 14.

II. 2. 14. **3.** 103. **4.** b) $p = 0$. **5.** $E(x) = (x+1)^2 \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

III. 1. a) $AP = QP = \frac{AB}{2}$, $AN = QN = \frac{AC}{2}$, $PN = PN \Rightarrow \Delta APN \equiv \Delta QPN$; b) 62 cm; c) Mijlocul segmentului NP este egal depărtat de punctele M, N, A, P, Q. **2.** a) $OM =$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ m; $DO = \sqrt{DM^2 - OM^2} = 0{,}5$ m; b) $VO = 5$ m; c) $\text{tg}\sphericalangle(DA, (ABC)) = \text{tg}\,(\sphericalangle DAO) =$ $= \frac{DO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

TESTUL 13

I. 1. 4. **2.** -6. **3.** 72. **4.** 49. **5.** 4. **6.** 24.

II. 2. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. **3.** 12. **4.** a) $m = 1$. **5.** $E(x) - \frac{4}{x-2} = 1 \in \mathbb{N}^*$.