Petre Năchilă

Ora de matematică

Clasa a X-a

Editura NOMINATRIX
2019

Cuprins

Capitolul 1
MULȚIMEA NUMERELOR REALE. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări)

O fracție zecimală infinită și neperiodică se numește *număr irațional*. Prin *număr real* înțelegem orice fracție zecimală infinită, periodică sau neperiodică.

Exemple de numere iraționale: $\sqrt{p}$, p număr prim, π, e.

Proprietăți ale numerelor raționale:

a) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y; x-y, xy \in \mathbb{Q}$; b) $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$; c) dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, p, q sunt numere prime, atunci $a\sqrt{p}+b\sqrt{q}=0 \Leftrightarrow a=b=0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Arătați că pentru $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, p număr prim:

a) $a+b\sqrt{p}=0 \Leftrightarrow a=b=0$; b) $a+b\sqrt{p}=c+d\sqrt{p} \Leftrightarrow a=c$ și $b=d$.

Soluție. a) Presupunem $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{p}=-\frac{a}{b}$, unde $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a=0$; b) $(a-c)+(b-d)\sqrt{p}=0 \overset{a)}{\Rightarrow} a-c=0$ și $b-d=0 \Rightarrow a=c$ și $b=d$.

PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliți care din următoarele numere sunt numere raționale:

a) $\sqrt{169}$; b) $\sqrt{\frac{144}{289}}$; c) $\sqrt{1,0201}$;

d) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$; e) $\sqrt{1+3+5+...+27}$; f) $\sqrt{2+4+6+...+2000}$.

2. Dați exemplu de câte două numere raționale cuprinse între:

a) $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{17}$ și $\sqrt{19}$.

3. Demonstrați că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

a) $\left(3+2\sqrt{5}\right)^2 = m+n\sqrt{5}$; b) $\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)^2 = m+n\sqrt{6}$;

c) $\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}\right)^2 = m+n\sqrt{5}$; d) $\left(\dfrac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^2 = m-n\sqrt{6}$.

4. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) $a, b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$; b) $a, b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow a-b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$;

c) $a, b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$; d) $a, b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$;

e) $(x+y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$; f) $xy \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$.

5. Fie $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 21;\ \sqrt{5n+a} \notin \mathbb{Q}\}$. Demonstrați că avem card $A \geq 8$.

6. Determinați mulțimile:

a) $A \in \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2-n+1} \in \mathbb{Z}\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2-5n+7} \in \mathbb{Z}\}$.

7. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) pentru orice numere întregi a, b impare, $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}$;

b) pentru orice numere întregi pare a și b, avem $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}$;

c) există a, b numere întregi impare cu $\sqrt{a^3+b^3} \in \mathbb{Q}$.

8. Determinați $x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât:

a) $\dfrac{x\sqrt{3}+y}{2-\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$; b) $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{3-\sqrt{2}} = 1+y$.

9. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați că:

a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$; b) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$;

c) $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$; d) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;

e) $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \leq abc$; f) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$;

g) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$; h) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea: $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}\right\}$. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că avem $\text{card}\left(A \cap (\mathbb{R}-\mathbb{Q})\right) = 85$.

11. Fie $a, b, c > 0$ iar $a + b + c = 3$. Fie $A = \sqrt{9a+2} + \sqrt{9b+3} + \sqrt{9c+4}$. Demonstrați că $A < \frac{39}{2}$.

12. Demonstrați că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ şi $m, n, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $a + mb = \sqrt{2}$, $a + nb = \sqrt{5}$, $a + pb = \sqrt{11}$.

13. Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$ (proprietatea lui Arhimede).

14. Fie $r \in \mathbb{Q}_+^*$ o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Demonstrați că numărul $\frac{r+2}{r+1}$ este o aproximare „mai bună" pentru $\sqrt{2}$ $\left(\text{adică avem } \left|\frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2}\right| \le \left|r - \sqrt{2}\right|\right)$

15. Construiți numai cu rigla și compasul imaginile geometrice ale numerelor:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \sqrt{13}.$$

16. Determinați părțile întregi ale numerelor:

a) $a_n = \sqrt{n^2+n}$; b) $b_n = \sqrt{n^2+6n}$; c) $c_n = \sqrt{n^2+7n}$.

17. Demonstrați că între orice două numere reale distincte există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

1.2. Radicali de ordinul 2. Radicali de ordinul 3

Teorema 1. Pentru orice număr real $a \ge 0$ există un număr real unic $x \ge 0$ astfel încât $x^2 = a$ (numărul real x notat cu $\sqrt{a}$ se numeşte rădăcina pătrată a numărului a).

Teorema 2. Pentru orice număr real a există un număr real unic x astfel încât $x^3 = a$ (Numărul real x notat cu $\sqrt[3]{a}$ se numeşte rădăcina cubică a numărului a, sau radicalul de ordinul 3 din a).

• **Proprietăţile radicalului de ordinul 2:**

Fie $a \ge 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

a) $\sqrt{a^2} = a\left(\text{pentru } a \in \mathbb{R} \text{ avem } \sqrt{a^2} = |a|\right)$; b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; c) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

d) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$; e) $\sqrt{a^{2n}} = a^n$; f) $a < \mathrm{b} \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Observaţie. Dacă $a < 0$, $b < 0$ avem: $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

- **Proprietățile radicalului de ordinul 3:**

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

a) $a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 0$; b) $a > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > 0$; c) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;

d) $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$; e) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$; f) $\sqrt[3]{a^n} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^n$;

g) $\sqrt[3]{a^{3n}} = a^n$; h) $a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

- **Formula radicalilor dubli** (compuși, suprapuși)

Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b$. Avem: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

- Pentru raționalizarea numitorilor se folosesc formulele:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, $a > 0$; 2) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$, $a, b > 0$;

3) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$; 4) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$;

5) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a + b$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}}$.

Soluție. Se impun condițiile $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \geq 0$ și $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) = D$.

Ridicând relația la pătrat avem $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = (x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow 10x^2 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin D \Rightarrow S = \varnothing$.

2. Arătați că $a = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}} \in \mathbb{N}$.

Soluție. Folosind formula radicalilor dubli obținem: $\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{169 - 48}}{2}} +$

$+ \sqrt{\frac{13 - \sqrt{169 - 48}}{2}} = \sqrt{\frac{13 + 11}{2}} + \sqrt{\frac{13 - 11}{2}} = \sqrt{12} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$;

$a = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{3} - 1}}$. Analog $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.

Deci $a = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{N}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Demonstrați că pentru orice $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$, avem:

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b .$$

2. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt{2-|x|}$; b) $\sqrt{4-|2x-2|}$; c) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$;

d) $\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2-1}$; e) $\sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$ f) $\sqrt{(x^2-1)(4-x)(x-2)}$.

3. Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că:

a) $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$; b) $\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x$; c) $\sqrt{-x^2}=x$;

d) $\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1$; e) $\sqrt[3]{(x-1)^3}=1-x$; f) $\sqrt{(x-2)^2}=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$.

4. Efectuați:

a) $\dfrac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2}+\dfrac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3-\sqrt2}$; b) $\sqrt{7+4\sqrt3}+\sqrt{7-4\sqrt3}$;

c) $\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt5}}}}$;

d) $\sqrt{2+\sqrt3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt3}}}$.

5. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Q}$ știind că:

a) $\dfrac{2}{\sqrt2+1}+\dfrac{2}{\sqrt3+2}=a+b\sqrt2+c\sqrt3$; b) $\sqrt{6+2\sqrt2+2\sqrt3+2\sqrt6}=a+b\sqrt2+c\sqrt3$;

c) $\sqrt{11+6\sqrt2+4\sqrt3+2\sqrt6}=a\sqrt2+b\sqrt3+c\sqrt3$.

6. Raționalizați:

a) $\dfrac{2}{2\sqrt6+3\sqrt2}$; b) $\dfrac{3-2\sqrt2}{3+2\sqrt2}$; c) $\dfrac{\sqrt{15}}{5\sqrt3-3\sqrt5}$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt2+\sqrt3}$; e) $\dfrac{5}{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{30}}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$; h) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; i) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$;

j) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$; k) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; l) $\dfrac{6}{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3}$.

7. Comparați numerele a și b în cazurile:

a) $a = \sqrt{11} + \sqrt{13}$; $b = \sqrt{10} + \sqrt{14}$; b) $a = \sqrt{17} - \sqrt{13}$, $b = \sqrt{15} - \sqrt{11}$.

8. Demonstrați că:

a) $\sqrt{8 + \sqrt{8} + \sqrt{20} + \sqrt{40}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$; b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} > 1{,}41(4)$.

9. Fie $x \in [-4; 0]$, $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - 4y + 4 = 0$. Determinați:

$$a = \sqrt{x^2 + 9y^2 + 8x + 16} + \sqrt{x^2 + 9y^2 - 18y + 9}.$$

10. Calculați numerele:

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2k + 1 + 2\sqrt{k^2 + k}}}$;

b) $\sqrt{\sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \sqrt{\sqrt{1+3+5+\ldots+2013}}}$.

11. a) Demonstrați că $\sqrt{1 + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) Calculați $\sum\limits_{k=1}^{99} \sqrt{1 + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2}}$.

12. Demonstrați că dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ sau $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, unde $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$.

13. Demonstrați că $E(n) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $E(n) = \dfrac{2n + \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$.

14. Stabiliți dacă există $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(m) \in \mathbb{Z}$, unde:

$$m = \frac{11+a}{11-a},\ E(m) = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{\frac{1}{m}}}{\sqrt{m} - \sqrt{\frac{1}{m}}}.$$

15. Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale x, y cu proprietatea că $x + y = xy \in \mathbb{N}$.

16. Determinați următoarele numere:

a) $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$; b) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$;

c) $\sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} - \sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$.

17. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

18. Calculați sumele:

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$; b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$;

c) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{(k+1)^2}}$.

19. Demonstrați că $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^n+\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^n+\left(\sqrt{2}-1\right)^n \geq 4$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

20. Demonstrați că $x > \sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}$ pentru orice $x \geq 1$.

21. Fie $x, y, a \in [-1, \infty)$ astfel încât $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+a}$. Demonstrați că:

$$x + y \geq 2a.$$

1.3. Radicali de ordinul *n*

Definiția 1. Fie $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ număr par. Se numește radical de ordinul n din a numărul real $x \geq 0$ unic cu proprietatea $x^n = a$. Notăm $x = \sqrt[n]{a}$ și avem $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Definiția 2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ număr impar. Se numește radical de ordinul n din a numărul real x unic cu proprietatea $x^n = a$. Notăm $x = \sqrt[n]{a}$ și avem $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Proprietățile radicalilor

De ordin par $n \geq 2$	**De ordin impar $n \geq 3$**
1) $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y,\ \forall\, x \geq 0, y \geq 0.$	1) $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}$
2) $\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ a \geq 0, b \geq 0 \\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt[n]{\lvert b\rvert};\ a\cdot b \geq 0 \end{cases}$	2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$
3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ a \geq 0, b > 0 \\ \dfrac{\sqrt[n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[n]{\lvert b\rvert}};\ a\cdot b \geq 0,\ b \neq 0 \end{cases}$	3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; $a \geq 0,\ m \in \mathbb{N}^*$	4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}^*$

5) $\sqrt[mn]{a^m}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}, a\geq 0, m\in\mathbb{N}^*\\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}, a<0, m-par\end{cases}$	5) $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}, a\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}^*$
6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $a\geq 0, m\in\mathbb{N}, m\geq 2$	6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}, a\in\mathbb{R}, m-$ impar ≥ 3
7) $a\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^n b}, a\geq 0, b\geq 0\\ -\sqrt[n]{a^n b}, a<0, b\geq 0\end{cases}$	7) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$
8) $\sqrt[n]{a^n b}=\begin{cases}a\sqrt[n]{b}, a\geq 0, b\geq 0\\ -a\sqrt[n]{b}, a<0, b\geq 0\end{cases}$	8) $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$, $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$
9) $a>0, b>0\Rightarrow\left[\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b\right]$	9) $a, b\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b\right)$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Ordonați crescător numerele $\sqrt[4]{3}, \sqrt{2}, \sqrt[5]{4}$.

Soluție. $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\cdot 5]{3^5}=\sqrt[20]{243}$; $\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 10]{2^{10}}=\sqrt[20]{1024}$; $\sqrt[5]{4}=\sqrt[5\cdot 4]{4^4}=\sqrt[20]{256}$.

Cum $\sqrt[20]{243}<\sqrt[20]{256}<\sqrt[20]{1024}\Rightarrow\sqrt[4]{3}<\sqrt[5]{4}<\sqrt{2}$.

2. Efectuați $\sqrt{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[10]{4\sqrt[4]{2^5\cdot 8}}$.

Soluție. $\sqrt{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[10]{4\sqrt[4]{2^5\cdot 8}}=\sqrt[10]{2^6}\cdot\sqrt[10]{4\cdot\sqrt[4]{2^8}}=\sqrt[10]{2^6}\cdot\sqrt[10]{4\cdot 2^2}=\sqrt[10]{2^6\cdot 2^2\cdot 2^2}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați:

a) $\sqrt[3]{6^6}$; b) $\sqrt[4]{(-2)^8}$; c) $\sqrt[6]{(-8)^2}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}$;

e) $\sqrt[n]{(-1)^n}$; f) $\sqrt[5]{0{,}00001}$; g) $\sqrt[3]{-0{,}000027}$; h) $\sqrt[4]{(-0{,}0025)^2}$.

2. Determinați valorile lui x pentru care au loc egalitățile:

a) $\sqrt[6]{x^6}=x$; b) $\sqrt[6]{x^6}=-x$; c) $\sqrt[3]{x^6}=x$; d) $\sqrt[3]{x^6}=-x$;

e) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^4}=\dfrac{x-1}{|x|}$; f) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2-1}{|x-1|}}=1+x$; g) $\sqrt[9]{512^{-1}}=2x^2$.

3. Determinați valorile reale ale lui x pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt[3]{-x^2+3x-2}$; b) $\sqrt[4]{4x^2-5x+1}$; c) $\sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1}$;

d) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{2(x+1)}}$; e) $\sqrt[6]{\dfrac{3x+3}{x^2-1}}$; f) $\sqrt[4]{x^2-x}-\sqrt[6]{x-x^2}$.

4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt[4]{(m-1)x^2-2mx+m-1}$; b) $f(x)=\sqrt[4]{(m+1)x^2+2x+m-1}$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x}{mx^2-(m-1)x+2m-1}}$; d) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{mx^2-x}{mx^2-(m+1)x+m}}$.

5. Introduceți factorii sub radical:

a) $2\sqrt[3]{2}$; b) $-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{81}$; c) $-\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{81}{256}}$; d) $-a\sqrt[5]{a^3}$; e) $a\sqrt[6]{a^{-3}}$.

6. Scoateți factorii de sub radical:

a) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; b) $\sqrt[4]{(-5)^8}$; c) $\sqrt[4]{(-2)^7\cdot(-3)^9}$; d) $\sqrt[7]{3^{13}\cdot\sqrt[3]{243}}$;

e) $\sqrt{4a^5x^4}$; f) $\sqrt[4]{a^{20}y^9}$; g) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}c^3}$.

7. Ordonează crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$; b) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[7]{7}$.

8. Calculați sumele:

a) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k^2+k}+\sqrt[3]{(k+1)^2}}$;

b) $S'_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{(k-1)^3}+\sqrt[4]{(k-1)^2k}+\sqrt[4]{(k-1)k^2}+\sqrt[4]{k^3}}$.

c) Determinați: $A=\{n\in\mathbb{N}^* \mid S_n\in N\}$; $B= n\in N^* \left| S'_n\in\mathbb{N}\right\}$

9. Demonstrați că pentru orice $a\geq 0$, $b\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ avem:

a) $\left(\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}\right)\left(\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}\right)=a-b$;

b) $\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)\left(\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}-\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}\right)=a+b$;

c) $\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b$;

d) $\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}b}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a+b$, n impar.