

Ora de matematică

Clasa a X-a

Capitolul 1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări)	3
1.2. Radicali de ordinul 2. Radicali de ordinul 3	5
1.3. Radicali de ordinul n	9
1.4. Puteri cu exponent rațional	14
1.5. Puteri cu exponent real	17
1.6. Logaritmi	19
1.7. Probleme pentru olimpiade și concursuri	23

Capitolul 2. NUMERE COMPLEXE

2.1. Numere complexe sub formă algebrică. Operații cu numere complexe	26
2.2. Conjugatul unui număr complex. Modulul unui număr complex	30
2.3. Interpretarea geometrică a unor operații cu numere complexe	34
2.4. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea cu coeficienți complecși	38
2.5. Numere complexe sub formă trigonometrică. Produsul și cătul a două numere complexe ..	41
2.6. Operații cu numere complexe. Formula lui Moivre	45
2.7. Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex. Ecuații binome	48
2.8. Rădăcinile de ordinul n ale unității	51
2.9. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie	53
2.10. Aplicații ale numerelor complexe în trigonometrie și algebră	56
2.11. Probleme pentru olimpiade și concursuri ..	58

Capitolul 3. FUNCȚII ȘI ECUAȚII

3.1. Compunerea funcțiilor. Inversa unei funcții	62
3.2. Funcții injective. Funcții surjective. Funcții bijective	65
3.3. Funcții convexe. Funcții concave	70
3.4. Funcții pare. Funcții impare. Funcții periodice. Centre de simetrie. Axe de simetrie	72
3.5. Funcții monotone. Funcții mărginite	76
3.6. Funcția putere cu exponent întreg	80
3.7. Funcția radical	84
3.8. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale	86
3.9. Funcția exponențială	90
3.10. Funcția logaritmică	95
3.11. Ecuații și inecuații exponențiale	98

3.12. Ecuații și inecuații logaritmice	101
3.13. Sisteme de ecuații (inecuații) exponențiale și logaritmice	105
3.14. Funcțiile sin, cos, arcsin, arccos	107
3.15. Funcțiile tg, ctg, arctg, arcctg	112
3.16. Ecuații trigonometrice	116
3.17. Ecuații liniare în sin și cos. Ecuații omogene	120
3.18. Alte tipuri de ecuații trigonometrice. Sisteme de ecuații trigonometrice	123
3.19. Probleme pentru olimpiade și concursuri ..	125

Capitolul 4. METODE DE NUMĂRARE

4.1. Inducția matematică	131
4.2. Mulțimi finite ordonate. Permutări	134
4.3. Aranjamente	137
4.4. Combinări	139
4.5. Binomul lui Newton	143
4.6. Probleme de numărare	147
4.7. Identități în calculul cu combinări	150
4.8. Probleme pentru olimpiade și concursuri ..	153

Capitolul 5. GEOMETRIE

5.1. Coordonatele carteziene. Distanța dintre două puncte	155
5.2. Coordonatele unui vector în plan	158
5.3. Ecuații ale unei drepte în plan	162
5.4. Condiții de paralelism. Condiții de perpendicularitate	167
5.5. Calcul de distanțe și arii	171
5.6. Probleme pentru olimpiade și concursuri ..	174

Capitolul 6. MATEMATICI FINANCIARE

6.1. Procente. Dobânzi. TVA	178
6.2. Preț de cost. Profit. Credite. Bugete	181
6.3. Evenimente. Câmp finit de probabilitate ..	184
6.4. Probabilități condiționate. Evenimente independente. Regula înmulțirii probabilităților. Formula lui Bayes	187
6.5. Scheme clasice de probabilitate	190
6.6. Variabile aleatoare. Operații cu variabile aleatoare	194
6.7. Valori tipice ale variabilelor aleatoare	197

TESTE DE EVALUARE

SOLUȚII

208

Capitolul 1

MULȚIMEA NUMERELOR REALE.

MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări)

O fracție zecimală infinită și neperiodică se numește *număr irațional*. Prin *număr real* înțelegem orice fracție zecimală infinită, periodică sau neperiodică.

Exemple de numere iraționale: \sqrt{p} , p număr prim, π , e .

Proprietăți ale numerelor raționale:

a) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y; x - y, xy \in \mathbb{Q}$; b) $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$; c) dacă $a, b \in \mathbb{Q}$,

p, q sunt numere prime, atunci $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Arătați că pentru $a, b, c, d \in \mathbb{Q}, p$ număr prim:

a) $a + b\sqrt{p} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$; b) $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow a = c$ și $b = d$.

Soluție. a) Presupunem $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{p} = -\frac{a}{b}$, unde $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$; b) $(a - c) + (b - d)\sqrt{p} = 0 \stackrel{a)}{\Rightarrow} a - c = 0$ și $b - d = 0 \Rightarrow a = c$ și $b = d$.

PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliți care din următoarele numere sunt numere raționale:

a) $\sqrt{169}$;

b) $\sqrt{\frac{144}{289}}$;

c) $\sqrt{1,0201}$;

d) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$;

e) $\sqrt{1+3+5+\dots+27}$; f) $\sqrt{2+4+6+\dots+2000}$.

2. Dați exemplu de câte două numere raționale cuprinse între:

a) $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$;

b) $\sqrt{17}$ și $\sqrt{19}$.

3. Demonstrați că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

a) $(3 + 2\sqrt{5})^2 = m + n\sqrt{5}$;

b) $(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3})^2 = m + n\sqrt{6}$;

c) $\left(\frac{1}{2 - \sqrt{5}}\right)^2 = m + n\sqrt{5}$;

d) $\left(\frac{12}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}\right)^2 = m - n\sqrt{6}$.

4. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

b) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

c) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

d) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

e) $(x + y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$;

f) $xy \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$.

5. Fie $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 21; \sqrt{5n+a} \notin \mathbb{Q}\}$. Demonstrați că avem $\text{card } A \geq 8$.

6. Determinați mulțimile:

a) $A \in \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2 - n + 1} \in \mathbb{Z}\}$;

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2 - 5n + 7} \in \mathbb{Z}\}$.

7. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) pentru orice numere întregi a, b impare, $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbb{Q}$;

b) pentru orice numere întregi pare a și b , avem $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbb{Q}$;

c) există a, b numere întregi impare cu $\sqrt{a^3 + b^3} \in \mathbb{Q}$.

8. Determinați $x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât:

a) $\frac{x\sqrt{3} + y}{2 - \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\frac{x\sqrt{2} + y}{3 - \sqrt{2}} = 1 + y$.

9. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați că:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;

b) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$;

c) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$;

d) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$;

e) $(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leq abc$;

f) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$;

g) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$;

h) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea: $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}\}$. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că avem $\text{card}(A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) = 85$.

11. Fie $a, b, c > 0$ iar $a + b + c = 3$. Fie $A = \sqrt{9a+2} + \sqrt{9b+3} + \sqrt{9c+4}$. Demonstrați că $A < \frac{39}{2}$.

12. Demonstrați că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ și $m, n, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $a + mb = \sqrt{2}$, $a + nb = \sqrt{5}$, $a + pb = \sqrt{11}$.

13. Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$ (proprietatea lui Arhimede).

14. Fie $r \in \mathbb{Q}_+$ o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Demonstrați că numărul $\frac{r+2}{r+1}$ este o aproximare „mai bună” pentru $\sqrt{2}$ (adică avem $\left| \frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2} \right| \leq |r - \sqrt{2}|$)

15. Construiți numai cu rigla și compasul imaginile geometrice ale numerelor:
 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$.

16. Determinați părțile întregi ale numerelor:

a) $a_n = \sqrt{n^2 + n}$; b) $b_n = \sqrt{n^2 + 6n}$; c) $c_n = \sqrt{n^2 + 7n}$.

17. Demonstrați că între orice două numere reale distincte există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

1.2. Radicali de ordinul 2. Radicali de ordinul 3

Teorema 1. Pentru orice număr real $a \geq 0$ există un număr real unic $x \geq 0$ astfel încât $x^2 = a$ (numărul real x notat cu \sqrt{a} se numește rădăcina pătrată a numărului a).

Teorema 2. Pentru orice număr real a există un număr real unic x astfel încât $x^3 = a$ (Numărul real x notat cu $\sqrt[3]{a}$ se numește rădăcina cubică a numărului a , sau radicalul de ordinul 3 din a).

• Proprietățile radicalului de ordinul 2:

Fie $a \geq 0, b > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

a) $\sqrt{a^2} = a$ (pentru $a \in \mathbb{R}$ avem $\sqrt{a^2} = |a|$); b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; c) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

d) $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$; e) $\sqrt{a^{2n}} = a^n$; f) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Observație. Dacă $a < 0, b < 0$ avem: $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

• **Proprietățile radicalului de ordinul 3:**

Fie $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

- a) $a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 0$; b) $a > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > 0$; c) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;
 d) $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$; e) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$; f) $\sqrt[3]{a^n} = (\sqrt[3]{a})^n$;
 g) $\sqrt[3]{a^{3n}} = a^n$; h) $a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

• **Formula radicalilor dubli** (compuși, suprapuși)

Fie $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b$. Avem: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

• Pentru raționalizarea numitorilor se folosesc formulele:

- 1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, a > 0$; 2) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b, a, b > 0$;
 3) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$; 4) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$;
 5) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}}$.

Soluție. Se impun condițiile $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \geq 0$ și $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) = D$.

Ridicând relația la pătrat avem $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = (x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow 10x^2 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \notin D \Rightarrow S = \emptyset$.

2. Arătați că $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} \in \mathbb{N}$.

Soluție. Folosind formula radicalilor dubli obținem: $\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{169 - 48}}{2}} +$

$+ \sqrt{\frac{13 - \sqrt{169 - 48}}{2}} = \sqrt{\frac{13 + 11}{2}} + \sqrt{\frac{13 - 11}{2}} = \sqrt{12} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$;

$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{3} - 1}$. Analog $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.

Deci $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{N}$.

Respect pentru oameni și cărți

1. Demonstrați că pentru orice $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$, avem:

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b.$$

2. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

- a) $\sqrt{2-|x|}$; b) $\sqrt{4-|2x-2|}$; c) $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$;
 d) $\sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt{x^2-1}$; e) $\sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$ f) $\sqrt{(x^2-1)(4-x)(x-2)}$.

3. Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că:

- a) $\sqrt{x^2-2x+1} = x-1$; b) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 1-2x$; c) $\sqrt{-x^2} = x$;
 d) $\sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$; e) $\sqrt[3]{(x-1)^3} = 1-x$; f) $\sqrt{(x-2)^2} = (\sqrt{x-2})^2$.

4. Efectuați:

- a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$;
 c) $\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}$;
 d) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

5. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Q}$ știind că:

- a) $\frac{2}{\sqrt{2+1}} + \frac{2}{\sqrt{3+2}} = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$; b) $\sqrt{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}} = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$;
 c) $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}} = a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{3}$.

6. Raționalizați:

- a) $\frac{2}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$; b) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$; c) $\frac{\sqrt{15}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$;
 d) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; e) $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; f) $\frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$;
 g) $\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{30}}} + \frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$; h) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; i) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$;
 j) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$; k) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; l) $\frac{6}{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3}$.

7. Comparați numerele a și b în cazurile:

a) $a = \sqrt{11} + \sqrt{13}$; $b = \sqrt{10} + \sqrt{14}$;

b) $a = \sqrt{17} - \sqrt{13}$, $b = \sqrt{15} - \sqrt{11}$.

Respect pentru oameni și cărți

8. Demonstrați că:

a) $\sqrt{8 + \sqrt{8} + \sqrt{20} + \sqrt{40}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$; b) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} > 1,41(4)$.

9. Fie $x \in [-4; 0]$, $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - 4y + 4 = 0$. Determinați:

$$a = \sqrt{x^2 + 9y^2 + 8x + 16} + \sqrt{x^2 + 9y^2 - 18y + 9}.$$

10. Calculați numerele:

a) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + 2\sqrt{k^2+k}}$;

b) $\sqrt{\sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \sqrt{\sqrt{1+3+5+\dots+2013}}}$.

11.a) Demonstrați că $\sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Calculați $\sum_{k=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

12. Demonstrați că dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ sau $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, unde $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$.

13. Demonstrați că $E(n) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $E(n) = \frac{2n + \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$.

14. Stabiliți dacă există $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(m) \in \mathbb{Z}$, unde:

$$m = \frac{11+a}{11-a}, E(m) = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{\frac{1}{m}}}{\sqrt{m} - \sqrt{\frac{1}{m}}}.$$

15. Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale x, y cu proprietatea că $x + y = xy \in \mathbb{N}$.

16. Determinați următoarele numere:

a) $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$;

c) $\sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} - \sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$.

17. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că $\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Respect pentru oameni și cărți

18. Calculați sumele:

a) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$;

b) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$;

c) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{k^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{(k+1)^2}}$.

19. Demonstrați că $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^n + (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n + (\sqrt{2} - 1)^n \geq 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

20. Demonstrați că $x > \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)}$ pentru orice $x \geq 1$.

21. Fie $x, y, a \in [-1, \infty)$ astfel încât $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+a}$. Demonstrați că:
 $x + y \geq 2a$.

1.3. Radicali de ordinul n

Definiția 1. Fie $a \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$ număr par. Se numește radical de ordinul n din a numărul real $x \geq 0$ unic cu proprietatea $x^n = a$. Notăm $x = \sqrt[n]{a}$ și avem $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Definiția 2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ număr impar. Se numește radical de ordinul n din a numărul real x unic cu proprietatea $x^n = a$. Notăm $x = \sqrt[n]{a}$ și avem $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Proprietățile radicalilor

De ordin par $n \geq 2$

1) $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y, \forall x \geq 0, y \geq 0$.

2) $\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & a \geq 0, b \geq 0 \\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}; & a \cdot b \geq 0 \end{cases}$

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & a \geq 0, b > 0 \\ \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}; & a \cdot b \geq 0, b \neq 0 \end{cases}$

4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; a \geq 0, m \in \mathbb{N}^*$

De ordin impar $n \geq 3$

1) $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a, b \in \mathbb{R}$

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$

4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$

$$5) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}, a \geq 0, m \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt[n]{|a|}, a < 0, m - \text{par} \end{cases}$$

$$6) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, a \geq 0, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$$

$$7) a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, a \geq 0, b \geq 0 \\ -\sqrt[n]{a^n b}, a < 0, b \geq 0 \end{cases}$$

$$8) \sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0 \\ -a \sqrt[n]{b}, a < 0, b \geq 0 \end{cases}$$

$$9) a > 0, b > 0 \Rightarrow \left[\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b \right]$$

$$5) \sqrt[m]{a^m} = \sqrt[n]{a}, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$$

$$6) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, a \in \mathbb{R}, m - \text{impar} \geq 3$$

$$7) a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

$$8) \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

$$9) a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b \right).$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Ordonăți crescător numerele $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{4}$.

Soluție. $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \cdot 5]{3^5} = \sqrt[20]{243}$; $\sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 10]{2^{10}} = \sqrt[20]{1024}$; $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5 \cdot 4]{4^4} = \sqrt[20]{256}$.

Cum $\sqrt[20]{243} < \sqrt[20]{256} < \sqrt[20]{1024} \Rightarrow \sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4} < \sqrt{2}$.

2. Efectuați $\sqrt{2^5} \sqrt{2} \cdot \sqrt[10]{4^4 2^5 \cdot 8}$.

Soluție. $\sqrt{2^5} \sqrt{2} \cdot \sqrt[10]{4^4 2^5 \cdot 8} = \sqrt[10]{2^6} \cdot \sqrt[10]{4 \cdot 4 \cdot 2^8} = \sqrt[10]{2^6} \cdot \sqrt[10]{4 \cdot 2^2} = \sqrt[10]{2^6} \cdot \sqrt[10]{4 \cdot 2^2} = \sqrt[10]{2^6 \cdot 2^2 \cdot 2^2} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați:

a) $\sqrt[3]{6^6}$; b) $\sqrt[4]{(-2)^8}$; c) $\sqrt[6]{(-8)^2}$; d) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$;
 e) $\sqrt[n]{(-1)^n}$; f) $\sqrt[5]{0,00001}$; g) $\sqrt[3]{-0,000027}$; h) $\sqrt[4]{(-0,0025)^2}$.

2. Determinați valorile lui x pentru care au loc egalitățile:

a) $\sqrt[6]{x^6} = x$; b) $\sqrt[6]{x^6} = -x$; c) $\sqrt[3]{x^6} = x$; d) $\sqrt[3]{x^6} = -x$;
 e) $\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x}\right)^4} = \frac{x-1}{|x|}$; f) $\sqrt[5]{\frac{x^2-1}{|x-1|}} = 1+x$; g) $\sqrt[9]{512^{-1}} = 2x^2$.

3. Determinați valorile reale ale lui x pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt[3]{-x^2 + 3x - 2}$; b) $\sqrt[4]{4x^2 - 5x + 1}$; c) $\sqrt[6]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$;
 d) $\sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{2(x+1)}}$; e) $\sqrt[6]{\frac{3x+3}{x^2-1}}$; f) $\sqrt[4]{x^2 - x} - \sqrt[6]{x - x^2}$.

4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt[4]{(m-1)x^2 - 2mx + m - 1}$; b) $f(x) = \sqrt[4]{(m+1)x^2 + 2x + m - 1}$;
 c) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - x}{mx^2 - (m-1)x + 2m - 1}}$; d) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{mx^2 - x}{mx^2 - (m+1)x + m}}$.

5. Introduceți factorii sub radical:

a) $2\sqrt[3]{2}$; b) $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}$; c) $-\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{81}{256}}$; d) $-a^5\sqrt{a^3}$; e) $a^6\sqrt[4]{a^{-3}}$.

6. Scoateți factorii de sub radical:

a) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; b) $\sqrt[4]{(-5)^8}$; c) $\sqrt[4]{(-2)^7 \cdot (-3)^9}$; d) $\sqrt[7]{3^{13} \cdot \sqrt[3]{243}}$;
 e) $\sqrt{4a^5x^4}$; f) $\sqrt[4]{a^{20}y^9}$; g) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}c^3}$.

7. Ordonează crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$; b) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[7]{7}$.

8. Calculați sumele:

a) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{k^2} + \sqrt[3]{k^2 + k} + \sqrt[3]{(k+1)^2}}$;
 b) $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[4]{(k-1)^3} + \sqrt[4]{(k-1)^2 k} + \sqrt[4]{(k-1)k^2} + \sqrt[4]{k^3}}$.
 c) Determinați: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \in \mathbb{N}\}$; $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid S'_n \in \mathbb{N}\}$

9. Demonstrați că pentru orice $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ avem:

a) $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^4} + \sqrt[n]{a^3b} + \sqrt[n]{a^2b^2} + \sqrt[n]{ab^3} + \sqrt[n]{b^4}) = a - b$;
 b) $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^4} - \sqrt[n]{a^3b} + \sqrt[n]{a^2b^2} - \sqrt[n]{ab^3} + \sqrt[n]{b^4}) = a + b$;
 c) $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$;
 d) $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}b} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a + b$, n impar.