Claudia Temneanu

Adrian Alba

Matematică bacalaureat

-teste-

M2 Științe ale naturii

Booklet

Cuprins

Programa matematică M2 Științe ale naturii

CLASA a IX-a

Mulţimi şi elemente de logică matematică

- Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale
- Propoziţie, predicat, cuantificatori
- Operaţii logice elementare (negaţie, conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă), corelate cu operaţiile şi cu relaţiile dintre mulţimi (complementară, intersecţie, reuniune, incluziune, egalitate); raţionament prin reducere la absurd
- Inducţia matematică

Şiruri

- Modalităţi de a defini un şir, şiruri mărginite, şiruri monotone
- Şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcţie de un termen dat şi raţie, suma primilor n termeni ai unei progresii
- Condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică, pentru $n \geq 3$

Funcţii; lecturi grafice

- Reper cartezian, produs cartezian; reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulţimi numerice; condiţii algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, cu $m \in \mathbb{R}$
- Funcţia: definiţie, exemple, exemple de corespondenţe care nu sunt funcţii, modalităţi de a descrie o funcţie, lecturi grafice. Egalitatea a două funcţii, imaginea unei mulţimi printr-o funcţie, graficul unei funcţii, restricţii ale unei funcţii
- Funcţii numerice ($F = \{f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}\}$); reprezentarea geometrică a graficului: intersecţia cu axele de coordonate, rezolvări grafice ale unor ecuaţii şi inecuaţii de forma $f(x) = g(x)$, $(<, \leq, >, \geq)$; proprietăţi ale funcţiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginire, monotonie; alte proprietăţi: paritate/imparitate, simetria graficului faţă de drepte de forma $x = m$, $m \in \mathbb{R}$, periodicitate
- Compunerea funcţiilor; exemple pe funcţii numerice

Funcţia de gradul I

- Definiţie; reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$
- Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei: monotonia şi semnul funcţiei; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1) - f(x_2)$ (sau prin studierea semnului raportului $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$)
- Inecuaţii de forma $ax + b \leq 0$ $(<, >, \geq)$, studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale

- Poziţia relativă a două drepte, sisteme de ecuaţii de tipul $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$
- Sisteme de inecuaţii de gradul I

Funcţia de gradul al II-lea
- Reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$, simetria faţă de drepte de forma $x = m$, cu $m \in \mathbb{R}$
- Relaţiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$, cu $s, p \in \mathbb{R}$

Interpretarea geometrică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei de gradul al II-lea
- Monotonie; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1) - f(x_2)$ sau prin rata creşterii /descreşterii: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, punct de extrem, vârful parabolei
- Poziţionarea parabolei faţă de axa Ox, semnul funcţiei, inecuaţii de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ $(<, >, \geq)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$, studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale, interpretare geometrică: imagini ale unor intervale (proiecţiile unor porţiuni de parabolă pe axa Oy)
- Poziţia relativă a unei drepte faţă de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}$, $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$

Vectori în plan
- Segment orientat, vectori, vectori coliniari
- Operaţii cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăţi ale operaţiei de adunare; înmulţirea cu un scalar, proprietăţi ale înmulţirii cu un scalar; condiţia de coliniaritate, descompunerea după doi vectori necoliniari

Coliniaritate, concurenţă, paralelism - calcul vectorial în geometria plană
- Vectorul de poziţie a unui punct
- Vectorul de poziţie a punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiţii de paralelism)
- Vectorul de poziţie a centrului de greutate al unui triunghi (concurenţa medianelor unui triunghi)
- Teorema lui Menelau, teorema lui Ceva

Elemente de trigonometrie
- Cercul trigonometric, definirea funcţiilor trigonometrice: $sin : [0; 2\pi] \to [-1; 1]$, $cos : [0; 2\pi] \to [-1; 1]$, $tg : [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $ctg : (0; \pi) \to \mathbb{R}$
- Definirea funcţiilor trigonometrice: $sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $tg : \mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$ cu $D = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $ctg : \mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$ cu $D = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice: $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$ (transformarea sumei în produs)

Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană

- Produsul scalar a doi vectori: definiţie, proprietăţi. Aplicaţii: teorema cosinusului, condiţii de perpendicularitate, rezolvarea triunghiului dreptunghic
- Aplicaţii vectoriale şi trigonometrice în geometrie: teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor oarecare
- Calcularea razei cercului înscris şi a razei cercului circumscris în triunghi, calcularea lungimilor unor segmente importante din triunghi, calcularea unor arii

CLASA A X-A

Mulţimi de numere

- Numere reale: proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional, iraţional şi real ale unui număr pozitiv nenul, aproximări raţionale pentru numere reale
- Radical de ordin n ($n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$) dintr-un număr, proprietăţi ale radicalilor
- Noţiunea de logaritm, proprietăţi ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operaţia de logaritmare
- Mulţimea $\mathbb{C}$. Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operaţii cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operaţiilor de adunare şi de scădere a numerelor complexe şi a înmulţirii acestora cu un număr real
- Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuaţiei de gradul al doilea având coeficienţi reali. Ecuaţii bipătrate

Funcţii şi ecuaţii

- Funcţia putere cu exponent natural: $f: \mathbb{R} \to D, f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$ şi funcţia radical: $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$, unde $D = [0, +\infty)$ pentru n par şi $D = \mathbb{R}$ pentru n impar
- Funcţia exponenţială: $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty), f(x) = a^x$, $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ şi funcţia logaritmică: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$
- Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcţii inversabile: definiţie, proprietăţi grafice, condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie să fie inversabilă
- Funcţii trigonometrice directe şi inverse
- Rezolvări de ecuaţii folosind proprietăţile funcţiilor:
  1. Ecuaţii care conţin radicali de ordinul 2 sau de ordinul 3
  2. Ecuaţii exponenţiale, ecuaţii logaritmice
  3. Ecuaţii trigonometrice: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$, $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$

Notă: *Pentru toate tipurile de funcţii se vor studia: intersecţia cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$, reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, convexitate*

Metode de numărare

- Mulţimi finite ordonate. Numărul funcţiilor $f: A \to B$, unde A şi B sunt mulţimi finite
- Permutări - numărul de mulţimi ordonate care se obţin prin ordonarea unei mulţimi finite cu n elemente - numărul funcţiilor bijective $f: A \to B$, unde A şi B sunt mulţimi finite

- Aranjamente – numărul submulțimilor ordonate cu câte k elemente fiecare, $k \leq n$, care se pot forma cu cele n elemente ale unei mulțimi finite – numărul funcțiilor injective $f: A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite
- Combinări – numărul submulțimilor cu câte k elemente, unde $0 \leq k \leq n$, ale unei mulțimi finite cu n elemente. Proprietăți: formula combinărilor complementare, numărul tuturor *submulțimilor unei mulțimi cu* n elemente
- Binomul lui Newton

Matematici financiare
- Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA
- Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice
- Interpretarea datelor statistice prin parametri de poziție: medii, dispersia, abateri de la medie
- Evenimente aleatoare egal probabile, operații cu evenimente, probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile

Notă: *Aplicațiile vor fi din domeniul financiar: profit, preț de cost al unui produs, amortizări de investiții, tipuri de credite, metode de finanțare, buget personal, buget familial.*

Geometrie
- Reper cartezian în plan, coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real, coordonate carteziene ale unui punct din plan, distanța dintre două puncte în plan
- Ecuații ale dreptei în plan determinate de un punct și de o direcție dată și ale dreptei determinate de două puncte distincte
- Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan; calcularea unor distanțe și a unor arii

CLASA a XI-a

I. ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Matrice
- Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice
- Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu un scalar, proprietăți

Determinanți
- Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți

Sisteme de ecuații liniare
- Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n = \overline{2, 3}$
- Ecuații matriceale
- Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar
- Metoda Cramer de rezolvare a sistemelor liniare
- Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan

II. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Limite de funcţii

- Noţiuni elementare despre mulţimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăţi, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$
- Limite de funcţii: interpretarea grafică a limitei unei funcţii într-un punct utilizând vecinătăţi, limite laterale
- Calculul limitelor pentru funcţia de gradul I, funcţia de gradul al II-lea, funcţia logaritmică, exponenţială, funcţia putere ($n = \overline{2, 3}$), funcţia radical ($n = \overline{2, 3}$), funcţia raport de două funcţii cu grad cel mult 2; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$
- Asimptotele graficului funcţiilor studiate: asimptote verticale, orizontale şi oblice

Funcţii continue

- Continuitatea unei funcţii într-un punct al domeniului de definiție, funcții continue, interpretarea grafică a continuităţii unei funcţii, operaţii cu funcţii continue
- Proprietatea lui Darboux, semnul unei funcţii continue pe un interval de numere reale

Funcţii derivabile

- Tangenta la o curbă. Derivata unei funcţii într-un punct, funcţii derivabile
- Operaţii cu funcţii derivabile, calculul derivatelor de ordin I şi al II-lea pentru funcţiile studiate
- Regulile lui l'Hospital pentru cazurile $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor

- Rolul derivatelor de ordin I şi de ordinul al II-lea în studiul funcţiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate
- Reprezentarea grafică a funcţiilor

Notă: *Se utilizează exprimarea „proprietatea lui ...", „regula lui ...", pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicaţii, dar a cărui demonstraţie este în afara programei.*

CLASA a XII-a

I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Grupuri

- Lege de compoziţie internă, tabla operaţiei
- Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupul aditiv al claselor de resturi modulo n
- Morfism şi izomorfism de grupuri

Inele şi corpuri

- Inel, exemple: inele numerice ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_n$, inele de matrice, inele de funcţii reale
- Corp, exemple: corpuri numerice ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_p$, p prim

Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim)
- Forma algebrică a unui polinom, operaţii (adunarea, înmulţirea, înmulţirea cu un scalar)
- Teorema împărţirii cu rest; împărţirea polinoamelor, împărţirea cu $X - a$, schema lui Horner
- Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout; c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. al unor polinoame, descompunerea unor polinoame în factori ireductibili
- Rădăcini ale polinoamelor, relaţiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4
- Rezolvarea ecuaţiilor algebrice având coeficienţi în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ecuaţii binome, ecuaţii bipătrate, ecuaţii reciproce

II. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
- Probleme care conduc la noţiunea de integrală

Primitive (antiderivate)
- Primitivele unei funcţii definite pe un interval. Integrala nedefinită a unei funcţii continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale

Integrala definită
- Definirea integralei Riemann a unei funcţii continue prin formula Leibniz-Newton
- Proprietăţi ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare
- Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părţi, integrarea prin schimbare de variabilă. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, grad $Q \leq 4$ prin metoda descompunerii în fracţii simple

Aplicaţii ale integralei definite
- Aria unei suprafeţe plane
- Volumului unui corp de rotaţie

Notă: *Se utilizează exprimarea „proprietate" sau „regulă" pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicaţii, dar a cărui demonstraţie este în afara programei.*

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$ și $g(x) = 2018 - x$. Calculați $g(f(1))$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x = 5^{x^2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x - a^2y - a^2 = 0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.

5p **6.** Arătați că $\text{tg}\,x + \text{ctg}\,x = \frac{5}{2}$, știind că $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = -7$.

5p **b)** Demonstrați că $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1) + A(a))A(0) = (a^2+7)I_2$.

2. Se consideră polinomul $f = 4X^3 - 6X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 0$.

5p **b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f nu se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx = 22$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_1 b_3 = b_2^2$	**2p**
	$b_1 b_2 b_3 = b_2^3 = 4^3 = 64$	**3p**
2.	$f(1) = 0$	**2p**
	$g(f(1)) = g(0) = 2018$	**3p**
3.	$5^{2x} = 5^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$	**3p**
	$x = 0$ sau $x\ \ 2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 10 numere care au cifra zecilor egală cu 9, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{10}{90} = \dfrac{1}{9}$	**2p**
5.	$m_d = \dfrac{a-1}{a^2}$	**2p**
	Dreapta d este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow \dfrac{a-1}{a^2} = 0$, deci $a = 1$	**3p**
6.	Cum $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$	**2p**
	$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 1 \cdot 1 =$	**3p**
	$= -6 - 1 = -7$	**2p**
b)	$xA(y) - yA(x) = x\begin{pmatrix} y+2 & y \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$	**2p**
	$= \begin{pmatrix} xy + 2x - yx - 2y & xy - yx \\ x - y & -2x + 2y \end{pmatrix} =$	
	$= \begin{pmatrix} 2(x-y) & 0 \\ x-y & -2(x-y) \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$aA(-1)-(-1)A(a)=(a+1)A(0)\Rightarrow (aA(-1)+A(a))A(0)=(a+1)A(0)A(0)=$ $=4(a+1)I_2$ $4(a+1)=a^2+7 \Leftrightarrow a=1$ sau $a=3$	**3p** **2p**
2.a)	$f=4X^3-6X+2\Rightarrow f(1)=4\cdot 1^3-6\cdot 1+2=$ $=4-6+2=0$	**3p** **2p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la X^2+X+1 este egal cu $-6X+m+4$ Cum pentru orice număr real m restul este nenul, polinomul f **nu** se divide cu X^2+X+1	**3p** **2p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{m}{4}\Rightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{m}$ $\left(\frac{6}{m}\right)^2=-\frac{4}{m}$ și, cum m este număr real nenul, obținem $m=-9$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=0-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$ $=-\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=0, f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$ $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f(\sqrt{x})\ge 0\Rightarrow$ $\Rightarrow 1-\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 0$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(3x^3+3x^2+1)\mathrm{d}x=\left(\frac{3x^4}{4}+x^3+x\right)\Big\vert_0^2=$ $=12+8+2=22$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}\mathrm{d}x=\int_0^1 3x^2e^{x^3}\mathrm{d}x=e^{x^3}\Big\vert_0^1=$ $=e-1$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{x+1}\Big\vert_0^1=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow n=2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{12}=0$

5p **2.** Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+2$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{4}+1$. Determinați numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m, n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$.
Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\sqrt{2})>f(\sqrt[3]{3})$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}\,dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{12}=\sqrt{3}(3-1)-2\sqrt{3}=$ $=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**3p** **2p**
2.	$f(1)=g(1)\Leftrightarrow 1^2+2\cdot 1+3=1+a\Leftrightarrow 6=1+a$ $a=5$	**3p** **2p**
3.	$x+1=1-2\sqrt{x}+x\Rightarrow 2\sqrt{x}=0$ $x=0$, care convine	**3p** **2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**1p** **1p** **3p**
5.	$m_{d_1}=a$, $m_{d_2}=\frac{1}{4}$ Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$	**2p** **3p**
6.	$\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin x\cos x-\sin x(-\cos x)=$ $=2\sin x\cos x=\sin 2x$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(1))=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-3\cdot(-2)=$ $=-6+6=0$	**3p** **2p**
b)	$M(x)-M(2018)=(I_2+xA)-(I_2+2018A)=I_2+xA-I_2-2018A=$ $=(I_2+(-2018)A)-(I_2+(-x)A)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
c)	$(I_2+mA)(I_2+nA)=I_2+mnA\Leftrightarrow I_2+mA+nA+mnA\cdot A=I_2+mnA$ și, cum $A\cdot A=-A$, obținem $m+n-mn=mn$ Cum m și n sunt numere naturale nenule, $m+n=2mn\Rightarrow(m,n)=(1,1)$	**3p** **2p**
2.a)	$x\circ y=8xy+x+y+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=$ $=8x\left(y+\frac{1}{8}\right)+\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**

b)	$8\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{8}=1 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$ $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{4}$	**3p** **2p**
c)	$f(x \circ y)=8(xy+x+y)+1=64xy+8x+8y+1=(8x+1)(8y+1)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y $f(x \circ y \circ z)=f(x \circ y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$ $=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=\frac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(0)=\frac{1}{3}, f'(0)=\frac{1}{3}$ Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$ $1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3} \Rightarrow f(\sqrt{2})>f(\sqrt[3]{3})$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}\mathrm{d}x=\int_0^3 \frac{x^2e^x}{e^x}\mathrm{d}x=\int_0^3 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^3=$ $=\frac{27}{3}-0=9$	**3p** **2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x)=f(x)=xe^x$, $F''(x)=(x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$ $F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, $F''(-1)=0$ și $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are un singur punct de inflexiune	**2p** **3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^n \|f(x)\|\mathrm{d}x=\int_0^n xe^x\mathrm{d}x=(x-1)e^x\Big\|_0^n=(n-1)e^n+1$ $(n-1)e^n+1=1 \Leftrightarrow n=1$	**3p** **2p**