DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIEŞANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIŞOR
NICOLAE LUPA
ROMEO NEGREA
GHEORGHE ŢIGAN
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul de admitere din anul 2020 la

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA

Colecţia "LICEU"

EDITURA POLITEHNICA
TIMIŞOARA - 2019

Cuprins

PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze

$$\{3,3\}+\{-3,3\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

a) 0 b) $0,3$ c) $0,6$ d) $6,6$ e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A=(\sqrt{2}\ ,100-\sqrt{2}\ )$ şi $B=(\sqrt{5}\ ,100+\sqrt{5}\ )$. Câte numere naturale conţine mulţimea $A\cap B$?

a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei

$$|x|+|x+2|=3.$$

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulţimea

$$\{x\in\mathbb{R},\ |2x-3|\leq 6\}\ ?$$

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine cea mai mare valoare a numărului natural n pentru care este verificată inegalitatea $(x+2y)^2\geq nxy$ oricare ar fi numerele reale x şi y.

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8 f) nu există

AL 6 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$$

a) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ b) $(-\infty, -1)$ c) $\mathbb{R}$

d) $\emptyset$ e) $(1, +\infty)$ f) $(-\infty, -2)$

AL 7 Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8} \leq x+2.$$

a) $[1, \infty)$ b) $[-8, -4] \cup [1, \infty)$ c) $[-8, -4]$

d) $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ e) $(-\infty, -4]$ f) $[-2, \infty)$

AL 8 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuaţia

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puţin o soluţie reală.

a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

d) $-2,\ 1 \pm \sqrt{2}$ e) $2 \pm \sqrt{2}$ f) $0,\ 1 \pm \sqrt{2}$

AL 9 Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 1.$$

a) $\left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$ c) $\left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right]$

d) $[-1, +\infty)$ e) $\emptyset$ f) $(-1, +\infty)$

AL 10 Fie ecuaţia

$$x^2 + |x| = mx\,(x+3)\,, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului m astfel încât această ecuaţie să aibă exact trei soluţii reale diferite.

a) $\mathbb{R}$ b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ c) $\emptyset$

d) $(-\infty, 1]$ e) $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ f) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

AL 11 Să se determine suma elementelor mulţimii

$$\left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

a) -5 b) -4 c) -1 d) 0 e) 2 f) 5

AL 12 Ştiind că a este un parametru real, să se determine mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x^2 - x(a^2 + \sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2} = 0.$$

a) $\{\sqrt{2}, a^2\}$ b) $\{1, a^2\}$ c) $\{\sqrt{2}, a\}$

d) $\{\sqrt{2}, a^2 + 1\}$ e) $\{1, a\}$ f) $\{2, a\}$

AL 13 Să se găsească mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

a) $\{1\}$ b) $\{0, -1\}$ c) $\{0, 2\}$

d) $\{-1\}$ e) $\emptyset$ f) $\{0\}$

AL 14 Să se determine mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

a) $\{-1, 0, 1\}$ b) $\{-1, 1, 2\}$ c) $\{-1, 0, 2\}$

d) $\{0, 1, 2\}$ e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

AL 15 Andrei şi Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câştigă prima rundă, iar Cristian o câştigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârşitul celei de-a doua runde?

a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 16 Valer pleacă la şcoală având suma de x lei cu el, unde x este un număr natural din intervalul $(2, 6]$ şi cheltuieşte $\frac{2}{x-2}$ din aceasta. Să se determine mulţimea tuturor valorile pe care le poate lua x, dacă el se întoarce acasă fără datorii.

a) $\{3, 4, 5, 6\}$ b) $\{3, 4, 5\}$ c) $(2, 6]$

d) $\{3, 4\}$ e) $\emptyset$ f) $\{4, 5, 6\}$

AL 17 Maria cheltuieşte $\frac{3}{8}$ din salariul său lunar pe chirie şi $\frac{5}{12}$ pe mâncare. Ana, care câştigă dublu faţă de Maria, cheltuieşte un sfert din salariul său pe chirie şi jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată şi suma pe care o câştigă fetele împreună?

a) $\frac{17}{72}$ b) $\frac{17}{24}$ c) $\frac{17}{48}$ d) $\frac{23}{24}$ e) $\frac{23}{72}$ f) $\frac{23}{48}$

AL 18 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent creşte b?

a) $56,25\%$ b) 40% c) 20%
d) $0,025\%$ e) $0,5\%$ f) 60%

AL 19 Suma totală de bani depusă la Smart Bank se măreşte de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor creşte suma medie depusă în fiecare cont?

a) 2 b) 8 c) $9,8$ d) 12 e) $12,5$ f) 13

AL 20 Preţul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu p lei este s lei. Pentru comenzi ce depăşesc p lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depăşeste p lei. Dacă valoarea comenzii este x lei ($x > p$), care este preţul transportului?

a) $s + 0,05x$ b) $s + 0,05p$ c) $0,05(s - p + x)$
d) $s + 0,05(x - p)$ e) $s + 0,05(p - x)$ f) $s + 0,05(x + p)$

AL 21 Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{şi} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - x - a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $E_1 = -\frac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$ b) $E_1 = -\frac{1+3a}{a^3}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$
c) $E_1 = -\frac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ d) $E_1 = \frac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$
e) $E_1 = \frac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ f) $E_1 = -\frac{1}{a^2}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$

AL 22 Fie ecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + a^2 = 0, \ a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine o relaţie independentă de a între x_1 şi x_2.

a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$

c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$

e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$

AL 23 Fie ecuaţia

$$x^2 - x - a = 0, \ a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine o ecuaţie de gradul doi în variabilă y ce are soluţiile $y_1 = \dfrac{x_1^2}{x_2}$ şi $y_2 = \dfrac{x_2^2}{x_1}$.

a) $y^2 - \dfrac{1+2a}{a}y - a = 0$ b) $y^2 + \dfrac{1+3a}{a}y - a = 0$

c) $y^2 - \dfrac{1+3a}{a}y - a = 0$ d) $y^2 - \dfrac{1+2a}{a}y - a^2 = 0$

e) $y^2 - \dfrac{1+3a}{a}y - a^2 = 0$ f) $y^2 + \dfrac{1+4a}{a}y - a = 0$

AL 24 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real nenul a ştiind că inecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(-\infty, 1]$ b) $[1, +\infty)$ c) $\{1\}$

d) $(0, 1]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\emptyset$

AL 25 Fie mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real a, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\emptyset$

AL 26 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a, ştiind că intersecţia $A \cap B$ are exact două elemente.

a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$

d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) $\emptyset$ f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

AL 27 Se consideră un pătrat de arie S_1. Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2. În acelaşi mod, construim succesiv un şir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n \geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017 S_n \geq S_1$.

a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 28 Discriminantul unei ecuaţii de gradul II cu coeficienţi întregi nu poate fi

a) -2015 b) -2016 c) 112 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 29 Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ conţin exact un număr impar?

a) 5 b) 16 c) 32 d) 64 e) 37 f) 160

AL 30 Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$\frac{2x + 5x^2 + 8x^3}{x^2} \quad \text{pentru} \quad x > 0.$$

a) 0 b) 2 c) 8 d) 13 e) 15 f) 22

AL 31 Fie a, b, c numere reale nenule. Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

a) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ b) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$

c) $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ d) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

e) $-\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ f) niciuna dintre acestea

AL 32 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuaţia

$$(a-1)(a-3) + (b-5)(b-7) + (c-9)(c-11) < 0\,?$$

a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 33 Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ şi } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $y^2 + \dfrac{5a^2+1}{a^2}\, y + a = 0$ b) $y^2 - \dfrac{1}{a^2}\, y - a = 0$

c) $y^2 + a = 0$ d) $y^2 + \dfrac{5a^2+5a+1}{a^2}\, y - a = 0$

e) $y^2 - a = 0$ f) $y^2 - 2a + 3 = 0$

AL 34 Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[k, k+\frac{1}{k}\right]$ c) $\{n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$

d) $\{1\}$ e) $[0,1]$ f) $(0,1)$

AL 35 Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}.$$

a) $\dfrac{19}{15}$ b) $\dfrac{20}{15}$ c) $\dfrac{14}{15}$ d) 1 e) $\dfrac{13}{15}$ f) $\dfrac{10}{15}$

AL 36 Să se calculeze media aritmetică a soluţiilor ecuaţiei

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

a) 0 b) $\dfrac{5}{8}$ c) $\dfrac{3}{8}$ d) $\dfrac{5}{12}$ e) $\dfrac{7}{16}$ f) 1