Traian Anghel

Fizică

Probleme alese

pentru clasele IX-X și bacalaureat

Editura Paralela 45

Cuprins

Partea a IV-a – Producerea și utilizarea curentului continuu

Capitolul I

PRINCIPII ȘI LEGI ÎN MECANICA NEWTONIANĂ

Primul capitol al lucrării include probleme pentru rezolvarea cărora sunt utilizate mărimi fizice ca viteza, accelerația și forța (toate trei având valori medii și momentane), în situații în care sunt întâlnite mișcarea rectilinie (uniformă și uniform variată, pe plan orizontal și înclinat), mișcarea în câmp gravitațional și mișcarea circulară. În acest scop sunt folosite principiile mecanicii, legile mișcării și vitezei, legea deformărilor elastice (Hooke), legile frecării și legea atracției universale. Dacă nu se precizează altfel, pentru accelerația gravitațională se va utiliza $g=10\ \mathrm{m/s^2}$, valoare folosită și în subiectele de mecanică administrate la examenul de bacalaureat.

BREVIAR TEORETIC

Pentru rezolvarea problemelor conținute în capitolul de față sunt necesare următoarele definiții, relații și formule:

- definițiile vitezei medii și vitezei momentane în mișcarea rectilinie: $v_m=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta r}=\dfrac{dx}{dt}$;
- definițiile accelerației medii și accelerației momentane în mișcarea rectilinie: $a_m=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{dv}{dt}$;
- definițiile vectorului viteză medie și vectorului viteză momentană în mișcarea curbilinie plană: $\vec{v}_m=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$; definițiile vitezelor medii și momentane pe direcțiile axelor de coordonate: $v_{mx}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $v_{my}=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$, $v_m=\sqrt{v_{mxx}^2+v_{my}^2}$ și $v_x=\dfrac{dx}{dt}$, $v_y=\dfrac{dy}{dt}$, $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$. Se vor reține și formulele $\vec{v}_m=v_{mx}\cdot\vec{i}+v_{my}\cdot\vec{j}$ și $\vec{v}=v_x\cdot\vec{i}+v_y\cdot\vec{j}$;
- definițiile vectorului accelerație medie și vectorului accelerație momentană în mișcarea curbilinie plană: $\vec{a}_m=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$; definițiile accelerațiilor medii și momentane pe direcțiile axelor de coordonate: $a_{mx}=\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$, $a_{my}=\dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}$,

$a_m = \sqrt{a_{mx}^2 + a_{my}^2}$ și $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Se vor reține și formulele $\vec{a}_m = a_{mx} \cdot \vec{i} + a_{my} \cdot \vec{j}$ și $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$;

- vectorul viteză momentană $\vec{v}$ este tangent la traiectorie, iar vectorul accelerație momentană $\vec{a}$ este orientat către interiorul traiectoriei (către partea concavă);
- vectorul accelerație momentană $\vec{a}$ se mai scrie și sub forma $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, în care $\vec{a}_t$ este accelerația tangențială, iar $\vec{a}_n$ este accelerația normală la traiectorie; de asemenea, $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$; cele două componente $\vec{a}_t$ și $\vec{a}_n$ ale accelerației momentane au modulele date de relațiile $a_t = \frac{dv}{dt}$ și $a_n = \frac{v^2}{R}$, în care R este raza de curbură a traiectoriei în punctul în care se calculează accelerația;
- ecuația principiului al II-lea al mecanicii: $\vec{R} = m\vec{a}$, în care $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ este rezultanta forțelor care acționează asupra unui punct material de masă m, căruia acestea îi imprimă accelerația $\vec{a}$; ecuația vectorială se proiectează pe axele de coordonate astfel: $R_x = ma_x$, $R_y = ma_y$;
- ecuația principiului al III-lea al mecanicii: $\vec{F}' = -\vec{F}$ (acțiunea și reacțiunea au module egale și sensuri opuse);
- legea a II-a a frecării: $F_f = \mu N$;
- legea lui Hooke (numită și legea deformărilor elastice): $\Delta l = \frac{Fl_0}{ES_0}$ sau $\varepsilon = \sigma / E$, în care $\varepsilon = \Delta l / l_0$ este alungirea relativă, iar $\sigma = F / S_0$ este efortul unitar (sau tensiunea mecanică). Pentru un corp elastic dat $F = k\Delta l$, în care k este constanta de elasticitate, $k = \frac{ES_0}{l_0}$;
- pentru mișcarea rectilinie uniformă a unui mobil: $v = \text{ct.}$, $a = 0$, $x = x_0 + v(t - t_0)$ (legea mișcării); de asemenea, distanța parcursă în această mișcare se poate scrie sub forma $d = v \cdot \Delta t$;
- pentru mișcarea rectilinie uniform variată a unui mobil: $a = \text{ct.}$, $v = v_0 + a(t - t_0)$ (legea vitezei) și $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$ (legea mișcării). De asemenea, viteza medie pe intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este dată de

relația $v_m = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$, în care $v_1 = v(t_1)$ și $v_2 = v(t_2)$; legătura dintre viteză și coordonată este dată de relația lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$;

- în mișcarea circulară uniformă: $|\vec{v}| = v = \text{ct.}$ (viteza liniară), $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ (viteza unghiulară); $\omega = 2\pi\nu$, $\omega = 2\pi/T$, $\nu = 1/T$ (în care T este perioada, iar ν este frecvența); $v = \omega \cdot r$. De asemenea, $\vec{a}_{cp} = -\omega^2\vec{r}$ (accelerația centripetă) și $\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_{cp} = -m\omega^2\vec{r}$ (forța centripetă); $a_{cp} = \omega^2 r$ sau $a_{cp} = v^2/r$. Într-un sistem de referință neinerțial (SRN), în raport cu care mobilul se află în repaus, asupra acestuia acționează o forță (fictivă într-un SRI) denumită forță centrifugă de inerție: $\vec{F}_{cf} = -m\vec{a}_{cp} = m\omega^2\vec{r}$;
- legea atracției universale (Newton, 1687) exprimă forța de atracție gravitațională dintre două corpuri considerate punctiforme în raport cu distanța dintre acestea: $F = K\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, în care K este constanta atracției universale ($K = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$), m_1 și m_2 sunt masele celor două corpuri, iar r este distanța dintre ele; intensitatea câmpului gravitațional se definește prin relația $\vec{\Gamma} = \vec{F}/m$ (m este masa corpului de probă). Pentru un corp sferic și omogen (cum pot fi considerate cu o bună aproximație Pământul și oricare alt corp ceresc) $\Gamma = g = K\dfrac{M}{r^2} = K\dfrac{M}{(R+h)^2}$, în care M este masa corpului și R este raza acestuia, iar h este altitudinea la care se determină mărimea $\Gamma = g$. Se mai poate scrie $g = \dfrac{g_0}{(1 + h/R)^2}$, în care $g_0 = K \cdot M/R^2$ este accelerația gravitațională la suprafața corpului.

I.1. Mișcarea rectilinie

1.1. Un automobil se deplasează în linie dreaptă între două localități, parcurgând o fracțiune f din distanța dintre acestea cu viteza v_1, iar restul distanței cu viteza v_2. Să se determine viteza medie a automobilului.

R: $v_m = \dfrac{v_1 v_2}{f v_2 + (1-f) v_1}$

1.2. Un automobil frânează uniform astfel încât în timpul τ_1 parcurge jumătate din distanța de frânare. Să se determine timpul τ_2 în care parcurge cealaltă jumătate a distanței respective.

R: $\tau_2 = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot \tau_1$

1.3. Un râu a cărui apă curge cu viteza $v = 2\ \text{m/s}$ trebuie traversat de o barcă. Să se determine viteza minimă a bărcii $v_{b\min}$ pentru ca aceasta să ajungă din punctul A în punctul B (figura P1.3). Se cunosc $L = 40\text{m}$ și $d = 30\text{m}$.

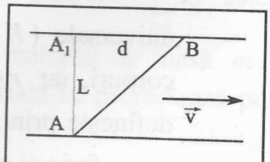

Figura P1.3

R: $v_{b\min} = 1{,}6\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.4.* O persoană înoată cu viteza $v_0 = 0{,}5\ \text{m/s}$ față de apa unui râu care curge cu viteza $v = 1\ \text{m/s}$. Să se determine unghiul α pe care îl face direcția în care trebuie să înoate persoana respectivă cu normala la țărm, pentru ca apa să o deplaseze cât mai puțin la vale.

R: $\alpha = 30^0$

I.2. Principiile mecanicii

1.5. Un corp este lansat cu viteza v_0 de la baza unui plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, coeficientul de frecare dintre corp și plan fiind μ. Să se determine înălțimea h până la care corpul poate urca pe planul înclinat.

R: $h = \dfrac{v_0^2}{2g\left(1+\mu \cdot \text{ctg}\alpha\right)}$

1.6. Un corp este lansat pe o suprafață orizontală pe care se deplasează cu frecare, parcurgând până la oprire distanța d. Pe prima parte a drumului, $d_1 = 2d/3$, coeficientul de frecare la alunecare este μ, iar pe cea de-a doua parte este 4μ. Să se determine viteza cu care a fost lansat corpul.

R: $v_0 = 2\sqrt{\mu g d}$

1.7. Dacă un corp legat de un fir este ridicat cu accelerația $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$, tensiunea din fir este de $k = 2$ ori mai mică decât tensiunea de rupere. Să se determine accelerația maximă a_{max} cu care poate fi ridicat corpul astfel încât firul să nu se rupă.

R: $a_{max} = ka + (k-1)g$; $a = 14\ \mathrm{m/s^2}$

1.8. De un fir elastic lung și subțire se atârnă un corp care îi produce o alungire Δl. Să se determine alungirea $\Delta l'$ a firului pliat în patru părți egale, dacă de el se atârnă același corp.

R: $\Delta l' = \dfrac{\Delta l}{16}$

I.3. Mișcarea în câmp gravitațional

1.9. Un motociclist urcă pe malul în pantă al unui râu, ca în figura P1.9. Să se determine viteza minimă v_0 a acestuia (în punctul A) astfel încât să ajungă pe celălalt mal (în punctul D). Se cunosc înălțimea h și unghiul α de înclinare ale malului situat în pantă, precum și lățimea d a râului.

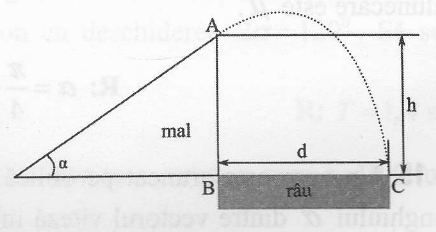

Figura P1.9

R: $v_0 = \dfrac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{g}{2(h + d\cdot \mathrm{tg}\alpha)}}$

1.10.* Un corp este aruncat pe oblică de la înălțimea h, cu viteza v_0. Să se determine unghiul α_0 sub care trebuie să fie aruncat astfel încât distanța parcursă pe orizontală să fie maximă, precum și distanța d_m respectivă.

R: $\mathrm{tg}\alpha_0 = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$; $d_m = \dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

1.11. Un corp aflat în cădere liberă parcurge în ultimele τ secunde ale mişcării o fracţiune egală cu $1/k$ ($k>1$) din înălţimea de la care cade. Să se determine timpul de cădere, t_c. Frecarea cu aerul este neglijabilă.

R: $t_c=\tau\left[k+\sqrt{k(k-1)}\right]$

1.12.* Un corp este aruncat de la sol cu viteza $v_0=20\text{ m/s}$ sub unghiul $\alpha=60^0$ faţă de orizontală. Să se determine raza de curbură a traiectoriei, R, în punctul de înălţime maximă.

R: $R=10\text{ m}$

1.13. Un corp este aruncat cu viteza v_0 sub unghiul α faţă de un plan înclinat cu unghiul β faţă de orizontală. Să se determine: a) durata τ în care corpul se află în aer; b) înălţimea maximă h atinsă de corp, măsurată în raport cu planul.

R: $\tau=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}$; $h=\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g\cos\beta}$

1.14.* Un corp alunecă din vârful unui plan înclinat al cărui unghi se poate modifica, dar având baza b constantă. Să se determine unghiul α al planului pentru care timpul de coborâre este minim, precum şi expresia acestui timp, τ. Coeficientul de frecare la alunecare este μ.

R: $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\phi}{2}$, în care $\phi=\text{arctg}\mu$; $\tau=2\sqrt{\dfrac{b}{g}\left(\mu+\sqrt{1+\mu^2}\right)}$

1.15. Un corp este aruncat pe oblică sub unghiul $\alpha=60^0$. Să se determine valorile unghiului α dintre vectorul viteză momentană şi direcţia orizontală în momentele în care corpul se află la jumătatea înălţimii maxime (la urcare şi, respectiv, la coborâre).

R: $\text{tg}\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

1.16.* Un corp este lansat de la sol, pe oblică. În momentul în care atinge înălţimea maximă, viteza lui este egală cu jumătate din viteza iniţială, iar raza de curbură a traiectoriei în punctul respectiv este R. Să se determine: a) unghiul α sub care a fost lansat corpul, măsurat în raport cu orizontala; b) bătaia, d; c) înălţimea maximă atinsă, h.

R: $\alpha=60^0$; $d=\sqrt{3}R$; $h=\dfrac{3}{2}R$

1.17.* Un corp este aruncat pe orizontală dintr-un turn, cu viteza inițială v_0. Să se determine accelerațiile normală (a_n) și tangențială (a_t) la un moment $t < t_c$ (unde t_c este timpul de coborâre).

$$\text{R: } a_t = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}; \; a_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

I.4. Mișcarea circulară uniformă

1.18. Să se determine turația minimă cu care ar trebui rotit un cilindru cu raza $r = 1$ m în jurul axei sale verticale pentru ca un corp să rămână în repaus relativ pe peretele interior al acestuia (figura P1.18). Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și cilindru este $\mu = 0,25$. Se va lua $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

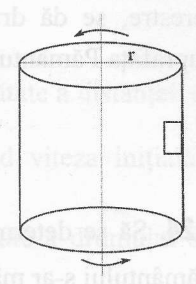

Figura P1.18

$$\text{R: } n = 1 \frac{\text{rot}}{\text{s}}$$

1.19. Un corp mic și greu, suspendat de un punct fix prin intermediul unui fir inextensibil și cu masa neglijabilă având lungimea $L = 1$ m, se rotește în plan orizontal în timp ce firul mătură pânza unui con cu deschiderea $2\alpha = 120^0$. Să se determine perioada de rotație a corpului.

R: $T = 1,4$ s

1.20. Să se determine unghiul α cu care trebuie înclinat la o curbă cu raza $r = 100$ m un drum prevăzut pentru circulație cu viteza de 72 km/h.

R: $\alpha \cong 22^0$

1.21.* Un ciclist se rotește pe un disc cu raza R, așezat în plan orizontal. Coeficientul de frecare la alunecare depinde de distanța r până la centrul de rotație O după legea $\mu = \mu_0 (1 - r/R)$, în care μ_0 este o constantă. Să se determine raza r_m a traiectoriei față de punctul O pe care ciclistul se deplasează cu viteza maximă, precum și viteza respectivă, $v_{\max}$.

$$\text{R: } r_m = \frac{R}{2}; \; v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_0 g R}{2}}$$

I.5. Legea atracției universale

1.22. Dacă g_0 este accelerația gravitațională la suprafața Pământului, să se determine expresia accelerației gravitaționale la altitudini mici $h << R$, unde R este raza Pământului.

R: $g(h) \cong g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)$

1.23.* Într-un puț de adâncime h foarte mare, realizat prin foraj pe direcția razei terestre, se dă drumul unui corp să cadă. Cunoscând accelerația gravitațională la suprafața Pământului, g_0, raza acestuia, R, să se determine timpul de cădere în puț.

R: $t_c = \sqrt{\frac{R}{g_0}} \cdot \arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)$

1.24. Să se determine procentul p cu care ar crește greutatea unui corp dacă masa Pământului s-ar mări cu $f = 10\%$.

R: $p = f = 10\%$

1.25. Să se determine altitudinea h la care trebuie lansat un satelit geostaționar al Pământului, deasupra Ecuatorului. Se cunosc raza planetei noastre, $R_p = 6370$ km, perioada de rotație a acesteia în jurul axei sale, $T = 24$ h și accelerația gravitațională la suprafața terestră, $g_0 = 9,78\ \text{m/s}^2$.

R: $h \cong 35786$ km

REZOLVĂRI

1.1. Distanța $d_1 = fd$ este parcursă cu viteza constantă v_1, deci $fd = v_1\Delta t_1$, iar restul distanței, $d_2 = d - d_1 = (1-f)d$, este parcursă cu viteza v_2, deci $(1-f)d = v_2\Delta t_2$. Pentru viteza medie a automobilului, folosind relația de definiție, $v_m = d/\Delta t$, în care $d = d_1 + d_2$ și $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, se obține $v_m = \dfrac{d}{d_1/v_1 + d/v_2} = \dfrac{d}{fd/v_1 + (1-f)/v_2}$, adică $v_m = \dfrac{v_1 v_2}{fv_2 + (1-f)v_2}$.

1.2. Fie v_1 viteza automobilului după ce acesta a parcurs prima jumătate a distanței de frânare. Se poate scrie $\frac{d}{2} = v_m \cdot \tau_1$, în care $v_m = \frac{v_0 + v_1}{2}$ (v_0 fiind viteza inițială), rezultând astfel $\frac{d}{2} = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \tau_1$ (*rel1*). Pentru cea de-a doua jumătate a drumului se poate scrie $\frac{d}{2} = v'_m \tau_2$, în care $v'_m = \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{v_1}{2}$, obținându-se $\frac{d}{2} = \frac{v_1}{2} \cdot \tau_2$ (*rel2*). Din (*rel2*) rezultă $v_1 = \frac{d}{\tau_2}$, care se înlocuiește în (*rel1*), aceasta devenind $\frac{d}{2} = \frac{v_0\tau_1}{2} + \frac{d\tau_1}{2\tau_2}$, adică $\frac{d}{2}\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = \frac{v_0\tau_1}{2}$ sau $\frac{d}{v_0}\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = \tau_1$ (*rel3*). Pentru întreaga distanță se poate scrie $d = v_m\tau$, în care $v_m = \frac{v_0 + 0}{2} = \frac{v_0}{2}$ și $\tau = \tau_1 + \tau_2$, deci $d = \frac{v_0}{2}(\tau_1 + \tau_2)$ sau $\frac{d}{v_0} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$ (*rel4*). Combinând (*rel3*) și (*rel4*) rezultă $\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = \tau_1$, ecuație care – după prelucrare – se scrie sub forma $\tau_2^2 - 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2 = 0$. Soluția (convenabilă din punct de vedere fizic a) ecuației anterioare este $\tau_2 = \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \tau_1$.

1.3. Viteza $\vec{v}_1$ a bărcii față de mal trebuie să fie orientată de-a lungul dreptei AB, către punctul B (figura P1.3R). Se poate scrie $\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_b$, relație în care $\vec{v}_b$ este viteza bărcii față de apă. În figura indicată, se observă că această viteză are valoarea minimă ($\vec{v}_{b\min}$) în situația în care este orientată perpendicular pe dreapta AB, caz în care se pot

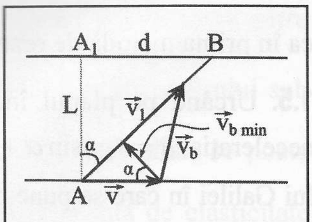

Figura P1.3R

scrie relațiile următoare: $\cos\alpha = \dfrac{L}{\sqrt{L^2+d^2}} = \dfrac{v_{b\min}}{v}$. Din ultima egalitate se obține viteza minimă căutată, $v_{b\min} = v\dfrac{L}{\sqrt{L^2+d^2}}$. Se înlocuiesc datele problemei, rezultând $v_{b\min} = 2\cdot\dfrac{40}{\sqrt{40^2+30^2}}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

1.4. Folosind figura P1.4R,1, se poate scrie folosind asemănarea triunghiurilor și notațiile $d = AB$ și $x = BC$: $\dfrac{x}{d} = \dfrac{v - v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}$. Din relația anterioară se obține $x = \dfrac{d\cdot(v - v_0\sin\alpha)}{v_0\cos\alpha}$. Pentru determinarea extremelor funcției $x = f(\alpha)$ se egalează cu zero prima derivată a acestei funcții, $f'(\alpha) = 0$. Se obține $f'(\alpha) = \dfrac{-d\cdot v_0^2\cos^2\alpha + d\cdot(v - v_0\sin\alpha)\cdot v_0\sin\alpha}{v_0^2\cdot\cos^2\alpha} = 0$, din care rezultă ecuația $-v_0\cdot\cos^2\alpha + v\cdot\sin\alpha - v_0\cdot\sin^2\alpha = 0$ sau $-v_0 + v\cdot\sin\alpha = 0$. Se obține $\sin\alpha = \dfrac{v_0}{v} = \quad = \dfrac{0{,}5}{1} = \dfrac{1}{2}$, rezultând $\alpha = 30^0$. Viteza persoanei față de mal este $\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \vec{v}$.

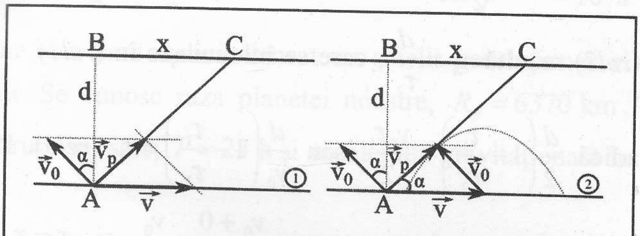

Figura P1.4R

Pentru o rezolvare elementară (la nivelul clasei a IX-a) se desenează un semicerc (a se vedea figura P1.4R,2) având centrul în originea vectorului $\vec{v}_0$, observându-se că distanța x este minimă atunci când dreapta AC este tangentă la semicercul construit anterior, adică atunci când $\vec{v}_0 \perp \vec{v}_p$.

În triunghiul dreptunghic obținut se poate scrie $\sin\alpha = \dfrac{v_0}{v}$, rezultând același unghi α ca în prima metodă de rezolvare (în care s-au folosit noțiuni de analiză matematică).

1.5. Urcând pe planul înclinat, corpul are o mișcare rectilinie uniform frânată cu accelerația $a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Distanța până la oprire se obține folosind ecuația lui Galilei în care se pune condiția ca în momentul opririi viteza corpului să fie egală cu