Andra Carmina Michai
Doina Grădinaru
Ana Răduțu-Babeț
Simona Ionela Vatamanu

Simulare Matematică

Bacalaureat

Tehnologic M2

Booklet
București, 2019

Enunțuri

Testul 1

Subiectul I

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi $a_5 = 13$. Să se determine a_{100}.

2. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (3m + 1)x + 5, m \in \mathbb{R}$. să se determine $m \in \mathbb{R}$, ştiind că vârful parabolei are abscisa egală cu 5.

3. Rezolvaţi ecuaţia $3^{x^2 - x} = 9$.

4. Să se determine probabilitatea ca egalând un element n al mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \geq n^2$.

5. În reperul xOy se consideră punctele $A(3, 2)$ şi $B(-4, 3)$. Determinaţi panta dreptei AB.

6. Ştiind că $\sin x = \frac{4}{5}$; $\cos y = \frac{3}{5}$ şi $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\cos x + \sin y$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $\det(A + B)$.

b) Să se demonstreze că $A^3 = O_3$.

c) Să se arate că are loc egalitatea $B^2 - 2B = A$.

2. Se dă matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a+2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5-a & 3 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $\det A$.

b) Să se rezolve ecuaţia $\det A = 7$.

c) Calculaţi $\det[A(0) + A(1) + \ldots + A(10)]$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-3}{x^2+2x-3}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty}((3x-2) \cdot f(x))$.

c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x \in (-\infty, 0] \\ \sqrt{2x+1}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$.

a) Arătați că $f(-2) \cdot f(4) = -21$.

b) Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x = 0$.

c) Arătați că, dacă p și q sunt numere reale astfel încât $(p+1)(q+1) < 0$, atunci $f(p) \cdot f(q) < 0$.

Testul 2

Subiectul I

1. Calculați suma $S = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$.

2. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $-3 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+6} = x + 2$.

4. Determinați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ acesta să fie divizor al lui 10.

5. Aflați panta dreptei determinată de punctele $A(1,-3)$ și $B(-2,1)$.

6. Calculați $\sin^2 30° + \sin^2 60° + \sin^2 45°$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2+3x & -3x \\ 3x & 2-3x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $A(0) + A(1)$.

b) Arătați că $A^2(0) = 2^2 I_2$.

c) Arătați că $\det[A(x)]$ nu depinde de x.

2. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 0 \\ x^2+1 & y^2+1 & 0 \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $D(2;-2)$.

b) Arătați că $D(x, y) = (x-y)(1-xy)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $D(9^x, 0) = 81$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 - (x-2)^2$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{f(x)}{6x}\right)^x$.

2. Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1, & x \leq 1 \\ x + 4, & x > 1 \end{cases}$.

a) Să se calculeze $f(-1) + f(2)$.

b) Să se arate că funcţia f este continuă în $x_0 = 1$.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x) \leq -1$.

Răspunsuri

TEST 1

Subiectul I. 1. 298. **2.** 3. **3.** $x_1 = 2$; $x_2 = -1$. **4.** $\frac{4}{5}$. **5.** $-\frac{1}{7}$. **6.** $\frac{7}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. a) $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$; **b)** Calcul; **c)** $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

$B^2 - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$

2. a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & a+2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5-a & 3 \end{vmatrix} = -2a - 11$; **b)** $-2a - 11 = 7 \Rightarrow -2a = 18 \Rightarrow a = -9$;

c) $A(0) + A(1) + \ldots + A(10) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 33 & 77 & 11 \\ 22 & 0 & 11 \\ 33 & 0 & 33 \end{pmatrix}$; $\det[A(0) + A(1) + \ldots + A(10)] = \begin{vmatrix} 33 & 77 & 11 \\ 22 & 0 & 11 \\ 33 & 0 & 33 \end{vmatrix} = 11^3 \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 11^3$.

Subiectul al III-lea

1. a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \frac{-1-3}{1-2-3} = \frac{-4}{-4} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(3x-2)(x-3)}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 9x - 2x + 6}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{11}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-3}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$.

2. a) $f(-2) = (-2)^3 + 1 = -7$; $f(4) = \sqrt{4 \cdot 2 + 1} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow f(-2) \cdot f(4) = -21.$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 1$; $f(0) = 1 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0$.

c) $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ și cum f e continuă pe $\mathbb{R}$ obținem că f are semn contrar pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$ și $(-1, \infty)$. Cum $f(-2) < 0$ și $f(5) > 0$ obținem că $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -1)$ și $f(x) > 0$ pentru $x \in (-1, \infty)$; $(p+1)\cdot(q+1) < 0 \Rightarrow p \in (-\infty, -1)$ și $q \in (-1, \infty)$ sau $p \in (-1, \infty)$ și $q \in (-\infty, -1)$ de unde obținem că $f(p)$ și $f(q)$ au semne diferite, deci $f(p) \cdot f(q) < 0$.

TEST 2

Subiectul I. 1. $\frac{15}{8}$. **2.** $x \in \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$. **3.** $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. **4.** $\frac{2}{5}$.
5. $m_{AB} = -\frac{4}{3}$. **6.** $\frac{3}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. a) $A(0)+A(1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

b) $A^2(0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\cdot I_2\cdot 2\cdot I_2=2^2\cdot I_2$.

c) $\det A(x)=(2+3x)(2-3x)+9x^2=4-9x^2+9x^2=4$ constant.

2. a) $D(2,-2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 5 & 5 & 0\end{vmatrix}=20$. **b)** Calcul.

c) $(9^x-0)(1-9^x\cdot 0)=81\Rightarrow 9^x\cdot 1=81\Rightarrow 9^x=9\Rightarrow x=2$.

Subiectul al III-lea

1. a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2^2-(-1)^2=3$. **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(6-\frac{3}{x})}{x}=6$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-3}{6x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{-2x}\right]^{\frac{-1}{2x}\cdot x}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

2. a) $f(-1)+f(2)=1-3+1+2+4=5$. **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2+3x+1)=5$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+4)=5$; $f(1)=1+3+1=5\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=f(1)\Rightarrow f$ continuă în $x_0=1$. **c)** $x^2+3x+1\le -1\Rightarrow$ $x^2+3x+2\le 0\Rightarrow x^2+3x+2=0$; $x_1=-1$; $x_2=-2\Rightarrow x\in[-2,-1]\cap(-\infty,1]=$ $[-2,-1]$; $x+4\le -1\Rightarrow x\in(-\infty;-5]\cap(1,\infty)=\varnothing\Rightarrow S=[-2,-1]$.

TEST 3

Subiectul I. 1. $\sqrt{3}$. **2.** 21. **3.** $A\left(\dfrac{4}{3};0\right)$. **4.** $\dfrac{7}{9}$. **5.** $\sqrt{29}$. **6.** $\dfrac{120}{169}$.

Subiectul al II-lea

1. a) $A(2)\cdot A(-3)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix}$. **b)** $A^2=\begin{pmatrix}(a-1)^2+1 & 2(a-1)\\ 2(a-1) & 1+(a-1)^2\end{pmatrix}$; prin calcul se obține rezultatul; **c)** $A^2=2A$ cf. pct b) $\Rightarrow a=2$.

2. a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=0$. **b)** Calcul, proprietățile determinanților. **c)** $x^3-x^2-9x+9=0$ $\Rightarrow x^2(x-1)-9(x-1)=0\Rightarrow(x-1)(x^2-9)=0\Rightarrow x_1=1$; $x_2=3$; $x_3=-3\Rightarrow$ $d=(c-a)(c-b)(b-a)=-4(-6)\cdot 2=48$.

Subiectul al III-lea

1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x^2+1}=1$. **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x(x+1)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=2$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală la $+\infty$.

2. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt{x^2+9}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+a)=f(0)\Rightarrow\sqrt{9}=a\Rightarrow a=3$. **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}=$