LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR　　OVIDIU BĂDESCU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a IX-a

consolidare

Ediția a VIII-a

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Editura Paralela 45

Cuprins

CAPITOLUL I. MULŢIMI ŞI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1.1. Mulţimea numerelor reale

Breviar teoretic

Formule de calcul prescurtat

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}), \forall n \in 2\mathbb{N}+1$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\frac{1}{2}\cdot\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac)\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a).$

Modulul (sau valoarea absolută a) unui număr real x

$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ şi $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi ale modulului

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$

- $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c;c)$;
- $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-c) \cup (c;\infty)$;
- $\left||x|-|y|\right| \le |x \pm y| \le |x|+|y|$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ y \ne 0$;
- $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ şi $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu numărul x şi se notează $[x]$. **Partea fracționară a lui x:** se notează $\{x\}$ şi $\{x\} = x-[x]$.

Proprietăți

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $[m+x] = m+[x],\ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\{m+x\} = \{x\},\ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $x-1 < [x] \le x < [x]+1$;
- $[x]+\left[x+\dfrac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\dfrac{n-1}{n}\right] = [nx],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \ge 2$ **(Hermite)**.

Inegalități remarcabile

- Dacă $a \cdot b > 0$, atunci $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \ge 2$.
- $x \cdot y \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$;
- $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$;
- $3 \cdot (xy+yx+zx) \le (x+y+z)^2 \le 3 \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Inegalitatea mediilor
(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \le m_h \le m_g \le m_a \le m_p \le \max(a_k)$, unde

$$m_h = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \text{ (media armonică)},$$

$$m_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \text{ (media geometrică)},$$

$$m_a = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \text{ (media aritmetică)},$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2}}{n}} \text{ (media pătratică)}.$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}) \cdot (b_1^{\,2} + \ldots + b_n^{\,2}) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}$$

Inegalitatea lui Minkovski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \le \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîşev

Dacă $(a_k)_{k\ge1}$, $(b_k)_{k\ge1}$ sunt două şiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \le n \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă (a_k), (b_k) sunt două şiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \ge n \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+\alpha)^r > 1 + r\alpha, \ \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \ \alpha \ge -1, \ r \ge 0$$

Exerciții și probleme de consolidare

1. Stabiliți care dintre următoarele rezultate sunt numere naturale:

a) $5\cdot(-3)+2\cdot(-4)-(-3)\cdot 4$;

b) $7\cdot(-2)+3\cdot(-5)+(-1)\cdot(-8)\cdot 5$;

c) $\left[3\cdot(-4)-5\cdot 6\right]:\left[(-1)\cdot 3+2\cdot 5\right]$;

d) $\left[2\cdot(-3)\cdot(-4)-15\cdot 3\right]:(3-10)$;

e) $\left[7\cdot(-12)+(-3)\cdot(29)\right]:(12-18)$;

f) $\left[11\cdot(-12)-(-8)\cdot 14\right]:(17-22)$.

2. Stabiliți care dintre următoarele rezultate sunt numere întregi:

a) $\frac{2}{15}+\frac{7}{10}-\frac{5}{6}$;

b) $\frac{3}{14}+\frac{1}{21}-\frac{1}{6}$;

c) $\frac{7}{10}-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$;

d) $60\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{10}+\frac{2}{15}\right)$;

e) $42\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{13}{14}+\frac{17}{21}\right)$;

f) $105\cdot\left(\frac{17}{35}+\frac{14}{15}-\frac{11}{21}\right)$.

3. Ordonați crescător, în fiecare caz, numerele următoare:

a) $x=\frac{11}{3}$; $y=3{,}67$; $z=\frac{19}{6}$; $t=3{,}(61)$.

b) $x=\frac{9}{2}$; $y=4{,}32$; $z=4{,}(3)$; $t=4{,}56$.

c) $x=2{,}6$; $y=\frac{11}{4}$; $z=\frac{5}{2}$; $t=2{,}(63)$.

d) $x=-1{,}5$; $y=-\frac{7}{4}$; $z=-\frac{15}{8}$; $t=-\frac{8}{5}$.

e) $x=-1{,}(2)$; $y=-1{,}2$; $z=-\frac{7}{5}$; $t=-\frac{5}{4}$.

f) $x=\frac{13}{5}$; $y=\sqrt{7}$; $z=\frac{10}{4}$; $t=2{,}(61)$.

4. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, iar măsura celui mai mare unghi este triplul celui mai mic. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.

5. Calculați aria unui dreptunghi care are perimetrul egal cu 160 cm, iar dimensiunile sale sunt direct proporționale cu 5, respectiv 3.

6. Calculați valoarea raportului $R=\frac{4x+3y}{2x+y}$ știind că $x,y\in\mathbb{R}$ și $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$.

7. Raportul dintre vârsta tatălui și vârsta fiului său este egal cu 5. Peste 6 ani, raportul vârstelor va fi egal cu 3. Ce vârstă are acum tatăl?

8. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

$a=\sqrt{729}$; $d=\sqrt{961}$;

$b=\sqrt{288}$; $e=\sqrt{2601}$;

$c=\sqrt{147}$; $f=\sqrt{5184}$.

9. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

$A=\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{125}$; $D=\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{108}$;

$B=\sqrt{98}-\sqrt{18}-\sqrt{8}$; $E=\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$;

$C=\sqrt{75}-\sqrt{27}-\sqrt{12}$; $F=\sqrt{1+3+5+...+99}$.

10. Dați un exemplu de număr rațional cuprins între $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

11. Dați un exemplu de număr rațional cuprins între $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$.

12. Determinați numerele întregi a și b pentru care $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=a+b\sqrt{3}$.

13. Determinați numerele întregi c și d pentru care $\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^2=c+d\sqrt{2}$.

14. Ordonați crescător numerele p și q în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $p=\frac{2}{3}$ și $q=\frac{7}{9}$; d) $p=\frac{7}{5}$ și $q=\sqrt{2}$;

b) $p=\frac{5}{8}$ și $q=\frac{7}{11}$; e) $p=\frac{\pi}{6}$ și $q=\frac{11}{20}$;

c) $p=3\sqrt{5}$ și $q=5\sqrt{3}$; f) $p=1,(3)$ și $q=\frac{17}{13}$.

15. Dacă $a<b$, arătați că $a<\frac{2a+5b}{7}<b$.

16. Determinați numărul fracțiilor care satisfac simultan condițiile:

a) numărătorul este un divizor natural al lui 14;
b) numitorul este un divizor natural al lui 104.

17. Arătați că, în fiecare caz, expresiile date se pot scrie ca diferența a două pătrate:

a) $A=(2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$;
b) $B=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$;
c) $C=(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-1)$;
d) $D=(a^3-b^2)(a^3+b^2)(a^6+b^4)$;
e) $E=(a+b+c)(a-b+c)$;
f) $F=a(a-2b)$.

18. Descompuneți în factori următoarele expresii, ținând eventual cont de ipoteza indicată in fiecare caz:

a) $E(x)=x^3+x-2,\ E(1)=0$;
b) $E(x)=x^3+3x^2+5x+3,\ E(-1)=0$;
c) $E(x)=2x^3+x^2+x-1,\ E(\frac{1}{2})=0$;
d) $E(x)=x^3+x^2-2x-8,\ E(2)=0$;
e) $E(x)=x^3+3x^2+x-5$, există $a\in\mathbb{Z}$ cu $E(a)=0$;
f) $E(x)=x^3-x^2-2x+8$, există $a\in\mathbb{Z}$ cu $E(a)=0$.

19. Precizați care dintre următoarele egalități sunt adevărate pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$:

a) $x^2-4x+9=(x-2)^2$;
b) $x^2+4x+9=(x+3)^2$;
c) $x^2-9y^2=(x-3y)(x+3y)$;
d) $x^2+4y^2=(x+2y)^2$;
e) $4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$;
f) $(x-2y)^2=x^2-4xy+4y^2$.

20. Descompuneți în factori expresiile următoare:

a) $A=a^4-a$;
b) $B=x(a+b)-a-b$;
c) $C=ax^2-2a-ax^3+2ax$;
d) $D=a^3-a^2b^2+2ab-2b^3$;
e) $E=a^3-2a^2+2a-4$;
f) $F=(2x-1)^2-9$.

21. Descompuneți în factori și următoarele expresii:

a) $E(x)=(x-1)^2-(x+2)^2$;

b) $E(x, y)=(x-3y)^2-(2x-y)^2$;

c) $F(x)=4x^2-12x+9$;

d) $G(t)=9t^2+24t+16$;

e) $H(s)=3s^2-30s+75$;

f) $F(x, y)=4x^3-8x^2y+4xy^2$.

22. Determinați numerele reale a în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $|2a-5|=11$;

b) $|2+a|=4$;

c) $a+|a+1|=7$;

d) $2a-|a-2|=5$;

e) $a-|a|+6=0$;

f) $2a=|2-a|$.

23. Determinați perechile (x,y) de numere reale pentru care $x+|y|=2x-|y|=3$.

24. Determinați numerele reale x în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $|3x-1|=8$;

b) $|2x+1|=5$;

c) $x+|1-x|=3$;

d) $|x+|1-x||=5$;

e) $|x-1|+|x-4|=3$;

f) $|2x-6|+|4x-2|=8$.

25. Demonstrați că $|x-2|+|x-3|\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}$.

26. Dacă $x, y, z\in\mathbb{Z}$ verifică egalitatea $xy=z^2+2+z(x-y)$, calculați $|x+y|$.

27. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $|2x-1|=5$;

b) $|2x+3|=|6-x|$;

c) $|x-2|+|x-3|=3$;

d) $|2-|x-3||=1$;

e) $|x+|x-3||=5$;

f) $|x^2-3x+2|+|2-x|=0$.

28. Determinați cel mai mic număr întreg m pentru care $|2m-1|<4$.

29. Determinați numărul numerelor întregi p pentru care $|2p-3|<6$.

30. Dați un exemplu de număr real negativ x pentru care $|x| > 2$ și $\left|\frac{x}{2}\right| < 2$.

31. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ verifică $|2x-1| \leq 3$ și $|3y+1| \leq 2$, determinați valorea maximă a expresiei $A(x,y) = 2x+3y$ și valoarea minimă a expresiei $B(x,y) = 3x+2y$.

32. Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x,y) = 4x+5y$, știind că $x, y \in \mathbb{R}$ și $|3x+1| \leq 4$, $|4y-1| \leq 5$.

33. Determinați numărul numerelor întregi m pentru care $|2m-5| \leq 4$.

34. Dați un exemplu de număr real t pentru care $\left|\frac{t}{2}\right| > 1$ și $\left|\frac{t}{4}\right| < 1$.

35. Determinați numerele naturale n pentru care $n + |2n-1| < 8$.

36. Determinați numerele naturale m pentru care $\sqrt{4m^2 - 4m + 1} + |1-2m| \leq 2$.

37. Determinați suma dintre valoarea minimă și valoarea maximă a expresiei $E(x) = |x-2| - |4-x| - |2x-6|$, dacă $x \in [2, 8]$.

38. Determinați valoarea maximă și valoarea minimă a expresiei $F(x) = |2x-1| + |3x-2| + |4x-3|$, pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

39. Arătați că există un număr întreg k astfel încât $|x+2| + |x-4| = k, \ \forall x \in [0, 3]$.

40. Arătați că există un număr întreg m astfel încât $|x-3| + |x+2| = k, \ \forall x \in [0, 2]$.

41. Arătați că există un singur număr întreg n pentru care $|3n-4| \leq 1$ și $|4n-3| \leq 2$.

42. Notăm cu S mulțimea soluțiilor ecuației $|x-2| + |x-4| = m, \ m \in \mathbb{R}$.

a) Studiați dacă există $m \in \mathbb{R}$ pentru care S conține exact 3 numere întregi;

b) Există un cel mai mic număr întreg m pentru care S conține exact două numere întregi?;

c) Determinați S în cazul în care $m = 4$.