EDUARD DĂNCILĂ
IOAN DĂNCILĂ

MATEMATICĂ
PENTRU PERFORMANȚĂ
CLASA A VII-A

Nu îți coborî așteptările
pentru a se potrivi cu performanța ta!
Ridică-ți nivelul de performanță
pentru a se potrivi cu așteptările tale.

Ralph Marston

art
educațional

Cuprins

Numerele naturale

Înțelegerea în profunzime a axiomelor lui Peano, diversitatea formelor de scriere a numerelor naturale, observarea unor clasificări rezultate din împărțiri a creat și pentru clasa a VII-a o problematică deosebit de variată, mereu surprinzătoare, în care numerele naturale și proprietățile lor încântă, fascinează, provoacă.

1. Există numere naturale a și b pentru care $na + (n+1)b = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$?

2. Determinați restul împărțirii numărului $n(n+1)(n+2)$ la $n-1$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. Considerăm numerele a și b naturale $a > b$. Notăm cu C și R câtul și restul împărțirii lui na la $(a-b)$. Scrieți împărțirea lui na la $(a-b)$.

4. Două numere diferite N_1 și N_2 au fiecare câte 100 de cifre și anume 40 de cifre de 1, 30 de cifre de 2, 20 de cifre de 3 și 10 cifre de 4.
   Ne întrebăm:
   Este posibil ca unul dintre numere să fie multiplul celuilalt?

5. a) Dacă un număr natural poate fi exprimat ca sumă de trei pătrate de numere naturale, atunci orice putere naturală a acestui număr se poate exprima ca sumă tot de trei pătrate.
   b) Încercați o generalizare.

6. Comparați sumele: $200^{101} + 243^{101}$ cu $216^{101} + 225^{101}$.

7. Determinați ultimele trei cifre ale numărului 7^{2017}.

8. Determinați numerele $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ cu proprietatea:
   $$\overline{6a_1a_2\ldots a_n} = 4 \cdot \overline{a_1a_2\ldots a_n6}.$$

9. Demonstrați că pentru orice număr n compus, numărul $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ cifre}}$ este la rândul său un număr compus.

10. Care este cel mai mic număr n pentru care numărul $1\underbrace{22\ldots22}_{\text{de } n \text{ ori}}1$ se divide cu 999 999 999?

11. Pătratul unui număr este $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ ori}}\underbrace{222\ldots2}_{n+1 \text{ ori}}5$. Aflați numărul.

12. Numărul A are $2n$ cifre toate egale cu 4, iar numărul B are n cifre toate egale cu 8.
Să se arate că $A + 2B + 4$ este un pătrat perfect pentru orice $n \geq 1$.

13. Se dă numărul $N = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ ori}}4\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ ori}}\underbrace{66\ldots6}_{n \text{ ori}}7$.

Demonstrați că $N = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ ori}}4^3 + \underbrace{66\ldots6}_{n \text{ ori}}7^3$.

14. Demonstrați că:

a) numărul $\overline{\underbrace{44\ldots4}_{n \text{ cifre de } 4}\ \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ cifre de } 2}}$ se poate scrie ca un produs de două numere consecutive;

b) numărul $\overline{\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cifre de } 1}\ \underbrace{55\ldots5}_{n \text{ cifre de } 5}}$ se poate scrie ca un produs de două numere impare consecutive.

15. Care dintre numerele: $A = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ ori}}\underbrace{44\ldots4}_{2n \text{ ori}}$; $B = \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ ori}}\underbrace{88\ldots8}_{n-1 \text{ ori}}9$ sunt pătrate perfecte?

16. Care dintre numerele: $A = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000}$ și $B = 2^{2^{2^2}}$ este mai mare?

17. Care sunt ultimele patru cifre ale numărului $N = 4 \cdot 3^{50} + 5 \cdot 4^{30}$?

18. Un număr natural este compus din 2020 de cifre de 6.
Care este suma cifrelor pătratului său?

19. Dacă m și n sunt numere naturale, arătați că numărul $5^n + 5^m$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte dacă și numai dacă m și n au aceeași paritate.

20. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numerele n, $n+2$, n^2+4, $7n+2$ și $9n+2$ să fie simultan prime.

21. O mulțime A este alcătuită din 5 numere naturale distincte. Se știe că mulțimea sumelor obținute prin adunarea a câte două elemente distincte din A este alcătuită din 7 elemente.
Arătați că suma elementelor mulțimii A este divizibilă cu 5.

22. Arătați că în produsul $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 100!$ se poate șterge unul dintre factorii $k!$ astfel încât produsul care rămâne să fie un pătrat perfect.

23. Există numere naturale impare x, y, z astfel încât numerele $xy + 1$, $yz + 1$ și $zx + 1$ să fie pătrate perfecte?

24. Să se arate că $89^9 > 98^8$.

25. Să se demonstreze că unul și numai unul dintre numerele $2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sau $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ se divide cu 5.

26. Demonstrați că suma $3^{4^5} + 4^{5^6}$ poate fi scrisă ca un produs de două numere mai mari decât 10^{4000}.

27. Considerăm 8 grămezi formate fiecare dintr-un număr diferit de pietricele față de celelalte 7. Se știe că pietricelele oricărei grămezi pot fi distribuite celorlalte 7 astfel încât, după redistribuire, numărul pietricelelor să fie același în fiecare grămadă.
Care trebuie să fie numărul minim de pietricele din grămada cea mai numeroasă?

28. Să se afle toate valorile numerelor naturale x, y, z pentru care $4^x + 4^y + 4^z$ este un pătrat perfect.

29. Demonstrați că există un număr natural scris cu mai mult de 999 de cifre nenule, care nu-și schimbă mulțimea divizorilor primi prin schimbarea între ele a primei cifre cu ultima cifră (și care sunt diferite).

30. Demonstrați că există numai 11 numere naturale de forma:

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ cifre}}\, b\, \underbrace{cc\ldots c}_{n \text{ cifre}}\, d},$$

$n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, pătrate perfecte.

31. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cel puțin unul dintre numerele $n, n + 1, \ldots, 2n - 1, 2n$ este pătrat perfect.

32. a) Se consideră numerele naturale x și y, astfel încât $3x + 4y$ și $4x + 3y$ sunt ambele pătrate perfecte.
Să se arate că ambele numere x și y sunt divizibile cu 7.
b) Dacă x și y sunt pătrate perfecte, $3x + 4y$ și $4x + 3y$ nu pot fi simultan pătrate perfecte.

33. Două numere naturale sunt cuprinse între două pătrate consecutive. Arătați că produsul celor două numere nu poate fi pătrat perfect.

34. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ nenule și diferite. Demonstrați că dacă

$$[a; b]^2 = [b; c] \cdot [a; c] \text{ și } (a; b) = (a; c) = (b; c)$$

atunci $a \cdot b$ este pătrat perfect.

35. Demonstrați că există un multiplu al numărului 2017 care se scrie numai cu cifra a $(1 \leq a \leq 9)$.

36. Determinați numărul natural n pentru care $(3^{n-1} + 5^{n-1}) \mid 3^n + 5^n$.

37. Dacă $n = a^2 + b^2 + c^2$, atunci $n^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $(a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}^*)$.

38. Există numere naturale x și y astfel încât și numerele $x + y$, $2x + y$ și $x + 2y$ să fie simultan pătrate perfecte.

39. a) Arătați că: $13 \mid \underbrace{11\ldots1}_{2017 \text{ cifre de } 1}$.

b) Determinați valorile lui n pentru care $13 \mid \underbrace{55\ldots5}_{n \text{ de } 5}1$.

40. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $n^9 - n^3$ se divide cu $2^9 - 2^3$.

41. Demonstrați că numărul $100\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ de } 1}3$ este un număr compus, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

42. Dacă numerele x, y, z alcătuiesc o tripletă pitagoreică, demonstrați că: $60 \mid xyz$.

43. Demonstrați că: $2^n \mid (n + 1)(n + 2)\ldots(n + n - 1)(n + n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

44. Există numere prime p astfel încât $p^2 + 1147 < 68p$?

45. Demonstrați că $2^{n+2} \mid 3^{2^n} - 1$.

46. Arătați că $23 \nmid 2^n + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

47. Fie numerele $a_n = \underbrace{1010\ldots01}_{n}$.

Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care a_n este număr prim.

48. Fie a, b numere naturale. Comparați numerele

$$x = a^{a+b} + (a+b)^a \text{ și } y = a^a + (a+b)^{a+b}.$$

49. Fie x și y două numere naturale nenule, astfel încât $9^{x-2} + 9^{y+2} \leq 2 \cdot 3^{x+y}$.
Demonstrați că $41 \mid 3^x + 3^y$.

50. Arătați că numărul $\dfrac{(n^2+2)(m^2+4)}{32}$ **nu este** număr natural, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$.

51. Fie p și q două numere impare consecutive.
Demonstrați că $p + q \mid p^q + q^p$.

Recunoașterea tuturor diferențelor a condus până la urmă la o acceptare:

Numerele întregi

Recunoscându-se cu greu simetria axei numerelor, numerele negative s-au impus târziu în matematică.

În lucrarea sa „Aritmetica“, considerată un apogeu al algebrei elene, Diofante afirma că ecuația $4x + 20 = 4$ este absurdă de vreme ce numai un număr care nu-i natural (–4 în limbajul de acum) îndeplinește egalitatea.

De abia în secolul al XVI-lea Cardano, în lucrarea sa „Ars Magna“, recunoaște existența soluțiilor cu numere negative și stabilește regula semnelor.

Acceptarea numerelor întregi negative, „asamblarea“ lor cu numerele cu care numărăm a permis evidențierea mulțimii $\mathbb{Z}$, a numerelor întregi, extinderea unor proprietăți ale mulțimii $\mathbb{N}$, dar și relevarea unor proprietăți specifice, legate de existența lor, de congruența lor, de modul, de reguli ale semnelor.

1. Demonstrați că: $\left(\dfrac{1}{2m+3} - \dfrac{1}{2n+3}\right) \in \mathbb{Z}$ $m, n \in \mathbb{N}$, numai dacă $m = n$.

2. Dacă $x, y \in \mathbb{Q}$, $x, y \in \mathbb{Z}$ și $x + y \in \mathbb{Z}$, atunci $x, y \in \mathbb{Z}$.

3. Arătați că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{-1; 1\}$ și $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$, atunci $4 \mid n$.

4. Fie $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$. Demonstrați că $x + y = 10$.

5. Dacă numerele întregi x și y verifică relația $|x + y| > |1 + xy|$, atunci unul și numai unul dintre numerele x sau y este nul.

6. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$, astfel încât $y(x + y) - z(x + z) = 5$. Demonstrați că $|x + 2y| = 6$ și $|x + 2z| = 4$.

7. Fie $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ două fracții ireductibile cu $b, d > 0$.

   Dacă $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Z}$, atunci $b = d$.

8. Determinați $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\dfrac{n-2018}{2016} + \dfrac{n-2016}{2018} \in \mathbb{Z}$.

9. Determinați numărul natural $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{n}}{2\sqrt{2}-\sqrt{n}}$ să fie un număr întreg.

10. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$, demonstrați că $\dfrac{3x+4y}{4x+3y} \in \mathbb{Z}$.

11. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt{\dfrac{5x-13}{x-1}} \in \mathbb{Z} \right\}$.

12. Fie mulțimea $M = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ cu elementele numere întregi. Demonstrați că mulțimea M are cel puțin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

13. Arătați că dacă a, b, c, d sunt numere întregi cu suma 0, atunci numărul $m = \sqrt{(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)}$ este un număr întreg.

14. Demonstrați că nu există numere întregi distincte a, b, c pentru care $\{a; b; c\} = \{a-b; b-c; c-a\}$.

15. Utilizați proprietăți ale numerelor întregi pentru a demonstra că dacă:

Din triunghiuri echilaterale congruente mici albe și roșii se formează un triunghi echilateral mai mare, astfel încât fiecare triunghi colorat are laturi comune numai cu un număr par de triunghiuri albe, atunci triunghiurile mici din vârfurile triunghiului mare au aceeași culoare.

16. Fie 10 numere reale diferite. Luând câte două numere, se alcătuiesc 45 de sume, dintre care 40 s-a constatat că sunt numere întregi. Demonstrați că și celelalte cinci sume sunt tot numere întregi.

17. Unde este greșeala?

Demonstrați că dacă x, y sunt numere întregi, astfel încât $x^2 + x = 2y^2 + y$, atunci $x + y + 1$ și $2x + 2y + 1$ sunt pătrate perfecte.

„Soluție"

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x^2 + x = 2y^2 + y$.

Scriem egalitatea sub formele

$$(x - y)(x + y + 1) = y^2$$
$$(x - y)(2x + 2y + 1) = y^2$$

apoi, efectuând produsul lor, obținem:

$$(x - y)^2(x + y + 1)(2x + 2y + 1) = x^2y^2.$$

Dacă $x = y$, atunci $x = y = 0$, iar $x + y + 1 = 1$ și $2x + 2y + 1 = 1$, așadar sunt pătrate perfecte.

Dacă $x \neq y$, atunci $(x + y + 1)(2x + 2y + 1) = \dfrac{x^2y^2}{(x - y)^2}$, deci

$$(x + y + 1)(2x + 2y + 1)$$

este pătratul unui număr rațional și, fiind un număr întreg, rezultă că este un pătrat perfect.

Dar pentru că $2(x + y + 1) - (2x + 2y + 1) = 1$, numerele $x + y + 1$ și $2x + 2y + 1$ sunt relativ prime și, având produsul un pătrat perfect, fiecare dintre ele este un pătrat perfect.

Ceea ce trebuie demonstrat.

Contraexemplu:

Cu toate că pentru $x = -3$ și $y = -2$ are loc egalitatea $x^2 + x = 2y^2 + y = 6$, numerele $x + y + 1 = -4$ și $2x + 2y + 1 = -9$ nu sunt pătrate perfecte.

Oare unde s-a greșit?