

**ADRIANA DRAGOMIR****OVIDIU BĂDESCU**

Aceasta lucrare și fost scriată cu suflet și pasiune, având de a oferi tuturor elevilor de clasa a IX-a (și nu numai) o colecție de probleme și exerciții utile. Acestea au conținut în număr 29 de mil subiecte la lucru sau la testuri care sănsează ca un puzzle matematice în încercările la tablă, unele propuse chiar și elevilor mici, pe lângă acolo unde au fost inserate probleme relativ complexe, de la nivelul concurselor și olimpiadei. În mare răsuflare, cunosc că în următoarele lăzile, elevii vor să lucreze pe care le au într-o dințire colegii în ceea ce priveste rezolvarea lor, împreună cu multe cu atât de găzdui.

Majoritatea problemelor sunt rezolvabile chiar și de elevi din clasa a VIII-a, unde am prezentat că este cazul într-un număr de exerciții rezolvate evident, ceea ce îi încurajează

# PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a IX-a

**consolidare**

## *Editia a VIII-a*

Este posibil să fie aplicată în cadrul unor proiecte și cercipările cu grad sporit de dificultate este prea mare. Iată cum în funcție de prezenta calificare se adresează tuturor elevilor de clasa a IX-a, indiferent de profil și filieră. Nivelul de aptitudini, cunoștințe și tehnici interne de la o clasă la alta, nu au de sens, și în sfârșit, credem că rolul profesorului este și deosebit de deosebit de important, deoarece este el care va evalua elevii și să îi susțină, pe cât posibil, o cale de dezvoltare și de învățare. În ceea ce privește ceea ce se ne întâmplă în viața de zi cu zi, nu e de mirare că elevii ar căuta să se întrețină cu cunoștințele și abilitățile pe care le au și să le potrivească.

Într-o lume în care orice informație poate fi accesată în doar câteva secunde, ceea ce este mai important să formăm orele pline de învățare și de comunicare, unde elevii să se întâlnească, să se coplească și să învețe împreună, să crească într-o atmosferă de prietenie și să se dezvolte potențialul lor.

Este posibil să fie aplicată în cadrul unor proiecte și cercipările cu grad sporit de dificultate este prea mare. Iată cum în funcție de prezenta calificare se adresează tuturor elevilor de clasa a IX-a, indiferent de profil și filieră. Nivelul de aptitudini, cunoștințe și tehnici interne de la o clasă la alta, nu au de sens, și în sfârșit, credem că rolul profesorului este și deosebit de deosebit de important, deoarece este el care va evalua elevii și să îi susțină, pe cât posibil, o cale de dezvoltare și de învățare.

Într-o lume în care orice informație poate fi accesată în doar câteva secunde, ceea ce este mai important să formăm orele pline de învățare și de comunicare, unde elevii să se întâlnească, să se coplească și să învețe împreună, să crească într-o atmosferă de prietenie și să se dezvolte potențialul lor.



Evident, de către caracterul unicității acestui carte este perfecțiunea. Așteptăm, ceea ce, sugestii, înscrierile, comentarii și critici.

**Editura Paralela 45**

AUTORII

Prefață .....	5
<b>Capitolul I. Mulțimi și elemente de logică matematică .....</b>	7
1.1. Mulțimea numerelor reale .....	7
1.2. Elemente de logică matematică, mulțimi .....	26
1.3. Tipuri de raționamente logice (inducție matematică, probleme de numărare și nu numai) .....	38
1.4. Probleme de matematică aplicată .....	48
1.5. Teste de evaluare .....	50
<b>Capitolul II. Funcții .....</b>	53
2.1. Siruri .....	53
2.2. Progresii aritmetice, progresii geometrice .....	57
2.3. Funcții, funcția de gradul I .....	68
2.4. Probleme de matematică aplicată .....	86
2.5. Teste de evaluare .....	88
2.6. Ecuația de gradul al II-lea .....	90
2.7. Funcția de gradul al II-lea .....	102
2.8. Probleme de matematică aplicată .....	113
2.9. Teste de evaluare .....	115
<b>Capitolul III. Geometrie vectorială .....</b>	117
3.1. Vectori în plan .....	117
3.2. Coliniaritate, concurență, paralelism .....	122
3.3. Probleme de matematică aplicată .....	130
3.4. Teste de evaluare .....	132
<b>Capitolul IV. Trigonometrie și aplicații în geometrie .....</b>	135
4.1. Elemente de trigonometrie .....	135
4.2. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană .....	150
4.3. Probleme de matematică aplicată .....	162
4.4. Teste de evaluare .....	165
<b>Capitolul V. Modele de teste .....</b>	168
5.1. Lucrări scrise semestriale .....	168
5.2. Teste de pregătire pentru Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici” .....	178
5.3. Teste de pregătire pentru Olimpiada națională de matematică .....	184
<b>Soluții .....</b>	191
Capitolul I .....	191
Capitolul II .....	208
Capitolul III .....	233
Capitolul IV .....	244
Capitolul V .....	262
<b>Bibliografie selectivă .....</b>	286

## 1.1. Mulțimea numerelor reale

### Breviar teoretic

#### Formule de calcul prescurtat

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ ,  $\forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$  sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \cdot ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac));$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$

**Modulul (sau valoarea absolută a) unui număr real  $x$**

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice expresie } E(x), x \in \mathbb{R}.$$

#### Proprietăți ale modulului

- $|x| \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ ;

•  $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$

•  $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$

•  $\|x| - |y|\| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|;$

•  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$

•  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0;$

•  $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$  și  $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$

**Partea întreagă** a unui număr real  $x$  este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu numărul  $x$  și se notează  $[x]$ . **Partea fraționară** a lui  $x$ : se notează  $\{x\}$  și  $\{x\} = x - [x]$ .

### Proprietăți

•  $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$

•  $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$

•  $[m+x] = m + [x], \forall m \in \mathbb{Z};$

•  $\{m+x\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z};$

•  $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1;$

•  $[x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx], \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$  (Hermite).

### Inegalități remarcabile

• Dacă  $a \cdot b > 0$ , atunci  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

•  $x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}, \forall x, y \in \mathbb{R};$

•  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z \in \mathbb{R};$

•  $3 \cdot (xy + yx + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$

### Inegalitatea mediilor (adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$ , unde

$m_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$  (media armonică),  
 Respect pentru oameni și cărți

$$m_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media geometrică}),$$

$$m_a = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \quad (\text{media aritmetică}),$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \quad (\text{media pătratică}).$$

### Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

### Inegalitatea lui Minkovski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

### Inegalitatea lui Cebîșev

Dacă  $(a_k)_{k \geq 1}$ ,  $(b_k)_{k \geq 1}$  sunt două şiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  sunt două şiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \geq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k).$$

### Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+\alpha)^r > 1+r\alpha, \quad \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq -1, \quad r \geq 0$$

**1.** Stabiliți care dintre următoarele rezultate sunt numere naturale:

- a)  $5 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 4$ ;      d)  $[2 \cdot (-3) \cdot (-4) - 15 \cdot 3] : (3 - 10)$ ;  
 b)  $7 \cdot (-2) + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-8) \cdot 5$ ;      e)  $[7 \cdot (-12) + (-3) \cdot (29)] : (12 - 18)$ ;  
 c)  $[3 \cdot (-4) - 5 \cdot 6] : [(-1) \cdot 3 + 2 \cdot 5]$ ;      f)  $[11 \cdot (-12) - (-8) \cdot 14] : (17 - 22)$ .

**2.** Stabiliți care dintre următoarele rezultate sunt numere întregi:

- a)  $\frac{2}{15} + \frac{7}{10} - \frac{5}{6}$ ;      d)  $60 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{10} + \frac{2}{15} \right)$ ;  
 b)  $\frac{3}{14} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6}$ ;      e)  $42 \cdot \left( \frac{5}{6} - \frac{13}{14} + \frac{17}{21} \right)$ ;  
 c)  $\frac{7}{10} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$ ;      f)  $105 \cdot \left( \frac{17}{35} + \frac{14}{15} - \frac{11}{21} \right)$ .

**3.** Ordonați crescător, în fiecare caz, numerele următoare:

- a)  $x = \frac{11}{3}$ ;  $y = 3,67$ ;  $z = \frac{19}{6}$ ;  $t = 3,(61)$ .      d)  $x = -1,5$ ;  $y = -\frac{7}{4}$ ;  $z = -\frac{15}{8}$ ;  $t = -\frac{8}{5}$ .  
 b)  $x = \frac{9}{2}$ ;  $y = 4,32$ ;  $z = 4,(3)$ ;  $t = 4,56$ .      e)  $x = -1,(2)$ ;  $y = -1,2$ ;  $z = -\frac{7}{5}$ ;  $t = -\frac{5}{4}$ .  
 c)  $x = 2,6$ ;  $y = \frac{11}{4}$ ;  $z = \frac{5}{2}$ ;  $t = 2,(63)$ .      f)  $x = \frac{13}{5}$ ;  $y = \sqrt{7}$ ;  $z = \frac{10}{4}$ ;  $t = 2,(61)$ .

**4.** Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, iar măsura celui mai mare unghi este triplul celui mai mic. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.

**5.** Calculați aria unui dreptunghi care are perimetrul egal cu 160 cm, iar dimensiunile sale sunt direct proporționale cu 5, respectiv 3.

**6.** Calculați valoarea raportului  $R = \frac{4x + 3y}{2x + y}$  știind că  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $\frac{x}{y} = \frac{2}{7}$ .

**7.** Raportul dintre vârsta tatălui și vârsta fiului său este egal cu 5. Peste 6 ani, raportul vîrstelor va fi egal cu 3. Ce vîrstă are acum tatăl?

**8.** Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

*Respectiv pentru oameni și cărți*  
 $a = \sqrt{729};$

$$d = \sqrt{961};$$

$$b = \sqrt{288};$$

$$e = \sqrt{2601};$$

$$c = \sqrt{147};$$

$$f = \sqrt{5184}.$$

**9.** Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

$$A = \sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{125};$$

$$D = \sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{108};$$

$$B = \sqrt{98} - \sqrt{18} - \sqrt{8};$$

$$E = \sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{98};$$

$$C = \sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{12};$$

$$F = \sqrt{1+3+5+\dots+99}.$$

**10.** Dați un exemplu de număr rațional cuprins între  $\sqrt{2}$  și  $\sqrt{3}$ .

**11.** Dați un exemplu de număr rațional cuprins între  $\sqrt{5}$  și  $\sqrt{7}$ .

**12.** Determinați numerele întregi  $a$  și  $b$  pentru care  $(2 + \sqrt{3})^2 = a + b\sqrt{3}$ .

**13.** Determinați numerele întregi  $c$  și  $d$  pentru care  $\left(\frac{1}{3 - \sqrt{8}}\right)^2 = c + d\sqrt{2}$ .

**14.** Ordonați crescător numerele  $p$  și  $q$  în fiecare dintre următoarele cazuri:

a)  $p = \frac{2}{3}$  și  $q = \frac{7}{9}$ ;      d)  $p = \frac{7}{5}$  și  $q = \sqrt{2}$ ;

b)  $p = \frac{5}{8}$  și  $q = \frac{7}{11}$ ;      e)  $p = \frac{\pi}{6}$  și  $q = \frac{11}{20}$ ;

c)  $p = 3\sqrt{5}$  și  $q = 5\sqrt{3}$ ;      f)  $p = 1, (3)$  și  $q = \frac{17}{13}$ .

**15.** Dacă  $a < b$ , arătați că  $a < \frac{2a+5b}{7} < b$ .

**16.** Determinați numărul fracțiilor care satisfac simultan condițiile:

a) numărătorul este un divizor natural al lui 14;

b) numitorul este un divizor natural al lui 104.

**17.** Arătați că, în fiecare caz, expresiile date se pot scrie ca diferența a două pătrate:

Respect pentru oamenii și cărțile lor  
împărtășind cunoștințele noastre naturale.

- a)  $A = (2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$ ;
- b)  $B = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$ ;
- c)  $C = (a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-1)$ ;
- d)  $D = (a^3-b^2)(a^3+b^2)(a^6+b^4)$ ;
- e)  $E = (a+b+c)(a-b+c)$ ;
- f)  $F = a(a-2b)$ .

**18.** Descompuneți în factori următoarele expresii, ținând eventual cont de ipoteza indicată în fiecare caz:

- a)  $E(x) = x^3 + x - 2$ ,  $E(1) = 0$ ;
- b)  $E(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ ,  $E(-1) = 0$ ;
- c)  $E(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ ,  $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ;
- d)  $E(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$ ,  $E(2) = 0$ ;
- e)  $E(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ , există  $a \in \mathbb{Z}$  cu  $E(a) = 0$ ;
- f)  $E(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$ , există  $a \in \mathbb{Z}$  cu  $E(a) = 0$ .

**19.** Precizați care dintre următoarele egalități sunt adevărate pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ :

- a)  $x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2$ ;
- b)  $x^2 + 4x + 9 = (x + 3)^2$ ;
- c)  $x^2 - 9y^2 = (x - 3y)(x + 3y)$ ;
- d)  $x^2 + 4y^2 = (x + 2y)^2$ ;
- e)  $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$ ;
- f)  $(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$ .

**20.** Descompuneți în factori expresiile următoare:

- a)  $A = a^4 - a$ ;
- b)  $B = x(a+b) - a - b$ ;
- c)  $C = ax^2 - 2a - ax^3 + 2ax$ ;
- d)  $D = a^3 - a^2b^2 + 2ab - 2b^3$ ;
- e)  $E = a^3 - 2a^2 + 2a - 4$ ;
- f)  $F = (2x - 1)^2 - 9$ .

21. Descompuneți în factori și următoarele expresii:

- a)  $E(x) = (x-1)^2 - (x+2)^2$ ;  
b)  $E(x, y) = (x-3y)^2 - (2x-y)^2$ ;  
c)  $F(x) = 4x^2 - 12x + 9$ ;  
d)  $G(t) = 9t^2 + 24t + 16$ ;  
e)  $H(s) = 3s^2 - 30s + 75$ ;  
f)  $F(x, y) = 4x^3 - 8x^2 y + 4xy^2$ .

22. Determinați numerele reale  $a$  în fiecare dintre următoarele cazuri:

- a)  $|2a-5|=11$ ; d)  $2a-|a-2|=5$ ;  
b)  $|2+a|=4$ ; e)  $a-|a|+6=0$ ;  
c)  $a+|a+1|=7$ ; f)  $2a=|2-a|$ .

23. Determinați perechile  $(x, y)$  de numere reale pentru care  $x+|y|=2x-|y|=3$ .

24. Determinați numerele reale  $x$  în fiecare dintre cazurile următoare:

- a)  $|3x-1|=8$ ; d)  $|x+|1-x||=5$ ;  
b)  $|2x+1|=5$ ; e)  $|x-1|+|x-4|=3$ ;  
c)  $x+|1-x|=3$ ; f)  $|2x-6|+|4x-2|=8$ .

25. Demonstrați că  $|x-2|+|x-3|\geq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

26. Dacă  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  verifică egalitatea  $xy = z^2 + 2 + z(x-y)$ , calculați  $|x+y|$ .

27. Rezolvați în multimea numerelor reale următoarele ecuații:

- a)  $|2x-1|=5$ ; d)  $|2-|x-3||=1$ ;  
b)  $|2x+3|=|6-x|$ ; e)  $|x+|x-3||=5$ ;  
c)  $|x-2|+|x-3|=3$ ; f)  $|x^2-3x+2|+|2-x|=0$ .

28. Determinați cel mai mic număr întreg  $m$  pentru care  $|2m-1|<4$ .

29. Determinați numărul numerelor întregi  $p$  pentru care  $|2p-3|<6$ .

- 30.** Dați un exemplu de număr real negativ  $x$  pentru care  $|x| > 2$  și  $\left|\frac{x}{2}\right| < 2$ .  
 Respect pentru oameni și cărți
- 31.** Dacă  $x, y \in \mathbb{R}$  verifică  $|2x - 1| \leq 3$  și  $|3y + 1| \leq 2$ , determinați valoarea maximă a expresiei  $A(x, y) = 2x + 3y$  și valoarea minimă a expresiei  $B(x, y) = 3x + 2y$ .
- 32.** Determinați valoarea minimă a expresiei  $E(x, y) = 4x + 5y$ , știind că  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $|3x + 1| \leq 4$ ,  $|4y - 1| \leq 5$ .
- 33.** Determinați numărul numerelor întregi  $m$  pentru care  $|2m - 5| \leq 4$ .
- 34.** Dați un exemplu de număr real  $t$  pentru care  $\left|\frac{t}{2}\right| > 1$  și  $\left|\frac{t}{4}\right| < 1$ .
- 35.** Determinați numerele naturale  $n$  pentru care  $n + |2n - 1| < 8$ .
- 36.** Determinați numerele naturale  $m$  pentru care  $\sqrt{4m^2 - 4m + 1} + |1 - 2m| \leq 2$ .
- 37.** Determinați suma dintre valoarea minimă și valoarea maximă a expresiei  $E(x) = |x - 2| - |4 - x| - |2x - 6|$ , dacă  $x \in [2, 8]$ .
- 38.** Determinați valoarea maximă și valoarea minimă a expresiei  $F(x) = |2x - 1| + |3x - 2| + |4x - 3|$ , pentru  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
- 39.** Arătați că există un număr întreg  $k$  astfel încât  $|x + 2| + |x - 4| = k$ ,  $\forall x \in [0, 3]$ .
- 40.** Arătați că există un număr întreg  $m$  astfel încât  $|x - 3| + |x + 2| = m$ ,  $\forall x \in [0, 2]$ .
- 41.** Arătați că există un singur număr întreg  $n$  pentru care  $|3n - 4| \leq 1$  și  $|4n - 3| \leq 2$ .
- 42.** Notăm cu  $S$  mulțimea soluțiilor ecuației  $|x - 2| + |x - 4| = m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .
  - Studiați dacă există  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $S$  conține exact 3 numere întregi;
  - Există un cel mai mic număr întreg  $m$  pentru care  $S$  conține exact două numere întregi?;
  - Determinați  $S$  în cazul în care  $m = 4$ .