

Marius Perianu

Ioan Balica

Matematică

Clasa a VII-a

I





Algebră

I. Numere reale

I.1.	Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect	8
I.2.	Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv. Multimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă.	12
	Teste de evaluare	21
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	23
I.3.	Reguli de calcul cu radicali	25
I.4.	Adunarea și scăderea numerelor reale	30
I.5.	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Puteri cu exponent întreg. Ordinea efectuării operațiilor	34
I.6.	Raționalizarea numitorului unei fracții	42
I.7.	Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive	48
I.8.	Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	51
	Teste de evaluare	55
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	57
I.9.	Probleme cu caracter aplicativ	59
I.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	61

Geometrie

II. Patrulatere

II.1.	Patrulaterul convex	66
II.2.	Paralelogramul	68
II.3.	Linia mijlocie în triunghi	73
	Teste de evaluare	77
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	79
II.4.	Dreptunghiul	81
II.5.	Rombul	85
II.6.	Pătratul	88
II.7.	Trapezul. Linia mijlocie în trapez	91
	Teste de evaluare	95
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	97

II.8. Ariile figurilor geometrice	99
Teste de evaluare	105
Respect pentru români și cărti Fișă pentru portofoliul individual (G3)	107
II.9. Probleme cu caracter aplicativ	109
II.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	111
III. Cercul	
III.1. Coarde și arce de cerc	116
III.2. Unghi încris în cerc	120
III.3. Tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc	124
III.4. Poligoane regulate înscrise într-un cerc	128
III.5. Lungimea cercului și aria discului	130
Teste de evaluare	133
Fișă pentru portofoliul individual (G4)	135
III.6. Probleme cu caracter aplicativ	137
III.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	138
IV. Variante de subiecte pentru teză	
Varianta 1	142
Varianta 2	142
Varianta 3	143
Varianta 4	143
Varianta 5	144
Varianta 6	145
Soluții	146

8	I.1	Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect
12	I.2	Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv. Mulțimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă.
21		Teste de evaluare
23		Fișă pentru portofoliul individual A1
25	I.3	Reguli de calcul cu radicali
30	I.4	Adunarea și scăderea numerelor reale
34	I.5	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Puteri cu exponent întreg. Ordinea efectuării operațiilor
42	I.6	Raționalizarea numitorului unei fracții
48	I.7	Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive
51	I.8	Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$
55		Teste de evaluare
57		Fișă pentru portofoliul individual A2
59	I.9	Probleme cu caracter aplicativ
61	I.10	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

I

Numere
reale

Pătrat perfect. Un număr natural a se numește *pătrat perfect* dacă există un număr natural n astfel încât $n^2 = a$.

Rădăcina pătrată. Fie a un număr natural pătrat perfect. Numărul natural n cu proprietatea $n^2 = a$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului a și se notează $n = \sqrt{a}$.

Exemple: $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{n^2} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este n , și anume \sqrt{n} și $-\sqrt{n}$. Evident, numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple: 1 $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$. 2 $\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{(4ab^2)^2} = |4ab^2| = 4b^2|a|$.

Exersare



- 1 Completați următorul tabel, știind că x este număr natural:

x	2	5		8			11		25
x^2			9		36	49		144	

- 2 Dintre următoarele numere, alegeti-le pe cele care sunt pătrate perfecte: 8, 16, 26, 49, 91, 121, 150, 196, 200, 324.

- 3 a Scrieți pătratele perfecte de două cifre.
b Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 300 și 500.

- 4 Determinați numerele întregi care au pătratul egal cu:

- a 16; b 81; c 144; d 576; e 2025.

- 5 Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:

- a 9; b 36; c 64; d 121; e 400;
f $3^2 \cdot 16$; g $25 \cdot 81 \cdot 7^2$; h $4^5 \cdot 4^4$; i $25^3 \cdot 7^{10}$; j $121 \cdot 49^3$.

- 6 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

- a $\sqrt{64} = 8$; b $\sqrt{100^2} = 100$; c $\sqrt{(-5)^2} = -5$; d $\sqrt{81} = 9$;
e $\sqrt{5^2} = 5$; f $\sqrt{(-7)^2} = 7$; g $\sqrt{(-3)^2} = -3$; h $\sqrt{16} = \sqrt{4}$.

a $\sqrt{7^2}$; **b** $\sqrt{9^2}$;

e $\sqrt{(-10)^2}$;

f $\sqrt{(-16)^2}$;

c $\sqrt{15^2}$;

d $\sqrt{20^2}$;

g $\sqrt{(-30)^2}$;

h $\sqrt{(-45)^2}$.

8 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$;

c $a = 9^2 + 12^2$;

b $a = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$;

d $a = 7^2 + 24^2$.

9 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 49$;

c $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2011$;

e $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 24) + 25$;

b $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 31$;

d $a = (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2012) + 1007$;

f $a = (3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 147) + 1225$.

10 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect, după care aflați \sqrt{a} :

a $a = (1 + 2 + 3 + \dots + 50) - 25 \cdot 2$;

b $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 120 + 4 \cdot 121$;

c $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 225) - 225^2$;

d $a = 3 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 99) - 5000$;

e $a = (60 \cdot 4 + 60^2) + (64^2 - 64 \cdot 43)$;

f $a = 101^2 - 2 \cdot 99 \cdot 101 + 99^2$.

11 Dați trei exemple de numere naturale care sunt atât pătrate perfecte, cât și cuburi perfecte.

12 Calculați:

a $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$;

b $\sqrt{1} + \sqrt{25} - \sqrt{0}$;

c $\sqrt{36} + \sqrt{64}$;

d $\sqrt{100} - \sqrt{49}$.



Consolidare

13 Calculați, apoi verificați rezultatele folosind minicalculatorul:

a $\sqrt{169}$;

b $\sqrt{196}$;

c $\sqrt{289}$;

d $\sqrt{361}$;

e $\sqrt{441}$;

f $\sqrt{529}$;

g $\sqrt{676}$;

h $\sqrt{729}$.

14 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, punând în evidență faptul că sunt situate între pătratele a două numere naturale consecutive:

a 8;

b 12;

c 24;

d 95;

e 250;

f 500.

15 Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele numere nu sunt pătrate perfecte,

a $a = 5n + 13$;

b $b = 10n + 8$;

c $c = 10n + 12$;

d $d = 5n + 18$.

Rezolvare: **a.** Ultima cifră a lui $5n$ este 0 sau 5, deci ultima cifră a lui a poate fi 3 sau 8. Cum ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă că a nu este pătrat perfect.

16 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, unde $m \in \mathbb{N}$:

a $a = 1^m + 5$;

b $a = 5^m + 7$;

c $a = 6^m + 6$;

d $a = 10^m + 13$;

e $a = 15^m + 18$;

f $a = 31^m + 31$.

17 Arătați că numărul $N = \sqrt{5^{2n+1} \cdot 9^{n+1} + 25^n \cdot 3^{2n+2} \cdot 11}$ este natural, oricare ar fi numărul natural n .

18 Arătați că numerele următoare nu sunt pătrate perfecte:

a $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$;

b $b = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{153}$;

c $c = 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{17})$;

d $d = 2 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{83})$.

19 Calculați:

a $\sqrt{2^4}$; **b** $\sqrt{3^4}$;

e $\sqrt{31^8}$;

i $\sqrt{5^{28}}$;

f $\sqrt{6^{14}}$;

j $\sqrt{9^{24}}$;

c $\sqrt{11^6}$;

g $\sqrt{11^{22}}$;

k $\sqrt{20^{20}}$;

d $\sqrt{23^8}$;

h $\sqrt{59^{12}}$;

l $\sqrt{12^{44}}$.

20 Calculați:

a $\sqrt{3^4 \cdot 5^6}$;

b $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^6}$;

c $\sqrt{5^{10} \cdot 7^{20}}$;

d $\sqrt{3^{14} \cdot 7^4 \cdot 17^8}$;

e $\sqrt{2^8 \cdot 7^2}$;

f $\sqrt{2^{10} \cdot 5^{20} \cdot 11^{30}}$;

g $\sqrt{3^{52} \cdot 11^{40}}$;

h $\sqrt{9^{10} \cdot 11^{12} \cdot 13^{14}}$.

Rezolvare: **f.** $\sqrt{2^{10} \cdot 5^{20} \cdot 11^{30}} = \sqrt{(2^5)^2 \cdot (5^{10})^2 \cdot (11^{15})^2} = \sqrt{(2^5 \cdot 5^{10} \cdot 11^{15})^2} = 2^5 \cdot 5^{10} \cdot 11^{15}$.

21 Calculați:

a $\sqrt{(-29)^2}$;

b $\sqrt{(-29)^4}$;

c $\sqrt{(-29)^8}$;

d $\sqrt{(-19)^2}$;

e $\sqrt{(-51)^4}$;

f $\sqrt{(-72)^2}$;

g $\sqrt{(-2)^4}$;

h $\sqrt{7^{42}}$;

i $\sqrt{2^{2000}}$;

j $\sqrt{3^{2012}}$;

k $\sqrt{(-6)^{2012}}$;

l $\sqrt{(-7)^{7700}}$.

22 Folosind descompunerea în produs de puteri de factori primi, calculați:

a $\sqrt{576}$;

b $\sqrt{625}$;

c $\sqrt{324}$;

d $\sqrt{400}$;

e $\sqrt{900}$;

f $\sqrt{2025}$;

g $\sqrt{3600}$;

h $\sqrt{5625}$.

23 Folosind minicalculatorul, calculați:

a $\sqrt{6724}$;

b $\sqrt{8281}$;

c $\sqrt{20164}$;

d $\sqrt{12100}$;

e $\sqrt{64516}$;

f $\sqrt{84100}$;

g $\sqrt{112896}$;

h $\sqrt{164836}$.

24 Calculați:

a $\sqrt{25} + \sqrt{36} - \sqrt{49}$;

b $\sqrt{100} \cdot \sqrt{16} - \sqrt{144}$;

c $3 \cdot \sqrt{225} + 12\sqrt{121} - \sqrt{169}$;

d $5\sqrt{81} - \sqrt{64} \cdot \sqrt{196} + 2\sqrt{100}$;

e $\sqrt{576} - \sqrt{625} + \sqrt{729} - \sqrt{841} + \sqrt{900}$;

f $\sqrt{6400} - \sqrt{2025} + \sqrt{3364} - \sqrt{5184} - \sqrt{441}$.

25 Calculați:

a $\sqrt{2304} \cdot (\sqrt{225} - \sqrt{1225}) + \sqrt{1600}$;

b $\sqrt{5 \cdot \sqrt{25}} + \sqrt{7 \cdot \sqrt{49}} - \sqrt{9 \cdot \sqrt{16}}$;

c $\sqrt{1+7 \cdot \sqrt{25}} - \sqrt{11 \cdot \sqrt{36}} - 2 + \sqrt{23 \cdot \sqrt{9}} + 3 \cdot \sqrt{16}$;

d $\sqrt{\sqrt{144} + 13} + \sqrt{3 \cdot \sqrt{324}} + 7 \cdot \sqrt{225} - \sqrt{64} - 7$.

26 Calculați:

a $\sqrt{5^3 \cdot 5}$;

b $\sqrt{7^4 \cdot 4}$;

c $\sqrt{3^4 \cdot 5^2 \cdot 36}$;

d $\sqrt{144 \cdot 3^2 \cdot 64}$;

e $\sqrt{21^2 \cdot 23^2}$;

f $\sqrt{9^2 - 6^2 + 2^2}$;

g $\sqrt{64^2 - 63^2 + 4^2 + 1^2}$;

h $\sqrt{2^6 \cdot (7^2 - 2^4 \cdot 3)}$;

i $\sqrt{5 \cdot (9^2 - 6^2)}$.

27 Efectuați calculele:

a $\sqrt{2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 11}$;

b $\sqrt{7^4 \cdot 45 + 7^4 \cdot 39 - 7^4 \cdot 3}$;

c $\sqrt{5^2 \cdot 11 + 19 \cdot 5^2 + 5^2 \cdot 6}$;

d $\sqrt{3^4 \cdot 19 - 3^4 \cdot 10}$;

e $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 + 2^2 \cdot 3^2 + 2^3 \cdot 3^3}$;

f $\sqrt{2^4 \cdot 5^2 + 2^3 \cdot 5 + 1}$;

g $\sqrt{3^4 + 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 5^4}$;

h $\sqrt{11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 15 + 15^2}$;

i $\sqrt{48^2 - 2 \cdot 48 \cdot 13 + 13^2}$.

28 Aflăți x din relațiile:

$$\frac{x}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}}.$$

b) $\frac{\sqrt{25}}{x} = \frac{16}{\sqrt{64}};$

c) $\frac{0,5 \cdot \sqrt{4}}{2^3 - 2^2} = \frac{x}{3^3 - 3^2 - 2};$

d) $\frac{\sqrt{700 - 5\sqrt{225}}}{\sqrt{180 + \sqrt{2025}}} = \frac{3\sqrt{200 + \sqrt{625}}}{x}.$

29 Determinați numerele naturale x care verifică egalitățile:

a) $2^x = \sqrt{4};$

b) $2^x = \sqrt{16};$

c) $3^x = \sqrt{81};$

d) $\sqrt{1+2+3+\dots+8} = 6^x;$

e) $4^x = \sqrt{1+3+3 \cdot 4+3 \cdot 4^2+\dots+3 \cdot 4^{51}};$

f) $5^x = \sqrt{1+4+4 \cdot 5+4 \cdot 5^2+\dots+4 \cdot 5^{2011}};$

g) $6^x = \sqrt{6^4 - 5 \cdot 6^3 - 5 \cdot 6^2 - 5 \cdot 6 - 5};$

h) $3x = \sqrt{3^{2012} - 2 \cdot 3^{2011} - 2 \cdot 3^{2010} - \dots - 2 \cdot 3 - 2}.$

Aprofundare



30 Calculați:

a) $\sqrt{972 - 3 \cdot \sqrt{576}} + \sqrt{1255 - 11 \cdot \sqrt{441}};$

b) $\sqrt{3258 + 18 \cdot \sqrt{361}} + \sqrt{5000 + 40 \cdot \sqrt{1225}};$

c) $\sqrt{6525 - 15 \cdot \sqrt{3600}} - \sqrt{905 - 20 \cdot \sqrt{196}}$

d) $\sqrt{673 - 12 \cdot \sqrt{1024}} + \sqrt{891 + 11 \cdot \sqrt{324}}.$

31 Există numere de forma \overline{aa} care să fie pătrate perfecte?

32 Arătați că numărul $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2011 + 3$ nu este pătrat perfect.

33 Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$:

a) $2^{4n+2};$

b) $9^{n+1};$

c) $7^{6n};$

d) $15^{n^2+n}.$

34 Se consideră numerele $A = \overline{ab}$ și $B = \overline{ba}$, unde a și b sunt cifre nenule.

a) Scrieți toate numerele A care sunt pătrate perfecte;

b) Scrieți cel mai mare număr A , pentru care $\sqrt{A+B}$ este număr natural.

35 Determinați cifrele a și b astfel încât numărul $\overline{aa} + \overline{bb}$ să fie pătrat perfect.

36 Determinați numărul natural \overline{ab} pentru care numărul $x = \sqrt{\overline{ab} + \overline{ba} + 4a + 4b}$ este natural.

37 Determinați numărul natural \overline{ab} pentru care numărul $x = \sqrt{\overline{ab} + 2 \cdot \overline{ba} + a - 8b}$ este natural.

Probleme de șapte stele



38 Determinați numerele naturale de formă $A = \overline{46ab}$ și $B = \overline{2xyz}$, care sunt pătrate perfecte.

39 Fie n un număr natural nenul. Arătați că numărul $a = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ nu este pătrat perfect.

40 Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2009}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{41} - 49\right)\left(\frac{y}{41} - 49\right)} \in \mathbb{N}$.

I.2.1. Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv

Rădăcina pătrată a numărului rațional pozitiv a este numărul pozitiv x , cu proprietatea $x^2 = a$.
 Se notează $x = \sqrt{a}$ și se citește *radical din a*.

Exemple: 1 $\sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$; 2 $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$; 3 $\sqrt{6,25} = 2,5$.

Proprietăți:

- 1 $\sqrt{a} \geq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}_+$.
- 2 $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}_+$.
- 3 $\sqrt{a^2} = |a|$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}$.

Exesare



- 1 Completați următorul tabel:

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{7}{10}$	0,3	-1,2	0,(4)	1,(6)	-0,1(6)
x^2									

- 2 Completați următorul tabel:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{144}{49}$	$\frac{400}{121}$	0,64	1,96	6,25	0,01	0,0121
\sqrt{x}									

- 3 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

- a) $\sqrt{25} = 5$; b) $\sqrt{81} = -9$; c) $\sqrt{36} = \pm 6$;
 d) $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$; e) $\sqrt{\frac{18}{2}} = 3$; f) $\sqrt{\frac{125}{45}} = \frac{5}{3}$.
 4 Dacă $A = \frac{20^2 - 16^2}{3^2} + \frac{12^2 + 9^2}{5^2}$, arătați că \sqrt{A} este număr natural.
 5 Dacă $B = \sqrt{\frac{16}{9}} + \sqrt{\frac{25}{9}} - \sqrt{36} + \sqrt{64}$, arătați că B este număr natural.

6 Fie mulțimea $A = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; 0; 7; 3, (5); -2\frac{1}{3} \right\}$.

Respect pentru oameni și cărți

Determinați elementele mulțimii $B = \{y \mid y = \sqrt{x^2} \text{ și } x \in A\}$.

7 Calculați:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; b) $\sqrt{\frac{25}{49}}$; c) $\sqrt{\frac{81}{100}}$; d) $\sqrt{\frac{225}{121}}$;

e) $\sqrt{\frac{169}{144}}$; f) $\sqrt{\frac{81}{324}}$; g) $\sqrt{\frac{361}{625}}$; h) $\sqrt{\frac{196}{289}}$.

8 Calculați:

a) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; b) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$; c) $\sqrt{6\frac{19}{25}}$; d) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$; e) $\sqrt{\left(-\frac{4}{25}\right)^2}$; f) $\sqrt{\frac{19^2}{13^2}}$;
 g) $\sqrt{\frac{23^2}{37^2}}$; h) $\sqrt{\frac{5^4}{7^4}}$; i) $\sqrt{\frac{3^8}{5^6}}$; j) $\sqrt{\frac{4^3}{9^5}}$; k) $\sqrt{\frac{3^6 \cdot 2^4}{5^2}}$; l) $\sqrt{\frac{14^2}{11^2 \cdot 3^2}}$.

Rezolvă problema chiar aici:

Consolidare



9 Calculați:

a) $\sqrt{0,36}$; b) $\sqrt{0,09}$; c) $\sqrt{2,25}$; d) $\sqrt{1,44}$; e) $\sqrt{5,76}$; f) $\sqrt{0,0169}$.

10 Folosind eventual minicalculatorul, calculați:

a) $\sqrt{5,3361}$; b) $\sqrt{6,3504}$; c) $\sqrt{29,4849}$; d) $\sqrt{144,7209}$; e) $\sqrt{1,258884}$.

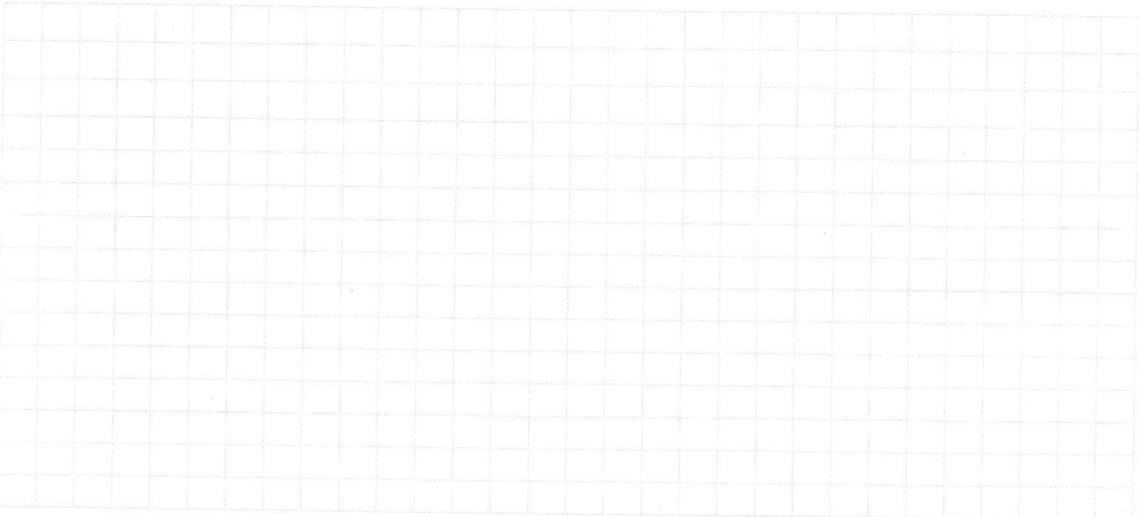
11 Efectuați:

a $2\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0,09} + 3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,04} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{0,36}$;

b $1\frac{1}{4} \cdot \sqrt{0,0225} - 0,(3) \cdot \sqrt{0,81} + 0,2(7) \cdot \sqrt{0,0324}$;

c $2,(3) \cdot \sqrt{0,(1)} + \sqrt{\frac{324}{25}} : \sqrt{\frac{81}{225}} - \sqrt{1024} : \sqrt{64}$.

Rezolvă problema chiar aici:



12 Efectuați:

a $(3\sqrt{49} - 2 \cdot \sqrt{25}) : \sqrt{121}$;

b $(13\sqrt{144} - 5 \cdot \sqrt{196}) \cdot \sqrt{\sqrt{361} - \sqrt{225}}$;

c $\sqrt{3^4 + 3^2 \cdot 2 + 1} \cdot (2 \cdot \sqrt{1296} - 3 \cdot \sqrt{841})$;

d $(3 \cdot \sqrt{2025} + 2 \cdot \sqrt{3600} - 5 \cdot \sqrt{1764}) : \sqrt{(3^5 - 2^6 \cdot 3 - 6)^2}$;

e $(2 \cdot \sqrt{5625} + 6 \cdot \sqrt{2704} - 2 \cdot \sqrt{961}) : (3\sqrt{6561} - \sqrt{1849})$.

13 Aflați numerele raționale x care verifică egalitățile:

a $\frac{\sqrt{49 \cdot 169} - 7\sqrt{81}}{\sqrt{576} + 24 \cdot \sqrt{\frac{1521}{64}}} = \frac{x \cdot \sqrt{49}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{729}{100}}}$;

b $\frac{x}{\sqrt{\frac{900}{49}} - \sqrt{\frac{784}{225}} \cdot \frac{15}{7}} = \frac{\sqrt{676} - \sqrt{576}}{0,(5) \cdot \sqrt{\frac{1296}{625}}}$.

14 Arătați că numărul x este număr natural pătrat perfect, unde:

$$x = \sqrt{3 \cdot 0,(3)} + \sqrt{30 \cdot 0,0(3)} + \sqrt{300 \cdot 0,00(3)} + \sqrt{3000 \cdot 0,000(3)}.$$

15 Arătați că numărul x este natural, unde:

$$x = \sqrt[2]{(1)} + \sqrt[2]{(2)} + \sqrt[2]{(3)} + \dots + \sqrt[2]{(8)}.$$

16 Aflați cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu:

a $\sqrt{573}$;

b $\sqrt{256,14}$;

c $-\sqrt{129}$;

d $-\sqrt{2345,753}$.

17 Aflați cel mai mic număr întreg mai mare sau egal cu:

a $\sqrt{200}$;

b $-\sqrt{168}$;

c $\sqrt{25,64}$;

d $-\sqrt{3601,4}$.



18 Fie numărul $A = 3^{2n} \cdot 25^{n+1} - 9^{n+1} \cdot 5^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a Arătați că numărul A este pătrat perfect.

b Arătați că \sqrt{A} este număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

c Determinați valoarea numărului n pentru care \sqrt{A} nu se divide cu 15.

19 Calculați:

a $x = \sqrt{\frac{74}{71} \cdot \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{36 \cdot 37} \right) - \left(\frac{1}{37 \cdot 38} + \frac{1}{38 \cdot 39} + \dots + \frac{1}{73 \cdot 74} \right) \right]}$;

b $x = \sqrt{80 \cdot 82 \cdot \left[\left(\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{39 \cdot 41} \right) - \left(\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{37 \cdot 40} \right) \right]}$.

20 Determinați cifrele nenule distințe x și y pentru care:

a $\sqrt{1,(x) + 4,(y)}$ este număr rațional; b $\sqrt{0,x(y) + 0,y(x)}$ este număr natural.

21 Determinați numărul natural n astfel încât să existe următorii radicali:

a $\sqrt{4-n}$; b $\sqrt{2n-6}$; c $\sqrt{\frac{5-n}{11}}$; d $-\sqrt{\frac{13-3n}{2}}$.

22 Determinați numărul natural n astfel încât următorii radicali să aibă sens și să fie numere raționale:

a $\sqrt{9-n}$; b $\sqrt{16-3n}$; c $\sqrt{\frac{10-n}{7}}$; d $-\sqrt{\frac{21-3n}{2}}$.

Probleme de șapte stele



23 Determinați multimiile:

a $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = \sqrt{\frac{15-2n}{5}}, n \in \mathbb{N} \right\}$; b $B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \sqrt{\frac{25-3n}{2n+3}}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

24 Fie a și b două numere raționale astfel încât $1 \leq a \leq 3$ și $-3 \leq b \leq 1$. Arătați că expresia $E = \sqrt{(2a+b-7)^2} + |a-b| + \sqrt{(a+2b+5)^2}$ nu depinde de a și b .

25 Determinați cifrele nenule și distințe a , b , c , cu $a < b < c$, pentru care numărul $x = \sqrt{a,b(c)} + \sqrt{b,c(a)} + \sqrt{c,a(b)}$ este rațional.

I.2.2. Multimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ reprezintă multimea numerelor naturale.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ este multimea numerelor întregi.

$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid \exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b} \right\}$ este multimea numerelor raționale.

Diferite probleme geometrice conduc la evidențierea unor numere care nu sunt raționale (spre exemplu, vom învăța că un pătrat cu latura de 1 m are diagonala de lungime $\sqrt{2}$ m sau că un

triunghi echilateral cu latura de 2 cm are înălțimea de lungime $\sqrt{3}$ cm). De asemenea, vom vedea că raportul dintre lungimea oricărui cerc și diametrul său este numărul $\pi = 3,1415\dots$, care nu este număr rațional.

Vom numi astfel de numere *numere iraționale*. Reunind multimea numerelor raționale cu multimea numerelor iraționale, obținem *multimea numerelor reale*, pe care o vom nota cu \mathbb{R} . Avem inclusiunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Vom nota cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sau $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) multimea *numerelor iraționale*. În scrierea ca fracție zecimală, numerele iraționale au partea zecimală infinită și neperiodică.

Exemple de numere iraționale

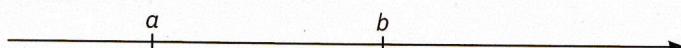
1 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{7}, -3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}+7, -4\sqrt{3}+5$;

2 $0,1010010001000010\dots$ (după fiecare cifră 1 numărul zerourilor scrise crește cu 1).

Modulul unui număr real x , notat $|x|$, este distanța de la origine la punctul ce îl reprezintă pe o axă a numerelor.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Compararea numerelor reale. Fie a și b două numere reale astfel încât a este reprezentat pe axa numerelor la stânga lui b . Spunem că a este mai mic decât b și scriem $a < b$ sau spunem că b este mai mare ca a și scriem $b > a$.



Dacă $a < b$ sau $a = b$ spunem că a este mai mic sau egal cu b și scriem $a \leq b$ sau că b este mai mare sau egal cu a și scriem $b \geq a$.

Exersare



1 Completăți următorul tabel:

x	6	-15	$-\frac{2}{9}$	$\frac{12}{5}$	0,9	-3,14	1,(54)	5,1(5)	-2,15(1)
$ x $						3,14			
$-x$						3,14			

2 Dați trei exemple de numere:

a naturale; b întregi, care nu sunt naturale; c raționale, care nu sunt întregi.

3 Stabiliți care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate și care sunt false:

a $3 \in \mathbb{N}$; b $-\frac{8}{2} \in \mathbb{Z}$; c $0 \notin \mathbb{N}$; d $\frac{2}{3} \in \mathbb{N}$;

e $2,5 \in \mathbb{Q}$; f $\sqrt{12} \in \mathbb{R}$; g $\sqrt{12} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h $-2\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4 Se consideră numerele: -4 ; $0,3$; $-\sqrt{25}$; $1,2(5)$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{(-7)^2}$; 1 .

Dintre aceste numere:

a numerele naturale sunt...;

b numerele negative sunt...;

c numerele întregi sunt...;

d numerele reale sunt...;

e numerele raționale sunt...;

f numerele iraționale sunt....

5 Arătați că numerele următoare sunt raționale:

a $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; b $\sqrt{0,(4)}$; c $\sqrt{2^2 \cdot 3^6}$; d $-\sqrt{2\frac{7}{9}}$; e $\sqrt{1,5625}$.

6 Stabiliți care dintre numerele următoare sunt raționale și care sunt iraționale:

a $\sqrt{3^2 \cdot 2^4}$; b $\sqrt{5^3 \cdot 3^2}$; c $\sqrt{5^2 - 3^2}$;
 d $\sqrt{7 + \frac{1}{9}}$; e $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; f $\sqrt{27}$.

7 Fie multimea $A = \left\{ -\frac{5}{7}; -\sqrt{25}; \frac{-15}{-3}; 7,1; 4\sqrt{3}; \frac{\sqrt{81}}{3}; \sqrt{1,(7)}; \sqrt{12} \right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor:

$A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $A - \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{Q}$; $A - \mathbb{R}$.

8 Fie multimea $A = \left\{ -\sqrt{16}; -\frac{1}{2}; \frac{75}{3}; 0,1; \frac{\sqrt{36}}{2}; -3; 2,1(3); \sqrt{2^6 \cdot 5^2}; \sqrt{28} \right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor:

$A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A - \mathbb{Q}$; $A - \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{R}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

9 Scrieți valoarea absolută (modulul) numerelor:

a -14 ; b $3,75$; c 0 ; d $\sqrt{15}$;
 e $-\frac{1}{7}$; f $-\frac{12}{5}$; g $\frac{2}{3}$; h $-3\sqrt{7}$.

10 Reprezentați pe axa numerelor reale, folosind o unitate de măsură de 1 cm, următoarele numere:

a $-2; -1; 3; 0; 2; -3$; b $\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}; -1,5; -3\frac{1}{2}; -2,5; 0,5$;
 c $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; 1,5; -1,5$; d $\sqrt{5}; -2,5; 1,5; -\sqrt{5}; 2,5; -0,5$.

11 Reprezentați următoarele puncte pe axă, folosind o unitate de 3 centimetri:

a $A\left(\frac{2}{3}\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{4}}{2}\right)$; $C(2,(6))$; $D\left(-\frac{4}{3}\right)$; b $E(\sqrt{8})$; $F(-\sqrt{3})$; $G(-\sqrt{2}+1)$; $H(\sqrt{3}-1)$.

12 Încadrați fiecare număr real între două numere întregi consecutive:

a $\boxed{} < -\sqrt{3} < \boxed{}$; b $\boxed{} < \sqrt{7} < \boxed{}$; c $\boxed{} < -\sqrt{12} < \boxed{}$;
 d $\boxed{} < -\sqrt{48} < \boxed{}$; e $\boxed{} < -\sqrt{17} < \boxed{}$; f $\boxed{} < -\sqrt{99} < \boxed{}$.

Consolidare



13 a Dați două exemple de numere reale cuprinse între 3 și 4.

b Dați două exemple de numere reale cuprinse între 1,3 și 1,4.