Ana Spornic

MATEMATICĂ M1

Bacalaureat
Simulare - clasa a XI-a

Booklet
Bucureşti, 2019

Enunțuri

TESTUL 1

Subiectul I. Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.
(30 de puncte)

1. **(5p)** Fiind dată ecuația $x^2 - 2mx + 2 - m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) cu rădăcinile x_1 și x_2, să se determine valorile numărului real m pentru care este adevărată egalitatea $\frac{x_1 - 1}{x_2} + \frac{x_2 - 1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - 26$.

2. **(5p)** Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 1$ și $g(x) = 4x^3 - 3x$. Să se calculeze $(f \circ g)(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. **(5p)** Câte numere de trei cifre diferite se pot forma cu cifrele 2, 3, 5, 7, 9?

4. **(5p)** Dacă $a_5 = 61$, $a_{11} = 1647$ sunt termenii progresiei geometrice $(a_n)_{n \geq 1}$, să se determine a_7.

5. **(5p)** Fie $A(-2, 3)$, $B(2, 6)$ și dreapta d paralelă cu Ox dusă prin $M(0, -2)$. Să se determine coordonatele punctului C situat pe dreapta d, astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic în A.

6. **(5p)** Să se determine soluțiile ecuației $\cos^4 x = -\cos^2 x$.

Subiectul al II-lea. Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.
(30 de puncte)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

a) **(5p)** Să se calculeze $\det B$.

b) **(5p)** Să se determine $\operatorname{rang} A$.

c) **(5p)** Să se rezolve ecuația matriceală $X \cdot A = B$.

2. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{1+i} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{1+i} \end{pmatrix}$, unde $i^2 = -1$.

a) **(5p)** Să se calculeze $\det(A \cdot B)$.

b) **(5p)** Să se determine matricea X care are elementele de pe diagonala secundară nule și verifică relația $A^t \cdot X = B$, unde A^t este transpusa matricei A.

c) **(5p)** Să se rezolve ecuația matriceală $X \cdot Y = A \cdot B$, unde X este matricea găsită la punctul b).

Subiectul al III-lea. Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

a) **(5p)** Să se reprezinte grafic funcția f.

b) **(5p)** Să se discute după valorile parametrului real m numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$.

c) **(5p)** Să se studieze continuitatea funcției f.

2. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general: $a_n = \frac{1}{0!+1!} + \frac{1}{1!+2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!+n!}$.

a) **(5p)** Să se calculeze termenul general a_n.

b) **(5p)** Să se arate că șirul este convergent.

c) **(5p)** Să se demonstreze egalitatea: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} n(n!\ln a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{(n+2)!}$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

TESTUL 2

Subiectul I. Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. **(5p)** Se consideră ecuația $mx^2 - m(3x + 10) - (x^2 + 3x + 10) = 0$, unde m este număr real. Să se determine numărul real m pentru care rădăcinile ecuației sunt inverse una celeilalte.

2. **(5p)** Să se raționalizeze fracția $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

3. **(5p)** Având trei cifre de 4, patru cifre de 5 și cinci cifre de 6, câte numere de douăsprezece cifre se pot forma cu ele?

4. **(5p)** Dacă 4 și 8 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, să se determine numărul termenilor considerați pentru ca suma lor să fie 112.

5. **(5p)** Fie $A(-2, 3)$, $B(2, 6)$ și dreapta d paralelă cu Ox dusă prin $M(0, -2)$. Să se determine coordonatele punctului C situat pe dreapta d, astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic în B.

6. **(5p)** Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x \operatorname{ctg} x - \cos x \operatorname{tg} x = 0$.

Subiectul al II-lea. Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Fie $U_a \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $U_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **(5p)** Să se demonstreze că $U_a \cdot U_b = U_{a+b}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$.

b) **(5p)** Să se demonstreze că $U_a \cdot U_{-a} = I_2$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

c) **(5p)** Să se determine numărul real a pentru care $U_a^n = I_2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

a) **(5p)** Să se calculeze $\det A$.

b) **(5p)** Să se calculeze B^t.

c) **(5p)** Să se rezolve ecuația matriceală $A \cdot X = B^t$.

Subiectul al III-lea. Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.
(30 de puncte)

1. a) **(5p)** Să se verifice prin inducție că $x^n \geq 1 + n(x-1)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $(\forall)$ $x > 0$ (inegalitatea lui I. Bernoulli).

b) **(5p)** Folosind inegalitatea lui I. Bernoulli să se arate că $1{,}01^{1000} \geq 11$.

c) **(5p)** Dacă $0 < a < 1$ este fixat, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n < \frac{1}{10}$, $(\forall)$ $n \geq \mathbb{N}$.

2. Se dă șirul $(a_n)_{n>2}$, $a_n = \frac{\ln n}{n}$.

a) **(5p)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n>2}$ este monoton și mărginit.

b) **(5p)** Să se verifice relația $a_{2n} = \frac{1}{2} a_n + \frac{\ln 2}{2n}$.

c) **(5p)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Răspunsuri

TESTUL 1

Subiectul I. 1. $m = 3$ sau $m = 4$; **2.** $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$; **3.** A_5^3; **4.** 183; **5.** $\left(\frac{7}{4}, -2\right)$; **6.** $x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **Subiectul al II-lea. 1. a)** $\det B = 99$. **b)** $\det A = -4 \Rightarrow$ $\operatorname{rang} A = 3$. **c)** $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{9}{4} & -4 & \frac{1}{4} \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. **2. a)** $\det(A \cdot B) = 0$.

b) $X = \begin{pmatrix} 2(1-i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+i} \\ 0 & \frac{1-i}{2} & 2i \end{pmatrix}$. **c)** $Y = X^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 & \frac{1+i}{4} \\ 4 & 2(1+i) & -2(1+i) \\ 1+i & \frac{1+i}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Subiectul al III-lea. 2. a) $\frac{1}{(n-1)!+n!} = \frac{1}{(n-1)!(1+n)} = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. $m = -\frac{9}{11}$; **2.** $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30}}{12}$; **3.** $\frac{12!}{3!4!5!}$; **4.** 7; **5.** $(8, -2)$; **6.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Subiectul al II-lea. 2. a) $\det A = 3$. **c)** $X = A^{-1} \cdot B^t$, $X = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} & \frac{13}{2} \\ 9 & 5 \\ \frac{19}{2} & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$.

Subiectul al III-lea. 2. a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 < n$, $(\forall)\ n \geq 3$, adică $(n+1)^n > n^{n+1}$ etc.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. $m = 1$; **2.** $S_{10} = 3069$; **3.** 5^3; **4.** 8; **5.** $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$; **6.** $x \in \left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Subiectul al II-lea. 2. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. **b)** $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$.

Subiectul al III-lea. 2. b) $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$, $x_{2n} = \frac{n}{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

TESTUL 4

Subiectul I. 1. $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$; **2.** 41; **3.** $2(5 + \sqrt{106})$; **4.** $\frac{671}{1296}$; **5.** $3x + 2y - 7 = 0$; **6.** $\operatorname{tg}^2 a$. **Subiectul al II-lea. 1. a)** $\det A = -2$. **b)** $\operatorname{rang} A = 3$. **c)** $X = B \cdot A^{-1} = (1 \quad 0 \quad -1)$.

2. a) $\begin{pmatrix} \omega^2 & 1 \\ \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$. **b)** $\det(A^2) = (\det A)^2 = (1 - \omega^3) = 0$.
c) $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n = A + 2 \cdot A + 2^2 \cdot A + 2^3 \cdot A + \ldots + 2^n \cdot A = (2^n - 1) \cdot A$.