

MATEMATICĂ
BACALAUREAT - TESTE
M2 Tehnologic

CLASA a IX-a

Mulțimi și elemente de logică matematică

- Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adăos; operații cu intervale de numere reale
- Propoziție, predicat, cuantificatori
- Operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile și cu relațiile dintre mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate)
- Inducția matematică

Siruri

- Modalități de a descrie un sir; siruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii
- Condiția ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică, pentru $n \geq 3$

Funcții; lecturi grafice

- Reper cartezian, produs cartezian, reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulțimi numerice; condiții algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte în plan de forma $x = m$ sau de forma $y = m$, $m \in \mathbb{R}$
- Funcția: definiție, exemple, exemple de corespondențe care nu sunt funcții, modalități de a descrie o funcție, egalitatea a două funcții, imaginea unei funcții
- Funcții numerice $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval de numere reale; graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului, intersecția graficului cu axele de coordonate, interpretarea grafică a unor ecuații de forma $f(x) = g(x)$; proprietăți ale funcțiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginire, monotonie, paritate/imparitate (simetria graficului față de axa Oy sau origine), periodicitate
- Compunerea funcțiilor; exemple de funcții numerice

Funcția de gradul I

- Definiție; reprezentarea grafică a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$
- Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonie, semnul funcției
- Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($<$, $>$, \geq), $a, b \in \mathbb{R}$, studiate pe \mathbb{R}
- Poziția relativă a două drepte, sisteme de tipul

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}, a, b, c, m, n, p \text{ numere reale}$$

Funcția de gradul al II-lea

- Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, simetria față de drepte de forma $x = m$ cu $m \in \mathbb{R}$
- Relațiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de formă
$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}, \text{ cu } s, p \in \mathbb{R}$$

Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea

- Monotonie; punct de extrem, vârful parabolei, interpretare geometrică
- Poziționarea parabolei față de axa Ox , semnul funcției, inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq, <, >$), $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, interpretare geometrică
- Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă: rezolvarea sistemelor de formă
$$\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}, \text{ cu } a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$$
, interpretare geometrică

Vectori în plan

- Segment orientat, vectori, vectori coliniari
- Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare; înmulțirea cu un scalar, proprietăți ale înmulțirii cu un scalar; condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori

Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie

- Rezolvarea triunghiului dreptunghic
- Cercul trigonometric, definirea funcțiilor trigonometrice: $\sin: [0; 2\pi] \rightarrow [-1; 1]$, $\cos: [0; 2\pi] \rightarrow [-1; 1]$, $\tg: [0; \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\ctg: (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$
- Definirea funcțiilor trigonometrice: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$, $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$, $\tg: \mathbb{R} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$ cu $D = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\ctg: \mathbb{R} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$ cu $D = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice: $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$
- Modalități de calcul a lungimii unui segment și a măsurii unui unghi: teorema sinusurilor și teorema cosinusului

CLASA a X-a

Mulțimi de numere

- **Numeră reale:** proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv nenul
- Media aritmetică, media ponderată, media geometrică, media armonică
- Radical unui număr (de ordin sau de ordin 3), proprietăți ale radicalilor
- Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare

- **Mulțimea C.** Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operații cu numere complexe. Rezolvarea în \mathbb{C} a ecuației de gradul al doilea având coeficienți reali

Functii și ecuații

- Funcția putere: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și funcția radical: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3$, unde $D = [0, +\infty)$ pentru n par și $D = \mathbb{R}$ pentru n impar
- Funcția exponentială $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ și funcția logaritmica $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$
- Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcții inversabile: definiție, proprietăți grafice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă
- Funcții trigonometrice directe și inverse
- Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor:
 - Ecuații care conțin radicali de ordinul 2 sau de ordinul 3
 - Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice, utilizarea unor substituții care conduc la rezolvarea de ecuații algebrice

Metode de numărare

- Multimi finite: permutări, aranjamente, combinări, numărul tuturor submulțimilor unei multimi cu n elemente

Matematici financiare

- Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA
- Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice
- Interpretarea datelor statistice prin lectura reprezentărilor grafice
- Evenimente aleatoare egal probabile; probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile

Geometrie

- Reper cartezian în plan, coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real, coordonate carteziene ale unui punct din plan, distanța dintre două puncte în plan
- Ecuații ale dreptei în plan determinate de un punct și de o direcție dată și ale dreptei determinate de două puncte distincte
- Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte în plan; linii importante în triunghi, calcularea unor distanțe și a unor arii

CLASA a XI-a

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Matrice

- Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice

- Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu un scalar, proprietăți

Respect pentru oameni și cărți

Determinanți

- Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți

Sisteme de ecuații liniare

- Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n = \overline{2, 3}$
- Ecuații matriceale
- Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar
- Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor liniare
- Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distințe, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Limite de funcții

- Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta închisă, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$
- Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, limite laterale
- Calculul limitelor pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, exponențială, funcția putere ($n = \overline{2, 3}$), funcția radical ($n = \overline{2, 3}$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2, cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$
- Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, orizontale și oblice

Funcții continue

- Continuitatea unei funcții într-un punct al domeniului de definiție, funcții continue, interpretarea grafică a continuității unei funcții, operații cu funcții continue
- Proprietatea lui Darboux, semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale

Funcții derivabile

- Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile
- Operații cu funcții derivabile, calculul derivatelor de ordin I și de ordinul al II-lea pentru funcțiile studiate
- Regulile lui l'Hospital pentru cazurile $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor

- Rolul derivatei de ordin I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate
- Reprezentarea grafică a funcțiilor

Grupuri

- Lege de compoziție internă, tabla operației
- Grup, exemple: grupuri numerice, grupul aditiv al claselor de resturi modulo n
- Morfism și izomorfism de grupuri

Inele și corpuri

- Inel, exemple: inele numerice ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), \mathbb{Z}_n
- Corp, exemple: corpuri numerice ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), \mathbb{Z}_p , p prim

Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p prim)

- Forma algebraică a unui polinom, operații (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar)
- Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner
- Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout
- Rădăcini ale polinoamelor; relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 3

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Primitive (antiderivate)

- Primitivele unei funcții definite pe un interval. Integrala nedefinită a unei funcții continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale

Integrala definită

- Definirea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula Leibniz – Newton
- Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare
- Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbare de variabilă. Calculul integralelor de forma

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{ grad } Q \leq 2$$

Aplicații ale integralei definite

- Aria unei suprafețe plane
- Volumului unui corp de rotație

Varianta 1**Subiectul I****(30 de puncte)**

- 1.** Arătați că numărul $n = \sqrt{27} - 3(2 + \sqrt{3})$ este număr întreg.
- 2.** Determinați punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 6x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 10x - 12$.
- 3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x - 18 = 0$.
- 4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 37\}$, acesta să fie număr prim.
- 5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-2, 4)$ și $N(4, -6)$. Determinați ecuația dreptei MN .
- 6.** Calculați aria triunghiului ABC cu $AB = 7$, $BC = 8$ și $m(\angle ABC) = 60^\circ$.

Subiectul al II-lea**(30 de puncte)**

- 1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Arătați că $A^2 = O_2$.
 - b) Arătați că matricea $I_2 - 2A$ este inversa matricei $I_2 + 2A$.
 - c) Determinați numărul real x pentru care $\det(A - xI_2) = 0$.
- 2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 6x + 6y - xy - 30$.
 - a) Arătați că $x \circ y = 6 - (x - 6)(y - 6)$, pentru orice numere reale x și y .
 - b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq x$.
 - c) Calculați $\sqrt{0} \circ \sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2020^{2020}}$.

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .

c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$.

b) Calculați $\int_0^1 e^x \cdot f(x)dx$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^{a-1} f(x)dx = \int_1^{a+1} (f(x) - 3)dx$.

Varianta 2

Subiectul I

(30 de puncte)

1. Determinați partea reală a numărului complex $z = \frac{1-2i}{2+i}$.
2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x - 8$ cu axa Ox .
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3x^2 - 15x - 15) = 1$.
4. Calculați în câte moduri poate fi aleasă o echipă formată din 3 elevi din totalul celor 7 elevi pe care îi are la dispoziție un antrenor.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-3, 9)$, $N(6, -15)$ și P . Determinați coordonatele punctului P știind că punctul N este simetricul punctului P față de punctul M .
6. Arătați că $\frac{\cos 30^\circ + \sin 45^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 30^\circ + \cos 45^\circ + \sin 60^\circ} = 1$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
 - Verificați că $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
 - Calculați $(A + B)^2$.
 - Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A + xB) = -5$.
2. Se consideră inelul claselor de resturi modulo 8, $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$.
 - Calculați în \mathbb{Z}_8 : $\hat{1} + \hat{2}^2 + \hat{3}^3$.
 - Rezolvați în \mathbb{Z}_8 ecuația $\hat{2}x + \hat{6} = \hat{4}$.
 - Demonstrați că $x^3 = x$ pentru oricare x element inversabil al inelului.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x} + x$.
Respect pentru oamenii și cărții

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Arătați că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.

c) Arătați că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x \ln x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\ln x} dx = 6$.

b) Demonstrați că funcția $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2(2 \ln x - 1) + 2$ este o primitivă a funcției f .

c) Calculați $\int_1^e F(x)f(x)dx$, unde F este o primitivă a funcției f .

Varianta 3

Subiectul I

(30 de puncte)

1. Arătați că $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 1 = 1$.
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 15x + 12$ cu axa Oy .
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x = \sqrt{6x - 9}$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 6.
5. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $2x - 4y + 10 = 0$ și $4x + 2y - 6 = 0$.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 10$ cm. Calculați cosinusul unghiului B .

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x-2 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
 - a) Arătați că $A(2) + A(4) = 2A(3)$.
 - b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 2$.
 - c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20$.
 - a) Arătați că $(-5) \circ (-4) \circ 0 \circ 1 \circ 2 = -5$.
 - b) Demonstrați că $x \circ \frac{1}{x} \geq 11$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
 - c) Determinați numărul natural n pentru care $2020^n \circ (-4) = 1$.