LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR

OVIDIU BĂDESCU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XII-a

Cu 10 teste pentru bacalaureat după modelul M.E.N.

consolidare

Ediţia a III-a

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Editura Paralela 45

Cuprins

Prefață 5

Capitolul I. Elemente de algebră **7**
1.1. Grupuri 7
1.1.1. Legi de compoziție 7
1.1.2. Grupuri, subgrupuri, reguli de calcul 19
1.1.3. Morfisme și izomorfisme de grupuri 32
1.1.4. Grupuri finite 38
1.1.5. Teste de evaluare 42
1.2. Inele și corpuri 45
1.2.1. Inele, reguli de calcul în inele 45
1.2.2. Corpuri. Morfisme de inele și corpuri 54
1.2.3. Teste de evaluare 57
1.3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ 59
1.3.1. Forma algebrică a unui polinom, funcții polinomiale, operații cu polinoame, teorema împărțirii cu rest, divizibilitate 59
1.3.2. Rădăcini ale polinoamelor, rezolvarea unor ecuații algebrice 64
1.3.3. Teste de evaluare 78
Capitolul II. Elemente de analiză matematică **80**
2.1. Primitive 80
2.1.1. Primitivele unei funcții, proprietăți 80
2.1.2. Metode de integrare 88
2.1.3. Teste de evaluare 99
2.2. Integrala definită 101
2.2.1. Sume Riemann, integrabilitate pe un interval compact, proprietăți, formula Leibniz–Newton 101
2.2.2. Proprietăți ale integralei definite, integrarea funcțiilor continue, teorema de medie, metode de integrare, calculul unor limite de șiruri 109
2.2.3. Aplicații ale integralei definite în geometrie 134
2.2.4. Teste de evaluare 141
Capitolul III. Probleme de matematică aplicată **143**
Capitolul IV. Modele de teste **150**
4.1. Lucrări scrise semestriale 150
4.2. Teste de pregătire pentru examenul de bacalaureat 153
4.2.1. Teste pentru programa M_mate-info 153
4.2.2. Teste pentru programa M_șt-nat și M_tehnologic 160
4.3. Teste de pregătire pentru Olimpiada Națională de Matematică 166

Soluții **171**
Capitolul I. Elemente de algebră 171
Capitolul II. Elemente de analiză matematică 202
Capitolul III. Probleme de matematică aplicată 231
Capitolul IV. Modele de teste 237

Bibliografie selectivă 259

CAPITOLUL I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ

1.1. Grupuri

1.1.1. Legi de compoziţie

Breviar teoretic

• **Lege de compoziţie internă (operaţie algebrică)**

Dacă M este o mulţime nevidă, atunci se numeşte lege de compoziţie (internă) pe M orice funcţie $f : M \times M \to M$; dacă (pentru uşurinţa scrierii) în locul lui f se alege un simbol, de exemplu „$*$", atunci aceasta este lege de compoziţie (internă) pe M dacă pentru orice două elemente x şi y ale mulţimii M avem că şi $x * y$ este tot un element al mulţimii M. Formalizat, aceasta se traduce prin: $\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$.

○ Remarcă: Se mai spune, în aceste condiţii, că **operaţia „$*$"** este lege de compoziţie pe mulţimea M.

○ Observaţie: Pentru a arăta că o lege nu este internă, e suficient să găsim două elemente $x, y \in M$ pentru care $x * y \notin M$.

• $H \subset M \neq \varnothing$ **este parte stabilă a lui** M **în raport cu legea „$*$"** dacă:

1) $H \neq \varnothing$;
2) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

• **Tabla unei operaţii**

Dacă „$*$" este o lege de compoziţie pe o mulţime finită $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi numărul elementelor acesteia este suficient de mic, se poate alcătui un tabel al compunerii oricăror două elemente:

$*$	a_1	a_2	....	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	....	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$		$a_2 * a_n$
...	....	......	....	......
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$		$a_n * a_n$

• **Proprietăţi ale legilor de compoziţie**

Dacă „$*$" este o lege de compoziţie pe $M \neq \varnothing$, atunci:

○ legea este asociativă dacă $x * (y * z) = (x * y) * z, \ \forall x, y, z \in M$

○ legea este comutativă dacă $x * y = y * x, \ \forall x, y \in M$

○ legea are (admite) element neutru dacă $\exists e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x, \ \forall x \in M$

○ dacă legea admite şi element neutru, notat cu e, atunci un element $x \in M$ se numeşte simetrizabil dacă $\exists x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$

○ Observaţia 1: Dacă „*" este o lege de compoziţie asociativă pe M şi dacă „*" este internă pe $H \subset M$, atunci „*" este asociativă şi pe H (proprietatea de ereditate).

○ Observaţia 2: Dacă „*" este o lege de compoziţie comutativă pe M şi dacă „*" este internă pe $H \subset M$, atunci „*" este comutativă şi pe H.

○ Observaţia 3: Dacă o lege de compoziţie „*" are elementul neutru e pe $M \neq \varnothing$, atunci e este unicul cu această proprietate (încercaţi să demonstraţi această afirmaţie!).

○ Observaţia 4: Dacă „*" are elementul neutru $e \in M$ şi dacă acest element neutru aparţine lui $H \subset M$, atunci e este element neutru pentru legea „*" pe H.

○ Observaţia 5: Dacă x admite simetric pe x' în raport cu legea „*" pe M şi dacă $x' \in H \subset M$, atunci x' este simetricul lui x şi pe mulţimea H.

○ Observaţia 6: Mulţimea elementelor simetrizabile ale mulţimii M în raport cu legea de compoziţie „*" se notează cu $U(M)$.

○ Observaţia 7: $U(M)$ este parte stabilă a lui M în raport cu legea „*" şi

$$(x * y)' = y' * x', \ \forall x, y \in U(M).$$

Exerciţii şi probleme de consolidare

1. Stabiliţi care dintre următoarele operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$;

b) adunarea pe $M = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;

c) înmulţirea pe $M = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$;

d) înmulţirea pe $M = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;

e) înmulţirea pe $M = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$;

f) înmulţirea pe $M = \{3k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Stabiliţi care dintre următoarele operaţii **nu** sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{5k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;

b) adunarea pe $M = \{5p / p \in \mathbb{Z}\}$;

c) adunarea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

d) înmulţirea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

e) scăderea pe $M = \mathbb{N}$;

f) adunarea pe $M = \{7p / p \in \mathbb{Z}\}$.

3. Din nou: stabiliţi care dintre următoarele operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) înmulţirea pe $M = \{5p+1 / p \in \mathbb{Z}\}$;

b) înmulţirea pe $M = \{-1, 0, 1\}$;

c) înmulţirea pe $M_n = \left\{ \dfrac{k}{n} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;

d) adunarea pe $M_n = \left\{ \frac{k}{n} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;

e) adunarea pe $M_n = \left\{ \frac{k}{n!} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;

f) înmulţirea pe $M_n = \left\{ \frac{k}{n!} / k \in \mathbb{Z}^* \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

4. Studiaţi (şi stabiliţi) care dintre următoarele mulţimi P_k sunt părţi stabile ale mulţimii numerelor reale în raport cu înmulţirea acestora:

a) $P_1 = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$;
b) $P_2 = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$;
c) $P_3 = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$;
d) $P_4 = \{3k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$
e) $P_5 = [0,1]$;
f) $P_6 = [-1,0]$.

5. Poate vă aşteptaţi acum: stabiliţi care dintre următoarele mulţimi P_k **nu** sunt părţi stabile ale mulţimii numerelor reale în raport cu înmulţirea acestora:

a) $P_7 = [-1,1]$;
b) $P_8 = [-2,2]$;
c) $P_9 = \{-1\}$
d) $P_{10} = \mathbb{Q}$;
e) $P_{11} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
f) $P_{12} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

6. Studiaţi şi care dintre următoarele mulţimi P_k sunt părţi stabile ale mulţimii numerelor reale în raport cu înmulţirea acestora:

a) $P_{13} = (0,+\infty)$;
b) $P_{14} = \left\{ a+b\sqrt{2} / a,b \in \mathbb{Z} \right\}$;
c) $P_{15} = \left\{ a+b\sqrt{3} / a,b \in \mathbb{Z} \right\}$;
d) $P_{16} = \left\{ a+b\sqrt{2} / a,b \in \mathbb{Z}, a^2-2b^2=1 \right\}$;
e) $P_{17} = \left\{ a+b\sqrt{3} / a,b \in \mathbb{Z}, a^2-3b^2=1 \right\}$;
f) $P_{18} = \left\{ x^2 / x \in \mathbb{Z} \right\}$.

7. Stabiliţi care dintre următoarele operaţii „$*$” sunt legi de compoziţie pe mulţimea S indicată în fiecare caz:

a) $x * y = x + y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ şi $S = \{0,1,2,3\}$;

b) $x * y = x \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ şi $S = \{0,1,2,3\}$;

c) $x * y = |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ şi $S = \{0,1,2,3\}$;

d) $x * y = \max(x,y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$ şi $S = \{0,1,2,3\}$;

e) $x * y = \min(x,y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$ şi $S = \{0,1,2,3\}$;

f) $x * y = x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ şi $S = \{0,1,2,3\}$;

8. Arătaţi că următoarele operaţii „$*$” sunt legi de compoziţie pe mulţimea S indicată în fiecare caz:

a) $x * y = (x, y), \forall x, y \in \mathbb{N}^*$ (cel mai mare divizor comun)

şi $S = \{a \in \mathbb{N} / a$ este divizor al lui $12\}$;

b) $x * y = (x, y), \forall x, y \in \mathbb{N}^*$ (cel mai mic multiplu comun)

şi $S = \{a \in \mathbb{N} / a$ este divizor al lui $12\}$;

c) $x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [1, \infty)$;

d) $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [2, \infty)$;

e) $x * y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [3, \infty)$.

f) $x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [4, \infty)$.

9. Acelaşi enunţ ca la exerciţiul 7:

a) $x * y = xy - 5x - 5y + 30, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [5, \infty)$.

b) $x * y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [2, 4]$;

c) $x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [3, 5]$;

d) $x * y = xy - 5x - 5y + 30, \forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $S = [4, 6]$;

e) $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}, xy \neq -1$ şi $S = (-1, 1)$.

f) $x * y = \dfrac{4x + 4y}{4 + xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}, xy \neq -2$ şi $S = (-2, 2)$.

10. Fie mulţimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ şi legile $x \circ y = \max(x, y)$, $x * y = \min(x, y)$, $x \perp y = x + y + xy$.

a) Alcătuiţi tabla lui Cayley pentru fiecare dintre aceste legi.

b) Verificaţi care din aceste operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M.

c) Rezolvaţi în M ecuaţiile: $x \circ 2 = 3$; $x \perp 2 = 3$; $x * 2 = 3$.

11. a) Să se arate că mulţimea $H = \{1, \alpha, \alpha^2\}, \alpha = \dfrac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{2}$, este stabilă faţă de înmulţirea numerelor complexe.

b) Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ mulţimea $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* / z^n = 1\}$ este stabilă faţă de înmulţirea numerelor complexe.

12. a) Să se arate că $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu este stabilă faţă de înmulţirea numerelor reale.

b) Să se arate că $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ nu este stabilă faţă de înmulţirea numerelor reale.

13. a) Să se arate că mulţimea $M=\{0,1,2,3\}$ este stabilă faţă de legea de compoziţie definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x\oplus y=$ restul împărţirii lui $x+y$ la 4.

b) Să se arate că mulţimea $M=\{0,1,2,3,4\}$ este stabilă faţă de legea de compoziţie definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x\oplus y=$ restul împărţirii lui $x+y$ la 5.

14. Să se studieze dacă mulţimea $K=\{f,g\}, f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x, g(x)=1-x$ este stabilă în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

15. Să se studieze dacă mulţimea $L=\{f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f_m(x)=mx+(1-m), m\in\mathbb{R}\}$ este stabilă în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

16. Se notează $A=\mathbb{R}^*$ şi se consideră funcţiile $f,g,h,j:A\to A$ definite prin $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{x}, h(x)=-x, j(x)=-\frac{1}{x}$. Să se arate că mulţimea $\mathcal{J}=\{f,g,h,j\}$ este stabilă faţă de operaţia de compunere a funcţiilor.

17. Se consideră mulţimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ şi funcţiile $f,g,h:M\to M$ definite prin $f(x)=x, g(x)=\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}, h(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}$. Să se arate că mulţimea $E=\{f,g,h\}$ este stabilă în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

18. Se notează $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ şi se consideră mulţimea $\mathcal{K}=\{1_E,u,v,w\}$, unde $u,v,w:E\to E$ sunt definite prin $u(t)=(x,-y), v(t)=(-x,y), w(t)=(-x,-y)$, $\forall t=(x,y)\in E$. Să se arate că mulţimea $\mathcal{K}$ este stabilă faţă de operaţia de compunere a funcţiilor.

19. Să se arate că mulţimea E a matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b\in\mathbb{R}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

20. Să se arate că mulţimea $F=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\cdot a & a \end{pmatrix} / a\in\mathbb{R}, i^2=-1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

21. Să se arate că mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{Q}, a^2+b^2=1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

22. Să se arate că mulţimea $P=\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{R}, a^2-3b^2=1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor. Puteţi determina numărul elementelor mulţimii P?

23. Să se arate că mulţimea $S=\left\{\begin{pmatrix} 2m & 4n \\ 5n & 2m \end{pmatrix} / m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu adunarea matricelor. Este afirmaţia adevărată şi pentru înmulţirea matricelor?

24. Să se arate că mulţimea $T=\left\{\begin{pmatrix} 1+6t & -4t \\ 9t & 1-6t \end{pmatrix} / t\in\mathbb{Q}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

25. Se notează cu G mulţimea matricelor $A(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \dfrac{\sin t}{2} \\ -2\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$. Să se studieze dacă G este stabilă faţă de înmulţirea matricelor.

26. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $H=\{A,B,C,I_2\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

27. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care mulţimea $H=\left\{\begin{pmatrix} 1 & x & ax^2+bx \\ 0 & 1 & cx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

28. Să se arate că mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} 1+4g & 0 & 6g \\ 0 & 0 & 0 \\ -2g & 0 & 1-3g \end{pmatrix} / g\in(-1,\infty)\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

29. Pe mulţimea numerelor raţionale pozitive $\mathbb{Q}_+$ se defineşte o operaţie „$*$” care satisface, pentru orice $x, y, z, t \in \mathbb{Q}_+$, următoarele egalităţi:

a) $(x * y)\cdot(z * t) = (xz) * (yt)$;

b) $x * x = 1$;

c) $x * 1 = x$.

Să se calculeze $48 * 16$.

30. Să se studieze dacă mulţimea $G = \left\{z \in \mathbb{C} / z^2 = \overline{z}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

31. Să se studieze dacă mulţimea $H = \left\{z \in \mathbb{C} / |z-1| = 1\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

32. Să se studieze dacă mulţimea $J = \left\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulţirea numerelor complexe.

33. Să se arate că adunarea numerelor complexe este o lege de compoziţie pe mulţimea $A = \left\{x + iy / x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$, dar înmulţirea nu este.

34. Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea următoarelor legi de compoziţie definite pe mulţimile M indicate în fiecare caz:

a) $M = \mathbb{Z},\ \ x * y = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $M = \mathbb{R},\ \ x * y = xy - x + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

c) $M = \mathbb{C},\ \ x * y = xy + i(x + y), \forall x, y \in \mathbb{C}$;

d) $M = \mathbb{Z},\ \ x \circ y = x + y + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{Z}$;

e) $M = \mathbb{R},\ \ x * y = xy - 4(x + y) + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

f) $M = \mathbb{C},\ \ x * y = x + y + ixy, \forall x, y \in \mathbb{C}$.

35. Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea următoarelor legi de compoziţie definite pe mulţimile G indicate în fiecare caz:

a) $G = \mathbb{Z},\ \ x * y = \max(x, y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $G = \mathbb{Z},\ \ x * y = \min(x, y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$;

c) $G = \mathbb{Z},\ \ x * y = 3x + 2y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$;

d) $G = [0, \infty),\ \ x * y = \sqrt{x \cdot y}, \forall x, y \in G$;

e) $G = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \ A * B = AB + BA, \forall A, B \in G$;

f) $G = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \ A * B = A + B + I_2, \forall A, B \in G$.

36. Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea următoarelor legi de compoziţie definite pe mulţimile H indicate în fiecare caz:

a) $H = \mathbb{Q} \setminus \{2\}, x * y = x + y - \frac{xy}{2}, \forall x, y \in H$;

b) $H = (0, \infty), x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \forall x, y \in H$;

c) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{Q} \right\}$, legea de compoziţie (?) este înmulţirea matricelor;

d) $H = \mathbb{R}_+^*$, $x \Delta y = \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

e) $H = \mathbb{N}^*, x \perp y = x^y, \forall x, y \in H$;

f) $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x, y) * (u, v) = (xu + yv, xv + yu), \forall (x, y), (u, v) \in H$.

37. Să se determine perechile $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care următoarele legi de compoziţie definite pe mulţimile M indicate sunt asociative şi comutative:

a) $M = \mathbb{R}, x * y = ax + y, \forall x, y \in M$;

b) $M = \mathbb{R}, x * y = xy + 2ax + by, \forall x, y \in M$;

c) $M = \mathbb{Q}, x * y = x + y + axy, \forall x, y \in M$;

d) $M = \mathbb{R}, x * y = xy + ax + by + 2, \forall x, y \in M$;

e) $M = \mathbb{C}, x * y = xy + a(x + y) + 1 + bi, \forall x, y \in M$;

f) $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A * B = AB + aA + bB + 2I_2, \forall A, B \in M$.

38. Pe mulţimea $\mathcal{P}$ a punctelor unui plan se defineşte legea de compoziţie $f : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $f(A, B) = C$, unde C este simetricul lui A faţă de B. Să se studieze asociativitatea şi comutativitatea legii definite.

39. Să se studieze care dintre următoarele legi de compoziţie, definite pe mulţimile M indicate în fiecare caz, admit element neutru:

a) $x \circ y = |x - y|, x, y \in \mathbb{Z}$ şi $M = \mathbb{Z}$;

b) $x \vartriangle y = 2x + 2y + 2xy + 1, x, y \in \mathbb{R}$ şi $M = \mathbb{R}$;

c) $x * y = xy + i(x + y), \forall x, y \in \mathbb{C}$ şi $M = \mathbb{C}$;

d) $a \bullet b = \frac{1}{4}ab - 2a - 2b + 24, a, b \in \mathbb{Q}$ şi $M = \mathbb{Q}$;

e) $c \vee d = \frac{1}{2}ab - a - b + 6, a, b \in \mathbb{Q}$ şi $M = \mathbb{Q}$;

f) $u \square w = uw - 3u - 3w + 12, u, w \in \mathbb{R}$ şi $M = (3, \infty)$.

40. Să se studieze care dintre următoarele legi de compoziție, definite pe mulțimile P indicate în fiecare caz admit element neutru și, dacă este posibil, să se determine elementele simetrizabile:

a) $x * y = x + y + ixy, \forall x, y \in \mathbb{C}$ și $P = \mathbb{C}$;

b) $x \square y = 2xy - x - y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $P = \mathbb{R}$;

c) $x \nabla y = 3xy - 5x - 5y + 10, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $P = \mathbb{R}$;

d) înmulțirea matricelor și $P = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$;

e) $(x, y) \circ (u, v) = (xu, yu + v), \forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ și $P = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

f) adunarea matricelor și $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & bi \\ 0 & a + bi \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$.

41. Să se arate că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Q} \right\}$ este stabilă față de înmulțirea din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$. Are înmulțirea element neutru pe M? Dacă da, determinați elementele simetrizabile din M față de înmulțirea matricelor.

42. Determinați elementul neutru al legii de compoziție definite pe $M = (1, \infty)$ prin $x * y = (x-1)^{\ln(y-1)} + 1, \forall x, y \in M$.

43. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{C} \right\}$. Să se determine simetricul elementului $A = \begin{pmatrix} \frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} \end{pmatrix}$ în raport cu legea de compoziție indusă de înmulțirea matricelor pe M.

44. Să se determine elementul neutru al legii definite pe $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin $(a, b) * (c, d) = (ac + a + c, bd + b + d), \forall (a, b), (c, d) \in M$.

45. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție „$*$” definită prin $x * y = xy + 5x + ay + b, \forall x, y \in \mathbb{R}$ să admită element neutru.