Mircea Fianu
Marius Perianu
Dumitru Săvulescu

Matematică

Clasa a VIII-a

I

art
educațional

Cuprins

Algebră

I. Numere reale

I.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 8
I.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea și ordonarea numerelor reale 13
I.3. Modulul unui număr real 20
I.4. Intervale în $\mathbb{R}$. Definiție, reprezentare pe axă 23
Teste de evaluare 29
Fișă pentru portofoliul individual (A1) 31
I.5. Operații cu numere reale 33
I.6. Raționalizarea numitorilor 41
Teste de evaluare 45
Fișă pentru portofoliul individual (A2) 47
I.7. Calcul cu numere reprezentate prin litere: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent număr întreg 49
I.8. Formule de calcul prescurtat 54
I.9. Descompunerea în factori 58
Teste de evaluare 64
Fișă pentru portofoliul individual (A3) 65
I.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea 67
I.11. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere 71
Teste de evaluare 83
Fișă pentru portofoliul individual (A4) 85
I.12. Probleme cu caracter aplicativ 87
I.13. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 90

Geometrie

II. Corpuri geometrice

II.1. Puncte, drepte, plane 96
II.2. Piramida 101
II.3. Prisma 105
Teste de evaluare 109
Fișă pentru portofoliul individual (G1) 111

II.4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu 113
II.5. Unghiul a două drepte în spațiu. Drepte perpendiculare 116
Teste de evaluare 119
Fișă pentru portofoliul individual (G2) 121
II.6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan. Dreaptă paralelă cu un plan 123
II.7. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan. Înălțimea piramidei 127
Teste de evaluare 131
Fișă pentru portofoliul individual (G3) 133
II.8. Pozițiile relative a două și trei plane. Plane paralele. Teoreme de paralelism 135
II.9. Secțiuni paralele cu baza în corpurile studiate. Trunchiul de piramidă 139
Teste de evaluare 143
Fișă pentru portofoliul individual (G4) 145
II.10. Probleme cu caracter aplicativ 147
II.11. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 150

III. Proiecții ortogonale

III.1. Proiecții de puncte, segmente și drepte pe un plan 154
III.2. Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecției unui segment 158
III.3. Teorema celor trei perpendiculare 162
Teste de evaluare 167
Fișă pentru portofoliul individual (G5) 169
III.4. Unghi diedru. Plane perpendiculare 171
III.5. Calculul unor distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate 176
Teste de evaluare 181
Fișă pentru portofoliul individual (G6) 183
III.6. Probleme cu caracter aplicativ 185
III.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 187

IV. Variante de subiecte pentru teză 190

Soluții 198

Algebră

8	**I.1**	Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
13	**I.2**	Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea și ordonarea numerelor reale
20	**I.3**	Modulul unui număr real
23	**I.4**	Intervale în $\mathbb{R}$. Definiție, reprezentare pe axă
29		Teste de evaluare
31		Fișă pentru portofoliul individual A1
33	**I.5**	Operații cu numere reale
41	**I.6**	Raționalizarea numitorilor
45		Teste de evaluare
47		Fișă pentru portofoliul individual A2
49	**I.7**	Calcul cu numere reprezentate prin litere: adunarea și scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere cu exponent întreg
54	**I.8**	Formule de calcul prescurtat
58	**I.9**	Descompunerea în factori
64		Teste de evaluare
65		Fișă pentru portofoliul individual A3
67	**I.10**	Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea
71	**I.11**	Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere
83		Teste de evaluare
85		Fișă pentru portofoliul individual A4
87	**I.12**	Probleme cu caracter aplicativ
90	**I.13**	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

I

Numere reale

I.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Mulțimea numerelor naturale

Notații. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ este *mulțimea numerelor naturale;*
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = 1, 2, ..., n, ...\}$ este *mulțimea numerelor naturale nenule.*

Observație. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare* și *înmulțire*, adică suma a două numere naturale este un număr natural, iar produsul a două numere naturale este tot un număr natural.

Mulțimea numerelor întregi

Notații. $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$ este *mulțimea numerelor* întregi;
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor întregi nenule.*

Observația 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z} = \{\pm n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^*$.

Observația 2. Mulțimea numerelor întregi este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere și înmulțire*, adică suma, diferența și produsul a două numere întregi sunt numere întregi.

Mulțimea numerelor raționale

Notații. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ este *mulțimea numerelor raționale;*

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor raționale nenule.*

Observația 1. Mulțimea numerelor raționale este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere, înmulțire* și *împărțire*, adică suma, diferența, produsul și câtul a două numere raționale (dintre care împărțitorul este nenul) sunt numere raționale.

Observația 2. Pentru orice număr rațional nenul q există o *unică fracție ireductibilă* $\dfrac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \dfrac{a}{b}$.

Observația 3. Un număr rațional poate fi reprezentat prin *fracții ordinare echivalente* sau printr-o *fracție zecimală finită* sau *periodică*.

Exemple. 1 $\dfrac{12}{5} = \dfrac{24}{10} = 2{,}4$, fracție zecimală *finită;*

2 $\dfrac{250}{6} = \dfrac{125}{3} = 41{,}666... = 41{,}(6)$, fracție zecimală *periodică simplă;*

3 $\dfrac{1505}{6} = 250{,}8333... = 250{,}8(3)$, fracție zecimală *periodică mixtă.*

Mulțimea numerelor reale

Notații. $\mathbb{R}$ este *mulțimea numerelor reale;*
$\mathbb{R}^*$ este *mulțimea numerelor reale nenule;*
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este *mulțimea numerelor iraționale.*

Observația 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Observația 2. Orice *număr irațional* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică.*

Observația 3. Reciproc, dacă un *număr real* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică*, atunci *numărul este irațional.*

Exersare

1 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

a $5 \in \mathbb{N}$; b $\sqrt{23} \in \mathbb{R}$; c $8,(3) \in \mathbb{N}$;
d $-3 \notin \mathbb{N}$; e $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$; f $13 \in \mathbb{Z}$;
g $\frac{7}{3} \in \mathbb{Z}$; h $\frac{5}{11} \in \mathbb{Q}$; i $2,25 \in \mathbb{N}^*$.

2 Se consideră numerele $-7; 5\frac{1}{4}; -5; -3,25; \sqrt{3}; \frac{1}{6}; 0; -\frac{2}{5}; +4; 3,1(4)$.
Dintre aceste numere, scrieți pe caiet:
a numerele naturale; b numerele nenule; c numerele întregi;
d numerele reale; e numerele raționale; f numerele iraționale.

3 Fie $A = \left\{-17; 4\frac{1}{2}; 0,(5); \sqrt{4}; -2; \sqrt{13}; 0; 279; 5\frac{3}{13}; \frac{23}{14}\right\}$. Determinați
a $A \cap \mathbb{N}$; b $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$; c $A \cap \mathbb{Q}$;
d $A \cap \mathbb{Z}$; e $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$; f $A \setminus \mathbb{Q}^*$;
g $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; h $A \setminus \mathbb{R}_+$; i $A \setminus \mathbb{R}$.

4 Dintre următoarele fracții, indicați fracțiile echivalente cu $\frac{3}{5}$.
a $\frac{6}{10}$; b $\frac{30}{25}$; c $\frac{9}{25}$; d $\frac{30}{50}$; e $\frac{12}{20}$; f $\frac{51}{85}$.

5 Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele:
a 4,7; b 19,(5); c 0,5(3); d 5,25; e 32,(41); f 1,21(05).

6 Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție ireductibilă:
a 5,3; b 0,701; c 125,49; d 6,3(5); e 2,(4); f 13,7(14).

7 Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, amplificându-le, eventual, convenabil:
a $\frac{7}{10}$; b $\frac{13}{25}$; c $\frac{5}{9}$; d $\frac{29}{5}$; e $\frac{11}{20}$; f $\frac{13}{6}$.

8 Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, simplificându-le, eventual, mai întâi:
a $\frac{34}{10}$; b $\frac{16}{8}$; c $\frac{412}{90}$;
d $\frac{345}{100}$; e $\frac{21}{3}$; f $\frac{1224}{396}$;
g $\frac{344}{1000}$; h $\frac{2}{25}$; i $\frac{23}{180}$.

9 Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:
a $\frac{9}{5}$; b $\frac{5}{11}$; c $\frac{707}{77}$; d $\frac{21}{6}$; e $\frac{202}{303}$; f $\frac{51}{37}$.

10 Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ este echivalentă cu fracția:
a $\frac{34}{65}$; b $\frac{39}{65}$; c $\frac{13}{1001}$; d $\frac{85}{15}$; e $\frac{55}{1133}$; f $\frac{5151}{8585}$.

11 Reprezentați numerele raționale de mai jos sub forma $\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$.
a $\frac{-4}{-5}$; b $-\frac{-37}{-11}$; c $-3\frac{5}{13}$; d 0,9(36); e 3,(7); f −2,1(6).

12 Dați câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracția $\frac{6}{n}$ este:

a subunitară; **b** ireductibilă; **c** reductibilă;
d zecimală finită; **e** periodică simplă; **f** periodică mixtă.

13 Determinați fracția ireductibilă echivalentă cu:

a $\frac{474\,747}{252\,525}$ **b** $\frac{123\,123}{234\,234}$ **c** $\frac{49\,704\,970}{24\,572\,457}$.

14 Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții, enunțând câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a „Orice număr natural este număr întreg.
b „Orice număr real este număr rațional".
c „Dacă un număr nu este rațional, atunci numărul nu este întreg."
d „Orice număr întreg este număr natural."
e „Orice număr rațional este număr real."
f „Un număr este natural numai dacă numărul nu este întreg."

15 Scrieți numărul 12 ca:

a suma a trei numere naturale; **b** suma a două numere întregi din care unul negativ;
c diferența a două numere întregi; **d** produsul a două numere raționale;
e produsul a două numere iraționale; **f** suma a două numere iraționale.

16 Reprezentați ca sume de produse între cifrele din baza 10 și puterile ale lui 10 următoarele numere raționale:

a 739; **b** 0,145; **c** 15,34;
d 25,203; **e** 210,08; **f** 2,3(4).

Rezolvare: **a** $739 = 7\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0$

c $15{,}34 = 1\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + 3\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2}$ sau $15{,}34 = 1\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + \frac{3}{10^1} + \frac{4}{10^2}$.

17 Determinați, în fiecare din situațiile următoare, numerele întregi n pentru care relațiile următoare reprezintă propoziții adevărate:

a $\frac{14}{n-1} \in \mathbb{N}$; **b** $\frac{18}{2n-1} \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; **c** $\frac{25}{4n+1} \in \mathbb{Z}$;
d $\frac{2n}{2n+1} \in \mathbb{Z}_+$; **e** $\frac{3n+5}{3n-1} \in \mathbb{Z}$; **f** $\frac{4n+11}{2n+3} \in \mathbb{N}$.

18 Scrieți câte două numere raționale cuprinse între $\frac{1}{7}$ și $\frac{1}{6}$ sub formă de:

a fracții ordinare; **b** fracții zecimale periodice; **c** fracții zecimale finite;

19 Determinați numerele naturale nenule x și y pentru care $\overline{xxxx}_{(3)} = \overline{yy}_{(9)}$.

20 Numerele 123,123123; 0,(142857) și 7,2(51) sunt scrise sub formă de fracție zecimală.

a Scrieți a 10-a cifră de după virgulă a fiecărui număr.
b Determinați a 100-a cifră de după virgulă a fiecărui număr.

21 Aflați cel mai mic număr natural nenul a pentru care fracțiile $\frac{a}{12}$, $\frac{a}{5}$ și $\frac{a}{36}$ reprezintă simultan numere naturale.

22 **a** Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

b Determinați suma celor mai mici 2011 numerele naturale nenule n pentru care fracția $\frac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

23 Aflați numerele naturale n pentru care fracțiile următoare sunt reductibile:

a $\frac{2n+3}{10n+8}$; **b** $\frac{3n+2}{5n+8}$; **c** $\frac{n+1}{n^2-3n+1}$.

24 Fie numărul $=\frac{10^k-(-1)^{2k}}{9}+\frac{3n^2+4n+(-1)^{2k\;1}\cdot n}{6}$, $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \mathbb{N}$.
Arătați că $a \in \mathbb{N}$.

25 Demonstrați că numerele următoare sunt iraționale:

a $\sqrt{3}$; **b** $\sqrt{5}$; **c** $\sqrt{p}$, unde p este un număr natural prim.

Rezolvare: **a** Presupunem că $\sqrt{3}$ este număr rațional adică există fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ astfel încât $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, echivalent cu $3=\frac{a^2}{b^2}$, sau $3b^2=a^2$. Deducem că $3 \mid a$, adică $a=3a_1$, $a_1 \in \mathbb{N}^*$. Înseamnă că $3b^2=(3a_1)^2$, echivalent cu $3b^2=9a_1^{\,2}$, sau $b^2=3a_1^{\,2}$. Deducem că $3 \mid b$, adică $b=3b_1$, $b_1 \in \mathbb{N}^*$. Deci $\frac{a}{b}=\frac{3a_1}{3b_1}$ este fracție reductibilă, contrar presupunerii făcute. Rezultă că presupunerea este falsă, deci $\sqrt{3}$ este număr irațional.

26 Stabiliți dacă numărul $\sqrt{A}$ este rațional în fiecare din următoarele cazuri:

a $A=3^2+4^2+5^2$

b $A=5^{2006}+7^{2007}$;

c $A=1+3+5+7+\ldots+199$;

d $A=199+2\cdot(1+2+3+\ldots+199$.

27 Scrieți elementele mulțimilor:

a $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{4}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$;

b $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{7}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c $C=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{5}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$;

d $D=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{10}{3x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$.

28 Scrieți elementele mulțimilor:

a $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{3x+11}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$;

b $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{5x+13}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid 75\le 3x^2\le 300\}$;

d $D=\{x\in\mathbb{N} \mid 14<x^2+4\le 40\}$.

29 Determinați cifrele a, b, c, astfel încât să aibă loc relațiile:

a $\overline{4a1} \vdots 3$; **b** $\overline{71a5} \vdots 9$; **c** $\overline{62ab} \vdots 15$;

d $\overline{2a3b} \vdots 36$; **e** $\overline{aa67b} \vdots 45$; **f** $\overline{99abc} \vdots 198$.

30. Se consideră numărul $a=\frac{27}{45}$ și mulțimea $M=\{a, 2a, 3a, \ldots, 45a\}$.

a Determinați numărul de elemente din mulțimea $M \cap \mathbb{N}$;

b Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din M, acesta să fie număr natural.

Aprofundare

31 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții, demonstrând propozițiile adevărate și oferind câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a Produsul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.

b Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este număr irațional.

c Produsul unui număr irațional cu un număr rațional nenul este număr irațional.

d Există două numere iraționale a căror diferență este număr rațional.

e Pătratul oricărui număr irațional este număr rațional.

f Orice număr irațional ridicat la puterea zero este număr natural.

Rezolvare: **a** Propoziție falsă. Contraexemplu: $5-\sqrt{3}$ și $5+\sqrt{3}$ sunt numere iraționale, dar $(5-\sqrt{3})\cdot(5+\sqrt{3})=5^2-\sqrt{3}^2=25-3=22$, care nu este irațional.

32 **a** Arătați că un număr este divizibil cu 8 dacă și numai dacă numărul format de ultimele trei cifre ale sale este divizibil cu 8.

b Arătați că $\overline{abc}$ este divizibil cu 8 dacă și numai dacă $4a+2b+c \vdots 8$.

33 Se consideră numărul $a=\overline{0,122333\ldots\underbrace{nn\ldots n}_{n \text{ ori}}\ldots}$.

a Demonstrați că a este număr irațional.

b Determinați a 100-a cifră de după virgulă a numărului a.

34 Determinați cifra x (din baza zece) astfel încât:

a $\sqrt{\frac{\overline{24x}}{60}} \in \mathbb{N}$; **b** $\sqrt{\frac{\overline{17x}}{11}} \in \mathbb{N}$; **c** $\sqrt{\frac{\overline{2x9x}}{18}} \in \mathbb{N}$;

d $\sqrt{\frac{\overline{28x}}{18}} \in \mathbb{Q}$; **e** $\sqrt{\frac{\overline{7x}}{12}} \in \mathbb{Q}$; **f** $\sqrt{\frac{\overline{18x}}{4}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

35 Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

a $2+\sqrt{3}$; **b** $\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}$; **c** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

d $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; **e** $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; **f** $2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$.

36 Demonstrați că, dacă n este un număr natural, atunci următoarele numere nu sunt raționale:

a $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 9+8}$; **b** $\sqrt{5n+2}$; **c** $\sqrt{4n+2}$.

Probleme de șapte stele

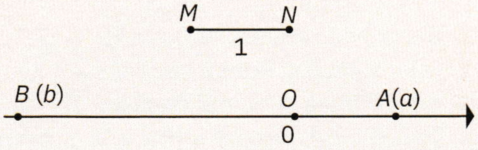
37 Fie $a \in \mathbb{Q}$. Dacă $7a \in \mathbb{Z}$ și $3a \in \mathbb{Z}$, demonstrați că $a \in \mathbb{Z}$.

38 Demonstrați că, dacă $n \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

39 Arătați că numărul $x = 0{,}1010010001001\ldots$ este irațional.

40 Fie numerele $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a+bx=c+dx$. Arătați că $a = c$ și $b = d$.

I.2 Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea și ordonarea numerelor reale



Axa numerelor reale este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O numit *origine*, un *segment unitate* și un *sens pozitiv* (consemnat printr-o săgeată).
Oricărui punct A de pe axa numerelor îi corespunde un număr real a, numit *abscisa punctului A*, astfel încât $OA = |a|$. Notăm această corespondență cu $A(a)$.
Reciproc, oricărui număr real b îi corespunde pe axa numerelor punctul $B(b)$, numit *imaginea* numărului real b, astfel încât $OB = |b|$. Punctului O îi corespunde numărul real 0. Numerele *reale pozitive* se reprezintă pe semidreapta care indică sensul pozitiv.

Observație. Abscisa unui punct A de pe axa numerelor se mai notează și x_A. Dacă $A(x_A)$ și $B(x_B)$ sunt două puncte pe axa numerelor, lungimea segmentului $[AB]$ este $AB = |x_B - x_A|$.

Compararea și ordonarea numerelor reale

Spunem că numărul real a este *mai mare* decât numărul real b, dacă există un număr real pozitiv c astfel încât $a = b + c$. Notăm $a > b$.
Echivalent, scriem $b < a$ și citim b este mai mic decât a. Dacă $a > b$ sau $a = b$, spunem că numărul real a este *mai mare sau egal* cu numărul real b și notăm $a \geq b$, sau, echivalent, spunem că b este *mai mic sau egal* cu a și notăm $b \leq a$.

Observații

1 Oricare două numere reale *pot fi comparate* în sensul că, dacă a și b sunt numere reale, atunci $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$.
2 Orice număr *pozitiv* este *mai mare* decât zero și orice număr *negativ* este *mai mic* decât zero.
3 Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv.

Proprietățile relației de ordine

1 *Reflexivitatea*: $a \geq a$, oricare ar fi numărul real a.
2 *Antisimetria*: Oricare ar fi numerele a și b, dacă $a \geq b$ și $b \geq a$, atunci $a = b$.
3 *Tranzitivitatea*: Oricare ar fi numerele a, b și c, dacă $a \geq b$ și $b \geq c$, atunci $a \geq c$.
4 Relația $\geq$ este *compatibilă* cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor reale, adică, oricare ar fi numerele a și b, inegalitatea $a \geq b$ este echivalentă cu:
a $a + c \geq b + c, \forall c \in \mathbb{R}$; **b** $a \cdot c \geq b \cdot c, \forall c > 0$; **c** $a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c < 0$.
5 Dacă $a \geq b$ și $c \geq d$, atunci $a + c \geq b + d$.
Dacă $a \geq b \geq 0$ și $c \geq d \geq 0$, atunci $a \cdot c \geq b \cdot d \geq 0$.

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real.

Partea întreagă a numărului real x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.
Numărul $\{x\} = x - [x]$ se numește *partea fracționară* a numărului real x.

Exemple:
1 $[1,53] = 1$, deoarece $1 \leq 1,53 < 2$ și $\{1,53\} = 1,53 - [1,53] = 1,53 - 1 = 0,53$.
2 $[-1,53] = -2$, fiindcă $-2 \leq 1,53 < -1$ și $\{-1,53\} = -1,53 - [-1,53] = -1,53 - (-2) = 0,47$.

Proprietăți ale părții întregi a unui număr real

1 $[x] \le x < [x] + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2 $[x] = x$ dacă și numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.
3 $[x + k] = [x] + k$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.
4 $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$..

Proprietăți ale părții fracționare a unui număr real

1 $0 \le \{x\} < 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2 $\{x\} = x$ dacă și numai dacă $0 \le x < 1$.
3 $\{x\} = 0$ dacă și numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.
4 $\{x + k\} = \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. și oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Aproximări și rotunjiri. Fie x un număr real, r un număr rațional și e un număr real strict pozitiv. Spunem că numărul rațional r îl *aproximează* pe x (este *aproximare* a lui x) cu *eroare* cel mult egală cu e dacă $|x - r| \le e$.
Aproximarea se face prin *lipsă* dacă $r < x$ sau prin *adaos* dacă $r \ge x$.

Observație. Fie x un număr real pozitiv și $e = 10^{-p}$, $p \in \mathbb{Z}$. Atunci:
1 O aproximare a lui x prin lipsă cu eroare de cel mult 10^{-p} este

$$x_l = 10^{-p} \cdot [10 \cdot x].$$

2 O aproximare a lui x prin adaos cu eroare de cel mult 10^{-p} este

$$x_a = 10^{-p} \cdot ([10^p \cdot x] + 1)$$

3 Rotunjirea lui x cu eroare de cel mult 10^{-p} este $r = \begin{cases} x_l, \text{ dacă } x - x_l < x_a - x \\ x_a, \text{ dacă } x - x_l \ge x_a - x \end{cases}$.

Exemple:

1 Pentru $p = 1$ se obțin aproximări ale lui x, prin lipsă sau prin adaos, cu eroare cel mult egală cu 10^{-1} (altfel spus, aproximările cu eroare de cel mult o zecime). Fie $x = 24{,}53$ avem
– o aproximare a lui x prin lipsă: $x_l = 10^{-1} \cdot [10^1 \cdot 24{,}53] = 24{,}5$;
– o aproximare a lui x prin adaos: $x_a = 10^{-1} \cdot ([10^1 \cdot 24{,}53] + 1) = 24{,}6$.

Cum $x - x_l = 24{,}53 - 24{,}5 = 0{,}03$ și $x_a - x = 24{,}6 - 24{,}53 = 0{,}07$, iar $0{,}03 < 0{,}07$ rezultă că numărul 24,5 îl rotunjește pe 24,53 cu eroare de cel mult 10^{-1} (o zecime).

2 Pentru $p = -2$, se obțin aproximări ale lui x cu eroare cel mult egală cu 10^2 (altfel spus aproximările la ordinul sutelor). Pentru $x = 321{,}4$ avem:
– o aproximare a lui x prin lipsă: $x_l = 10^2 \cdot [10^{-2} \cdot 321{,}4] = 10^2 \cdot 3 = 300$;
– o aproximare a lui x prin adaos: $x_a = 10^2 \cdot \left([10^{-2} \cdot 321{,}4] + 1\right) = 10^2 \cdot 4 = 400$.

Exersare

1 Reprezentați pe axă numerele –3; 5; –1; 2; 0; 4, luând ca unitate un segment de 1 cm.

2 Luați ca unitate un segment de 5 cm și reprezentați pe axă numerele: –1; 0,8; 1; $-\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{3}{10}$; $1\frac{2}{10}$.

3 Comparați numerele:

a 7 și –20;
b –7 și –6;
c –2 și –12;
d 1,2 și 1,(2);
e 2,022 și 2,202;
f –0,8(98) și –0,(89);
g –0,012 și –0,0021;
h – 1,023 și – 1,203;
i 9,6(969) și 9,(69).

4 Comparați numerele:

a $\frac{1}{5}$ și $\frac{3}{2}$; **b** $-\frac{4}{23}$ și $-\frac{1}{23}$; **c** $\frac{5}{7}$ și $\frac{11}{7}$;

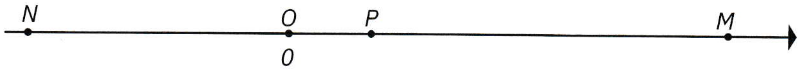
d $-\frac{11}{12}$ și $-\frac{12}{11}$; **e** $\frac{5}{6}$ și $\frac{6}{7}$; **f** $\frac{33}{176}$ și $\frac{15}{85}$;

g $-3\frac{1}{2}$ și $-3\frac{4}{8}$; **h** $\frac{8}{5}$ cu $\frac{6}{4}$; **i** $-\frac{5}{4}$ cu $-\frac{5}{3}$.

5 **a** Scrieți în ordine crescătoare numerele: 14; –3; 0; $\frac{8}{2}$; –15,4; $7\frac{1}{2}$; $-\sqrt{5}$.

b Ordonați descrescător numerele: 18; $-\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; –1; 9,(7); –5,4; –0,9.

6 În figura de mai jos, sunt reprezentate pe axa numerelor punctele $O(0)$, M, N și P astfel încât $OM = 5$, $OP = 1$, $ON = 3$.



a Determinați abscisa fiecăruia dintre punctele M, N și P;

b Calculați lungimile segmentelor $[MN]$ și $[MP]$;

c Verificați dacă punctul P este mijlocul segmentului $[MN]$.

7 Aflați partea întreagă și partea fracționară a următoarelor numere reale:

a 8,7; **b** –7,2; **c** 2,(5); **d** –4,(3);

e $\sqrt{13}$; **f** $-\sqrt{5}$; **g** $-4+\sqrt{5}$; **h** $-3+\sqrt{9}$;

i $\frac{2}{7}$; **j** $-\frac{2}{7}$; **k** $4\frac{1}{3}$; **l** $-3\frac{1}{3}$.

8 Dați exemple de trei numere iraționale care să aibă partea întreagă egală cu:

a 0; **b** 4; **c** –3; **d** –1;

9 Calculați $[x] + 2\{x\}$ unde:

a $x = 12$; **b** $x = 5,4$; **c** $x = -4,3$; **d** $x = -1,(5)$;

e $x = \sqrt{3}$; **f** $x = \frac{17}{5}$; **g** $x = -\frac{23}{10}$; **h** $x = 3,(3)$.

10 Fie numărul $a = 12,5481632$.

a Aproximați numărul a cu o eroare de cel mult o sutime prin lipsă.

b Aproximați numărul a cu o eroare de cel mult o miime prin adaos.

c Rotunjiți numărul cu o eroare egală cu cel mult: **i** 10^{-2}; **ii** 10^{-5}.

d Aproximați numărul $b = 1000 \cdot a$ cu eroare de cel mult 10^2 prin lipsă.

11 Calculați $a = \sqrt{279,3543}$ cu patru zecimale exacte și apoi:

a rotunjiți la zecimi numărul a;

b scrieți numărul a cu aproximație de o miime prin lipsă;

c scrieți numărul a cu aproximație de o zecime prin adaos;

d scrieți partea întreagă a numărului a.

12 Pentru numărul 27,853761, scrieți o aproximare:

a cu eroare de 10^{-2} prin adaos; **c** cu eroare de 10^{-4} prin lipsă;

b cu eroare de 10^{-5} prin adaos; **d** cu eroare de 10 prin lipsă.

13 Calculați $2x+4y-3z$, unde:

$$x=[6,4]+\left[\frac{5}{2}\right]-[2,(3)]+\left[-\frac{4}{3}\right]+[-3,01],$$

$$y=\{1,5\}+\{-1,5\}-\left\{\frac{3}{4}\right\}+\{-1,(3)\}-\left\{\frac{2}{3}\right\},$$

$$z=[2,71]+\{3,9\}-[-0,2]+\{6\}+[-3]+\left\{2\frac{1}{10}\right\}.$$

14 Pentru fiecare $a, b \in \mathbb{R}$, considerăm numerele

$$\max(a,b)=\begin{cases} a, \text{ dacă } a \geq b \\ b, \text{ dacă } a < b \end{cases} \quad \text{și} \quad \min(a,b)=\begin{cases} a, \text{ dacă } a \leq b \\ b, \text{ dacă } a \geq b \end{cases},$$

numite *maximum* și respectiv *minimum* dintre a și b. Determinați:

a $\max(-11;-7)$; **b** $\min\left(\frac{2}{5};\frac{2}{10}\right)$; **c** $\min(-18;-17,4)$;

d $\max\left(12,5;\ 5\frac{3}{4}\right)$; **e** $\max(5^2;(-2)^5)$; **f** $\max(-\sqrt{100};-\sqrt{81})$.

15 Reprezentați pe axă numerele $\frac{3}{4}$; -2; 2; -1; $0,5$; $1,75$; $-0,25$; $-3,5$, luând ca unitate un segment convenabil.

16 Reprezentați pe axa numerelor elementele fiecăreia dintre mulțimile:

a $A=\{n\in\mathbb{N}^* \mid n \text{ divide } 12\}$; **b** $B=\{n\in\mathbb{Z} \mid -3\leq n<2\}$;

c $C=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{15}{n+1}\in\mathbb{N}\right\}$; **d** $D=\left\{n\in\mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{5}{2n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

17 Încadrați fiecare din numerele de mai jos între două numere întregi consecutive:

a $1,2$; **b** $1,(2)$; **c** $-4,3$; **d** $-4,(5)$;

e $3\sqrt{2}$; **f** $-2\sqrt{5}$; **g** $\sqrt{2}+\sqrt{50}$; **h** $\sqrt{3}-\sqrt{27}$;

i $4+\sqrt{3}$; **j** $\frac{47}{21}$; **k** $3\frac{1}{3}$; **l** $-\frac{75}{28}$.

18 Comparați numerele:

a $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$; **b** $\sqrt{19}$ și $2\sqrt{5}$; **c** $6\sqrt{3}$ și 11;

d $-3\sqrt{3}$ și $-4\sqrt{2}$; **e** $-\sqrt{289}$ și $-3\sqrt{25}$; **f** $-4\sqrt{15}$ și $-9\sqrt{3}$.

19 Comparați numerele:

a $\sqrt{3}+\sqrt{75}$ și 10; **b** $2\sqrt{7}+\sqrt{75}$ și $\sqrt{28}+\sqrt{44}$; **c** $3-4\sqrt{5}$ și -6;

d $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}$ și 4; **e** $8+5\sqrt{2}$ și $8+2\sqrt{5}$; **f** $5-6\sqrt{2}$ și $-\sqrt{8}$.

20 **a** Ordonați descrescător numerele: $-\sqrt{7}$; $1,14$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{11}$.

b Scrieți în ordine crescătoare numerele: 5; $\frac{13}{6}$; $\frac{7}{14}$; $-\frac{5}{15}$; $-1,(34)$, $\sqrt{5}$.

21 Calculați:

a $\max(18;-7)-\min(-0,(3);-0,34)$; **b** $3\cdot\min(4;-1)+\max(-7;-2)$;

c $\max(5;2\sqrt{6})+\min(18;14+\sqrt{23})$; **d** $2\max(\sqrt{8};2,1)-3\max(\sqrt{2};1,75)$.

22 Determinați mulțimile:

a $\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;0<\dfrac{3x+10}{8}<\dfrac{11}{5}\right\}$; **b** $\left\{x\in\mathbb{N}\;\middle|\;1\le\dfrac{5x+12}{12x+5}\le 2\right\}$;

c $\left\{x\in\mathbb{N}\;\middle|\;\dfrac{x+1}{12}<\dfrac{6}{13}<\dfrac{2x+1}{14}\right\}$; **d** $\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\dfrac{2x+1}{5}<\dfrac{3x+1}{9}<\dfrac{4x+1}{13}\right\}$;

e $\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{3\}\;\middle|\;\dfrac{x-3}{6}<\dfrac{3}{x-3}<\dfrac{x-3}{3}\right\}$; **f** $\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\dfrac{1}{x+2}>\dfrac{3}{2x+4}>\dfrac{5}{4x+8}\right\}$.

23 Ordonați crescător următoarele secvențe de numere reale:

a $5, 2\sqrt{7}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, \sqrt{30}, 2\sqrt{5}$; **b** $12, 5\sqrt{6}, 9\sqrt{2}, 4\sqrt{10}, 2\sqrt{30}, 7\sqrt{3}$;

c $31, 24\sqrt{2}, 15\sqrt{5}, 12\sqrt{30}, 12\sqrt{7}$; **d** $5\sqrt{10}, 7\sqrt{5}, 9\sqrt{3}, 4\sqrt{15}, 10\sqrt{2}, 15$;

e $-3\sqrt{14}, -5\sqrt{5}, -3\sqrt{13}, -4\sqrt{7}, -11$; **f** $-10, -6\sqrt{3}, -3\sqrt{11}, -5\sqrt{5}, -7\sqrt{2}$.

24 **a** Dați exemplu de două numere reale a și b astfel încât $a>b$ și $\{a\}<\{b\}$.
b Dați exemplu de două numere reale a și b astfel încât $\{a\}=\{b\}=0{,}7$. și $a\cdot b<0$. Calculați $\{a\cdot b\}$ în acest caz.

25 Fie a și b două numere reale, $a<b$. Demonstrați că:

a $a<\dfrac{2a+b}{3}<\dfrac{a+2b}{3}<b$; **b** $a<\dfrac{3a+b}{4}<\dfrac{a+b}{2}<\dfrac{a+3b}{4}<b$.

26 Fie a și b două numere reale pozitive, $a<b$. Arătați că:

a $a^2<ab<b^2$; **b** $a^3<a^2b<ab^2<b^3$; **c** $a^4<a^3b<a^2b^2<ab^3<b^4$.

27 Demonstrați că, pentru orice numere reale a, b, avem:

a $a^2+ab+b^2\ge 0$; **b** $a^2-ab+b^2\ge 0$.

28 Demonstrați că:

a $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\ldots+\dfrac{1}{19}<1$; **b** $\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{51}+\dfrac{1}{52}+\ldots+\dfrac{1}{59}<\dfrac{1}{5}$.

c $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}<1$; **d** $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 101}<\dfrac{1}{2}$;

e $0{,}2<\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{49\cdot 50}<0{,}25$; **f** $\dfrac{2}{5}<\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots+\dfrac{1}{9^2}<\dfrac{8}{9}$.

29 Reprezentați pe câte o axă a numerelor elementele fiecăreia dintre mulțimile:

a $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 3\le x<7\}$; **b** $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\dfrac{3x+10}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c $C=\left\{\dfrac{x}{y}\;\middle|\;x,y\in\mathbb{N}\text{ şi }1\le x,y<4\right\}$; **d** $D=\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\dfrac{4x+17}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

30. Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mic:

a $\sqrt{197}$ și $2+\sqrt{3}$; **b** $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ și $\sqrt{32}$; **c** $\sqrt{11}+\sqrt{13}$ și $\sqrt{19}+\sqrt{5}$;

d $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ și $3+\sqrt{3}$; **e** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ și $2-\sqrt{3}$; **f** $\sqrt{15}-\sqrt{13}$ și $\sqrt{14}-3$.

Rezolvare: **d** Numerele date sunt pozitive, deci putem compara pătratele lor. Avem: $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2=12+2\sqrt{35}$ și $(3+\sqrt{3})^2=12+6\sqrt{3}$. Cum $(2\sqrt{35})^2=140>108=(6\sqrt{3})^2$, rezultă $2\sqrt{35}>6\sqrt{3}$, deci $3+\sqrt{3}<\sqrt{7}+\sqrt{5}$.