LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR

OVIDIU BĂDESCU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XI-a

consolidare

Ediţia a V-a

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Editura Paralela 45

Cuprins

Capitolul III. Modele de teste

Soluții

CAPITOLUL I. ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1.1. Permutări

Breviar teoretic

• **O permutare de ordinul *n*** este o funcție bijectivă $\sigma:\{1, 2, ..., n\}\to\{1, 2, ..., n\}$.

Pentru a putea opera mai uşor cu aceste funcții bijective, ele se scriu sub forma unui tabel cu două linii, de forma celui de mai jos:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

○ *Observația 1:* Există o permutare specială, numită permutarea identică:

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3... & n \\ 1 & 2 & 3... & n \end{pmatrix}.$$

○ *Observația 2:* Mulțimea tuturor permutărilor de gradul n se notează cu S_n.

• **Compunerea (înmulțirea) a două permutări:** se foloseşte compunerea funcțiilor, adică pentru σ_1, $\sigma_2\in S_n$, avem $(\sigma_1\circ\sigma_2)(k)=\sigma_1(\sigma_2(k))$, $\forall\, k=\overline{1,n}$.

○ *Observație:* Compunerea permutărilor se poate efectua doar dacă aceste permutări sunt de acelaşi tip.

• **Proprietățile compunerii permutărilor:**

(1) este asociativă;

(2) are element neutru, anume permutarea identică e;

(3) toate permutările au o permutare inversă: $\forall\, \sigma\in S_n, \exists\, \sigma^{-1}\in S_n$ astfel încât

$$\sigma\cdot\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\cdot\sigma=e.$$

○ *Observație:* compunerea permutărilor nu este comutativă.

• **Inversa unei permutări:** se permută cea de-a doua linie din σ cu prima linie a lui σ, păstrându-se perechile corespunzătoare şi scriind în ordine crescătoare elementele primei linii în σ^{-1}, de exemplu, dacă $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in S_4$, atunci $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

• **Calcularea puterilor naturale ale unei permutări:** $\sigma^0=e$, $\sigma^n=\underbrace{\sigma\cdot\sigma\cdot...\sigma}_{n \text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

○ *Observația 1:* $\forall\sigma\in S_n$, $\exists\, k\in\mathbb{N}^*, k\le n$, cu $\sigma^k=e$.

○ *Observația 2:* $\forall\sigma\in S_n\Rightarrow\sigma^{n!}=e$.

• **Inversiune a unei permutări** $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$: pentru orice pereche ordonată (i, j), cu $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pentru care $i < j$, rezultă $\sigma(i) > \sigma(j)$.
○ *Observație:* Numărul inversiunilor unei permutări $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, se notează cu $\mathrm{m}(\sigma)$ sau $\mathrm{inv}(\sigma)$.

• **Semnul unei permutări:** numărul întreg $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = \prod\limits_{1 \leq i < \leq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

○ *Observația 1:* dacă numărul de inversiuni ale unei permutări este număr par, atunci aceasta este o permutare pară, iar dacă $\mathrm{m}(\sigma)$ este impar, atunci permutarea σ este impară.
○ *Observația 2:* $\varepsilon(\sigma \cdot \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$, $\forall \sigma, \tau \in S_n$ și $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, $\forall \sigma \in S_n$.
○ *Observația 3:* numărul permutărilor pare de grad n este egal cu numărul permutărilor impare de grad n, adică $\frac{n!}{2}$.

• **Transpoziție:** o permutare $\tau \overset{\text{not}}{=} \tau_{ij} \overset{\text{not}}{=} (ij) \in S_n$, $n \geq 2$, pentru care $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ și $\tau(k) = k$, dacă $k \neq i$, $k \neq j$.
○ *Observația 1:* orice transpoziție este o permutare impară.
○ *Observația 2:* $(ij) = (ji)$, $(ij)^2 = e$, $(ij)^{-1} = (ij)$.
○ *Observația 3:* orice permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, se descompune în produs de transpoziții.

Exerciții și probleme de consolidare

1. Calculați numărul funcțiilor bijective definite pe $\{1, 2, 3\}$ cu valori în $\{1, 2, 3\}$.
2. Stabiliți care dintre următoarele tablouri reprezintă permutări:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculați câte permutări de gradul 4 există. Dați un exemplu de astfel de două permutări σ și τ pentru care $\sigma(1) \neq \tau(1)$.

4. Determinați în fiecare dintre cazurile următoare numărul natural j pentru care tabloul respectiv este o permutare:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & j & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & j & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & j & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & j & 1 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & j & 2 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & j & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calculați câte permutări de gradul 5 există. Dați un exemplu de astfel de două permutări σ și τ pentru care $\sigma(1) = \tau(1)$ și $\sigma(2) \neq \tau(2)$.

6. Calculați câte permutări $\sigma \in S_4$ satisfac egalitatea $\sigma(2) = 2$.

7. Calculați câte permutări $\sigma \in S_5$ verifică egalitățile $\sigma(1) = 1$ și $\sigma(4) = 4$.

8. Calculați câte permutări $\sigma \in S_5$ satisfac egalitatea $\sigma(1) + \sigma(2) = 4$.

9. Calculați câte permutări $\tau \in S_5, \tau \in S_5$ verifică egalitatea $\tau(1) \cdot \tau(3) = 4$.

10. În mulțimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculați $\sigma \cdot \tau$ și $\tau \cdot \sigma$.

11. În mulțimea S_4 a permutărilor de gradul 4 se consideră permutările

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculați:

a) $\alpha\beta,\ \beta\chi,\ \chi\alpha$; b) $\alpha(1)+\alpha(3)$; c) $\beta(2)+\beta(3)$;
d) $(\alpha\beta)(3)$; e) $(\beta\alpha)(2)$; f) $(\alpha\beta\chi)(1)$.

12. În mulțimea S_4 a permutărilor de gradul 4 se consideră permutările

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculați:

a) uv, vw, wu; b) $u(1) + u(4)$; c) $w(1) + w(3)$;
d) $(wu)(3)$; e) $(wu)(2)$; f) $(uvw)(2)$.

13. În mulțimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculați:

a) $\alpha(1) + \alpha(3)$; b) $(\beta\delta)(2)$; c) α^2;
d) β^3; e) δ^4; f) δ^{2007}.

14. În mulțimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculați:

a) $u(1)+u(2)$; b) $(uw)(2)$; c) u^2;
d) w^3; e) v^4; f) v^{100}.

15. Studiați dacă există $\sigma \in S_3$ pentru care $\sigma(1)+\sigma(2)+\sigma(3)=4$.

16. În mulțimea S_4 a permutărilor de gradul 4 se consideră permutarea $u=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$. Determinați u^2, u^3, u^{123}.

17. Determinați inversele următoarelor permutări:

a) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3$; b) $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\in S_4$;

c) $\chi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\in S_4$; d) $\delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}\in S_5$;

e) $\theta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}\in S_5$; f) $\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\in S_4$.

18. Rezolvați ecuația $\alpha x=\beta$ în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\in S_3$;

b) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3$;

c) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\in S_4$;

d) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\in S_4$;

e) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&3&1\end{pmatrix}\in S_5$;

f) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&3&5&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3\end{pmatrix}\in S_5$.

19. Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $\sigma^n=e$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\in S_3$; b) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\in S_4$;

c) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&3&1\end{pmatrix}\in S_5$;

d) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\in S_3$;

e) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\in S_4$;

f) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&4&1\end{pmatrix}\in S_5$.

20. Determinați câte elemente are mulțimea $M=\{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, ..., \sigma^n, ...\}$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3$;

b) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\in S_4$;

c) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&3&1\end{pmatrix}\in S_5$;

d) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\in S_3$;

e) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\in S_4$;

f) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\in S_5$.

21. Determinați σ^{100} în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3$

b) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\in S_4$;

c) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\in S_4$;

d) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\in S_3$

e) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\in S_4$;

f) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\in S_4$.

22. În mulțimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările:

$$u=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\text{ și } w=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

a) Determinați uv.
b) Determinați w^3.
c) Rezolvați ecuația $ux = v$.

23. În mulțimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările:

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\text{ și } c=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

a) Determinați bc.
b) Determinați a^6.
c) Rezolvați ecuația $axb = c$.

24. În mulțimea S_3 a permutărilor de gradul 3 se consideră permutările:

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\text{ și } c=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

a) Determinați ba.

b) Determinați c^{12}.
c) Rezolvați ecuația $ax = cb$.

25. În mulțimea S_4 a permutărilor de gradul 4 se consideră permutările:

$$u=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}.$$

a) Determinați uw.
b) Determinați v^{15}.
c) Rezolvați ecuația $uxw = v$.

26. Determinați care dintre următoarele perechi sunt inversiuni ale permutării

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&2&4\end{pmatrix}\in S_6:$$

a) $(1, 4)$; b) $(1, 5)$; c) $(4, 6)$;
d) $(2, 4)$; e) $(3, 4)$; f) $(2, 6)$.

27. Determinați numărul inversiunilor fiecăreia dintre următoarele permutări din S_5:

a) $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&5&2&4\end{pmatrix}$; b) $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&5&1&2\end{pmatrix}$; c) $\delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$;

d) $\theta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$; e) $\omega=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}$; f) $\zeta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&3&2\end{pmatrix}$.

28. Stabiliți care dintre următoarele permutări din S_6 sunt impare:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&5&6&1&4\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&2&4&6&1&3\end{pmatrix},\quad \chi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&6&3&4\end{pmatrix},$$

$$\delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&3&4&1\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&5&3&1&2\end{pmatrix},\quad \phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&1&5&3&2\end{pmatrix}.$$

29. Determinați perechile (i, j) de numere naturale astfel încât următoarele permutări să fie pare:

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&i&2&j\end{pmatrix}\in S_4$; b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&i&4&j&1&3\end{pmatrix}\in S_6$;

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&i&5&j&2\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&i&j\end{pmatrix}\in S_3$;

e) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&i&5&3&j&2\end{pmatrix}\in S_6$; f) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\i&4&j&1&3\end{pmatrix}$.

30. Determinați perechile (i, j) de numere naturale astfel încât următoarele permutări să fie impare:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & i & 2 & j \end{pmatrix} \in S_4$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & i & 2 & j & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & i & 1 & j & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & 1 & j \end{pmatrix} \in S_3$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & i & 6 & 3 & j & 5 \end{pmatrix} \in S_6$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i & 2 & j & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

31. Stabiliți care dintre următoarele permutări este impară:

a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 24 & 25 & 26 & 27 & \dots & 50 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 48 & 50 & 1 & 3 & \dots & 49 \end{pmatrix}$;

b) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 24 & 25 & 26 & 27 & \dots & 50 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 47 & 49 & 2 & 4 & \dots & 50 \end{pmatrix}$;

c) $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 24 & 25 & 26 & 27 & \dots & 50 \\ 50 & 49 & 48 & 47 & \dots & 27 & 26 & 25 & 24 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 24 & 25 & 26 & 27 & \dots & 50 \\ 50 & 48 & 46 & 44 & \dots & 4 & 2 & 49 & 47 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 24 & 25 & 26 & 27 & \dots & 50 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 23 & 26 & 25 & 28 & \dots & 49 \end{pmatrix}$;

f) $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 24 & 25 & 26 & 27 & \dots & 48 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & 21 & 28 & 27 & 26 & \dots & 45 \end{pmatrix}$.

32. Permutarea $\theta \in S_5$ se descompune în produs de transpoziții astfel:

$$\theta = (13)(35)(24)(14).$$

a) Calculați $\theta(2) + \theta(3)$.

b) Calculați $\theta(1) + \theta(2) + \dots + \theta(5)$.

33. Permutarea $\theta \in S_6$ se descompune în produs de transpoziții astfel:

$$\theta = (15)(26)(34)(24).$$

a) Calculați $\theta(3) + \theta(5)$.

b) Calculați $\theta(1) + \theta(2) + \dots + \theta(6)$.

34. Scrieți ca produs de transpoziții următoarele permutări:

a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; e) $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

35. Rezolvaţi în mulţimea S_3 următoarele ecuaţii:

a) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

36. Rezolvaţi în mulţimea S_4 următoarele ecuaţii:

a) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Matematică de excelenţă

37. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} \text{ este pară.}$$

38. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix} \text{ este impară.}$$

39. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care permutarea

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in S_n \text{ este pară.}$$

40. Arătaţi că numărul permutărilor pare de gradul n este egal cu $\frac{n!}{2}$.

41. Determinaţi permutările $\sigma \in S_n$ pentru care $\frac{\sigma(1)}{1} = \frac{\sigma(2)}{2} = \dots = \frac{\sigma(n)}{n}$.

42. Arătaţi că pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$.

43. Dacă $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$ are proprietatea: $\forall \sigma, \tau \in H \Rightarrow \sigma\tau \in H$, arătaţi că:

$$\forall \sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H.$$

44. Dacă $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, satisface egalitatea $\sigma\tau = \tau\sigma$ pentru orice permutare $\tau \in S_n$, arătaţi că $\sigma = e$.

45. Arătaţi că funcţia $f : S_3 \to S_3$, $f(x) = x^2$ nu este injectivă şi nici surjectivă.

46. Rezolvați în S_5 ecuația $\sigma x = x\sigma$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

47. Arătați că dacă permutarea $\sigma \in S_n$ satisface, pentru orice $1 \le i < j \le n$, egalitatea $\sigma(i) + \sigma(j) = i + j$, atunci σ este permutarea identică.

48. Determinați toate permutările $\sigma \in S_n$, $n \ge 3$, astfel încât numerele $1 + \sigma(1)$, $2 + \sigma(2)$, …, $n + \sigma(n)$ să formeze o progresie aritmetică.

49. Arătați că pentru orice $\sigma \in S_n$, $n \ge 2$, este adevărată inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

50. Se consideră numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Determinați pentru ce permutare $\sigma \in S_n$, $n \ge 2$, suma $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{\sigma(i)}$ este maximă.

1.2. Matrice

Breviar teoretic

• **O matrice cu *m* linii şi *n* coloane (sau matrice de tip (*m*, *n*))** este o funcție $f : \{1, 2, 3, \ldots, m\} \times \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$, $f((i, j)) = a_{ij}$. Schematic, ea poate fi scrisă sub forma unui tablou cu m linii şi n coloane de forma: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

unde a_{ij}, cu $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, se numesc elementele matricei A.

○ *Observație:* Mulțimea matricelor de tip (m, n) peste $\mathbb{C}$ (cu elemente numere complexe) se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Avem astfel: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sau $A = (a_{ij})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

• **Tipuri de matrice:**
– *Matrice linie* sau de tip $(1, n)$ – matrice cu o singură linie;
– *Matrice coloană* sau de tip $(m, 1)$ – matrice cu o singură coloană;
– *Matricea nulă* $O_{m,n}$ – toate elementele sunt egale cu 0;
– *Matrice pătratică de ordin n* sau de tip (n, n) – numărul de linii este egal cu numărul de coloane; în cazul de față, mulțimea matricelor se notează cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;