„Simplu și concis.
Un ajutor de învățare excelent."

„...cartea este remarcabilă pentru pregătirea temelor și a examenelor..."

(Citate ale unor elevi)

Siegfried Schneider

Matematică

Ecuații și funcții

POCKET TEACHER

DPH
DIDACTICA PUBLISHING HOUSE
București, 2019

Autor
Siegfried Schneider este profesor de Metodică Matematică și autor al mai multor manuale de matematică.

Original title: *Pocket Teacher 5-10. Mathematik. Gleichungen und Funktionen* (978-3-411-87104-9) by Siegfried Schneider

ISBN 978-606-048-014-3

Editor coordonator: Florentina Ion
Consultant științific: Prof. Cristian Alexandrescu
Redactor: Gina Palade
Corector: Gabriela Ilincioiu
DTP: Cristina Dumitrescu

Didactica Publishing House
Bdul Splaiul Unirii nr. 16, Clădirea Muntenia Business Center, etaj 5, 506, sector 4, București
Comenzi și informații: telefon/fax: +4021.410.88.14; +4021.410.88.10
e-mail: office@edituradph.ro;
www.edituradph.ro

Tipar realizat de Tipografia Ceconii

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
SCHNEIDER, SIEGFRIED
Matematică : ecuații și funcții : pocket teacher / Siegfried Schneider. - București : Didactica Publishing House, 2019
ISBN 978-606-048-014-3

51

Cuprins

1 Mulțimi

1.1. Noțiuni fundamentale

Noțiunea de mulțime

În viața de toate zilele folosim mereu această noțiune:

- La piață este o mulțime de oameni (sunt câteva persoane, putem număra câte).
- În cadă s-a strâns o cantitate de apă (este multă apă în cadă, nu putem număra câtă).

Cel care a introdus noțiunea de mulțime în matematică a fost GEORG CANTOR (1845-1918):

> O *mulțime* este o colecție de obiecte determinate ale gândirii noastre caracterizate prin anumite proprietăți comune. Aceste obiecte formează *elementele* mulțimii.

EXEMPLE:

- Mulțimea paginilor acestei cărți
- Mulțimea literelor alfabetului
- Mulțimea numerelor prime
- Mulțimea punctelor unui segment de dreaptă

Folosirea noțiunii de mulțime definită de Cantor poate duce la contradicții. De aceea, în matematica actuală noțiunea de *mulțime* este considerată o noțiune fundamentală care nu mai trebuie definită. Ceea ce putem face este să dăm unele *axiome* privind modul de construcție a unor mulțimi. Cu ajutorul noțiunii fundamentale de mulțime se definesc toate celelalte obiecte matematice.

EXEMPLU: Bisectoarea unui unghi este formată din mulțimea tuturor punctelor situate la egală distanță de laturile unghiului.

Reprezentarea mulțimilor

Notații

- *Mulțimile* se vor nota de obicei cu literele mari ale alfabetului: A, B, M_1, M_2 etc.
- *Elementele* mulțimilor se vor nota cu litere mici: a, b, x_1, x_2 etc.
- Dacă elementul x aparține mulțimii A, vom scrie: $x \in A$. Citiți: „x aparține mulțimii A" sau „x este un element al mulțimii A".
- Dacă elementul y nu aparține mulțimii A, vom scrie $y \notin A$. Citiți: „y nu aparține mulțimii A" sau „y nu este un element al mulțimii A".

Descrierea prin cuvinte

EXEMPLU: Mulțimea tuturor pătratelor perfecte mai mici decât 100. Când definim o mulțime prin cuvinte trebuie să fim atenți ca sensul cuvintelor să fie foarte clar, adică să nu se poată interpreta în mai multe feluri. Acesta este un lucru mult mai greu decât pare la prima vedere.

EXEMPLE:

- Mulțimea tuturor tinerilor din satul A. (Exprimare imprecisă: Ce înseamnă „tânăr"?)
- Mulțimea tuturor persoanelor din satul A cu vârsta cuprinsă între 15 și 25 de ani. (Exprimare precisă: Poate că „tânăr" nu înseamnă „între 15 și 25 de ani", dar cel puțin mulțimea este bine definită.)

Descrierea prin enumerare

Se scriu între acolade elementele mulțimii.

EXEMPLU:

$M_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Dacă nu putem scrie toate elementele și nu este niciun pericol de confuzie, punem „...".

EXEMPLE:

- $M_2 = \{1; 3; 5; \ldots; 999\}$
  În cuvinte: mulțimea numerelor naturale impare mai mici decât 1000.
  Sensul punctelor de suspensie (...) este că se continuă cu enumerarea numerelor impare până la 999. Pentru ca regula după care se formează elementele mulțimii să fie clară, se recomandă a se scrie măcar patru elemente înainte de a se pune punctele de suspensie. Altfel s-ar putea să apară confuzii.
- $M_3 = \{3; 5; 7; \ldots; 19\}$
  Nu este clar cine este M_3?
  Toate numerele impare până la 19? Toate numerele prime de la 3 la 19?
  Toate numerele pe care le-am scris sunt prime.
  Pentru a evita asemenea confuzii, este bine ca în acolade să scriem și proprietățile de definiție ale elementelor mulțimii pe care încercăm să o descriem.
  Aceasta se poate face în mai multe moduri.

EXEMPLE:

- $M_4 = \{x \backslash x = 2n + 1; n \in \mathbb{N}; 0 < n < 10\}$
- $M_5 = \{x \backslash x \in P; 2 < x < 20\}$; P este mulțimea numerelor prime.

Reprezentarea grafică a mulțimilor

Adesea mulțimile se reprezintă prin curbe închise (DIAGRAMA EULER-VENN). Reprezentarea aceasta este deosebit de utilă când avem de-a face cu operații cu mulțimi sau cu relații între două sau mai multe mulțimi (↗ pag. 13).

EXEMPLE:

- $M_5 = \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$

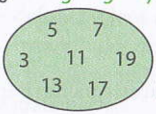
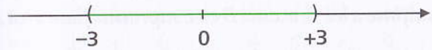


Diagrama Euler-Venn

- $M_6 = \{x \backslash x \in R; -3 < x < +3\}$ (↗ pag. 24)



Relații între mulțimi

Egalitatea mulțimilor

> Spunem că *două* mulțimi sunt *egale* dacă și numai dacă ele au aceleași elemente. Scriem că $A = B$.
> Citim: „Mulțimea A este egală cu mulțimea B".

EXEMPLU:

$M_7 = \{x \backslash x = 2n - 1; n \in \mathbb{N}; 1 < n < 5\}$
$M_8 = \{x \backslash x \in P; 2 < x < 8\}$; P este mulțimea numerelor prime.
$M_7 = M_8$

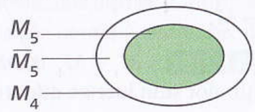
Relația de incluziune

> Dacă toate elementele unei mulțimi A sunt și elemente ale altei mulțimi B, atunci spunem că mulțimea A este inclusă în mulțimea B.
>
> - Mai spunem și că A este o *submulțime* a mulțimii B $A \subset B$,
> - sau că B este o *supramulțime* a lui A. $B \supset A$.
>
> Elementele mulțimii B care nu aparțin și mulțimii A formează *mulțimea diferență* $B \setminus A$. Dacă $A \subset B$, mulțimea $B \setminus A$ se mai numește și *complementara* mulțimii A față de B.

EXEMPLU: Cu mulțimile noastre de până acum:

$M_5 \subset M_4$

reprezentarea printr-o diagramă VENN



Dacă $A \subset B$ și $A \neq B$, spunem că A este o ***submulțime proprie*** a lui B sau că B este o ***supramulțime proprie*** a lui A.

EXEMPLE: Cu mulțimile noastre de până acum:

- M_5 este o submulțime proprie a lui M_4
- M_4 este o supramulțime proprie a lui M_5

Dacă vrem să scriem că A este o submulţime nu neapărat proprie a lui B (deci poate să şi coincidă cu B), atunci folosim notaţia $A \subseteq B$.
Dacă A este ***submulţime*** a lui B, atunci B este ***supramulţime*** a lui A.

EXEMPLU: Cu mulţimile noastre de până acum:
A se vedea M_7 şi M_8 de pe pagina 13.
$M_7 \subseteq M_8$. În plus: $M_8 \subseteq M_7$.

Cardinalul unei mulţimi

Numărul de elemente ale mulţimilor M_1, M_4 sau M_8 este finit.

> Dacă o ***mulţime*** are un număr finit de elemente, atunci ea se numeşte finită.

Numărul de elemente ale unei mulţimi finite se numeşte *cardinalul* mulţimii. Se mai numeşte şi *puterea* mulţimii şi se notează $|A|$ sau card A. Citim $|A|$ = numărul de elemente ale mulţimii A = cardinalul mulţimii A = puterea mulţimii A. Dacă A are n elemente, atunci cardinalul său este n.

EXEMPLU: $M_8 = \{3; 5; 7\}$ are cardinalul 3.

> Două *mulţimi* finite A şi B se numesc *echipotente* dacă au acelaşi cardinal, adică acelaşi număr de elemente. Scriem $A \sim B$.
> Pe scurt: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$

EXEMPLU:
$M_1 = \{1; 2; \ldots; 9\}$
$M_4 = \{3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$
$M_1 \sim M_4$

ATENŢIE! $M_1 \sim M_4$, dar $M_1 \neq M_4$; *Echipotenţa şi egalitatea* mulţimilor sunt lucruri diferite!

Mulţimile M_6 (↗ pag. 13), $\mathbb{N}$, $P = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ este prim}\}$ conţin o infinitate de elemente. Nu există niciun număr natural n în aşa fel încât să putem spune că ele au n elemente. Totuşi, pentru anumite mulţimi infinite este posibil să le punem în corespondenţă cu mulţimea numerelor naturale şi deci să le enumerăm.

EXEMPLU:

$$\begin{array}{lllllllllll}
P = \{2; & 3; & 5; & 7; & 11; & 13; & 17; & 19; & 23; & \ldots\} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{N} = \{1; & 2; & 3; & 4; & 5; & 6; & 7; & 8; & 9; & \ldots\}
\end{array}$$

Asemenea mulţimi se numesc mulţimi infinite ***numărabile***.

> Orice mulţime infinită numărabilă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.

1

Rezultă că $P \sim \mathbb{N}$; Este interesant că P este o submulţime proprie a lui $\mathbb{N}$ şi cu toate acestea cele două mulţimi sunt echipotente. Acest lucru caracterizează mulţimile infinite: pot fi echipotente cu submulţimi proprii ale lor. În cazul mulţimilor finite acest lucru este imposibil. De aceea este bine de reţinut că nu toate reprezentările pe care le avem noi despre mulţimi finite se aplică, automat, şi la mulţimi infinite.
În plus, există mulţimi infinite care nu pot fi enumerate. Asemenea mulţimi se numesc ***nenumărabile***.

EXEMPLU: M_6 (↗ pag. 13) şi $\mathbb{R}$ (mulţimea numerelor reale) nu sunt numărabile. Acestea sunt mulţimi *nenumărabile*.

> Dacă o mulţime nu are *niciun* element, o numim *mulţimea vidă*.
> Mulţimea vidă se notează cu $\emptyset$.
> Prin convenţie, toate mulţimile conţin mulţimea vidă: $\emptyset \subset M$, indiferent de M.

1.2. Operaţii cu mulţimi

Şi cu mulţimile se pot face operaţii. Sunt cunoscute operaţiile cu numere, cum ar fi adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea. Cu mulţimile se pot face următoarele operaţii: reuniune, diferenţă, intersecţie, produs cartezian.

Reuniunea mulţimilor

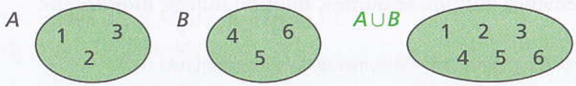
> Prin reuniunea a două mulţimi A şi B se înţelege acea mulţime care conţine toate elementele mulţimilor A sau B. Reuniunea se notează cu $A \cup B$. Citim „A reunit cu B".

EXEMPLU:

$A = \{1; 2; 3\}$

$B = \{4; 5; 6\}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$



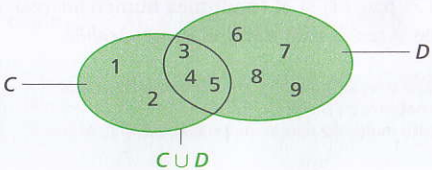
Dacă A şi B nu au niciun element comun, spunem că A şi B sunt *disjuncte*. Dacă ele nu sunt disjuncte, atunci când enumerăm elementele mulţimii $A \cup B$ să avem grijă ca elementele comune mulţimilor A şi B să fie scrise o singură dată.

EXEMPLU:

$C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; cardinalul: 5

$D = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; cardinalul: 7

$C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; cardinalul: 9



Diferenţa mulţimilor

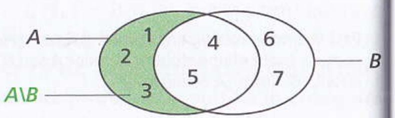
> Prin *diferenţa* a două mulţimi A şi B se înţelege mulţimea acelor elemente din A care nu sunt elemente ale lui B. Notăm diferenţa dintre mulţimea A şi B cu $A \setminus B$ sau $A - B$. Citim „A minus B".

EXEMPLU:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$B = \{4; 5; 6; 7\}$

$A \setminus B = \{1; 2; 3\}$



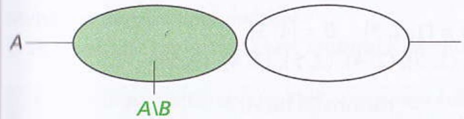
Dacă A şi B sunt disjuncte, atunci $A \setminus B = A$.

EXEMPLU:

$A = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$; (numerele impare)

$B = \{0; 2; 4; 6; \ldots\}$; (numerele pare)

$A \setminus B = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$



Intersecţia mulţimilor

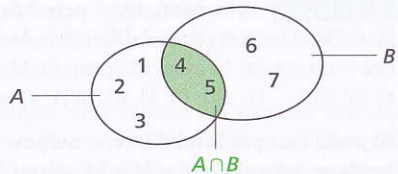
> Prin *intersecţia* a două mulţimi A şi B se înţelege acea mulţime care conţine toate elementele comune mulţimilor A şi B. Intersecţia se notează cu $A \cap B$. Citim „A intersectat cu B". Pe scurt: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ *şi* $x \in B$.

EXEMPLU:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$B = \{4; 5; 6; 7\}$

$A \cap B = \{4; 5\}$



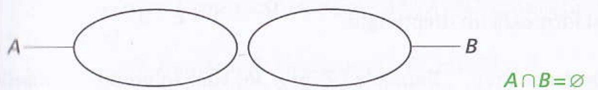
Dacă A şi B sunt disjuncte, atunci intersecţia $A \cap B$ este vidă. Motivul este că niciun element nu aparţine şi mulţimii A, şi mulţimii B.

EXEMPLU:

$A = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$; (numerele impare)

$B = \{0; 2; 4; 6; \ldots\}$; (numerele pare)

$A \cap B = \varnothing$

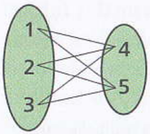


Produsul cartezian a două mulţimi

> Prin produsul cartezian al mulţimilor A şi B se înţelege mulţimea perechilor (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$. Produsul se notează cu $A \times B$. Citim „A produs cartezian cu B". Perechea (a, b) se mai notează şi $(a; b)$ sau $(a \mid b)$.

EXEMPLU: $A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{4; 5\}$

$A \times B = \{(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)\}$



cardinalul lui A:	3
cardinalul lui B:	2
cardinalul lui $A \times B$:	$3 \cdot 2 = 6$

Cardinalul produsului cartezian $A \times B$ este întotdeauna egal cu produsul cardinalelor celor două mulţimi A şi B.

ATENŢIE! Nu confundaţi perechea $(a; b)$ cu mulţimea $\{a; b\}$! Sunt lucruri cu totul diferite! În cazul perechii $(a; b)$ ordinea contează, iar în cazul mulţimii $\{a; b\}$ ordinea nu contează.

EXEMPLU: $(1; 4) \neq (4; 1)$, dar şi $\{1; 4\} = \{4; 1\}$

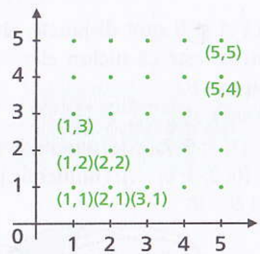
Se poate face produsul dintre o mulţime M şi ea însăşi. Atunci acesta se notează cu $M \times M = M^2$ sau cu M^2.

EXEMPLU:

$M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$M^2 = \{(1; 1), (1; 2), \ldots$

$\ldots (5; 4), (5; 5)\}$



Mulţimea produs se poate reprezenta într-un sistem plan de coordonate; punctele ei formează un dreptunghi.

INDICAŢIE: Funcţiile (↗ pag. 36) sunt submulţimi proprii ale planului $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Perechile (a, b) pot fi privite şi ca mulţimi ordonate (↗ pag. 21). Dacă vom gândi aşa, atunci mulţimea produs cartezian devine o *mulţime de mulţimi*, un *sistem de mulţimi*, adică o mulţime ale cărei elemente sunt din nou mulţimi.

Mulţimea părţilor unei mulţimi

O altă mulţime importantă este mulţimea părţilor unei mulţimi.

> Prin mulţimea părţilor unei mulţimi A se înţelege mulţimea tuturor submulţimilor sale. Se notează cu P_A. Pe scurt: $P_A = \{B : B \subseteq A\}$. Se mai numeşte şi *mulţimea părţilor* lui A.

EXEMPLU:

$A = \{1; 2; 3\}$

$P_A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1; 2; 3\}\}$

Elementele acestei mulţimi nu sunt *elemente ale lui A*, ci sunt submulţimi ale lui A: submulţimi cu un singur element $\{1\}, \{2\}$, cu două elemente $\{1; 2\}, \{1; 3\}$ etc.

De remarcat că mulţimea vidă trebuie să aparţină oricărei mulţimi P_A deoarece ea este submulţime a oricărei mulţimi. De asemenea, mulţimea totală A trebuie să aparţină mulţimii părţilor deoarece A este propria ei submulţime (este adevărat că nu proprie).

O mulţime cu n elemente are întotdeauna 2^n submulţimi. De aceea $|P_A| = 2^{|A|}$.

EXEMPLE:

- În cele exemplificate mai sus: mulţimea putere P_A are puterea $2^3 = 8$, deoarece A are exact 3 elemente, deci A are 8 submulţimi.
- $M = \{a; b\}$
  Cum $|M| = 2$, numărul de elemente din P_M este $2^2 = 4$.
  Calculând, vedem că $P_M = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a; b\}\}$.