Coordonatori

DANA HEUBERGER **FLORIN BOJOR**

Nicolae Muşuroia **Dana Heuberger** **Gheorghe Boroica**
Florin Bojor **Vasile Pop**

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

Clasa a IX-a

Ediţia a III-a

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Editura Paralela 45

CUPRINS

TESTE INIŢIALE

TESTUL I.1

I.1.1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $\sqrt{n^2+6n+28} \in \mathbb{N}$.

I.1.2. Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=12 \end{cases}$.

Gazeta Matematică *6/2009*

I.1.3. Determinaţi punctul M din interiorul triunghiului ABC, ştiind că: $|S-3S_1|=|S-3S_2|=|S-3S_3|$, unde S, S_1, S_2, S_3 reprezintă ariile triunghiurilor ABC, AMB, BMC, respectiv AMC.

Nicolae Muşuroia

I.1.4. Fie ABC un triunghi, punctele $N \in (AB)$, $M \in (AC)$ şi $MB \cap NC = \{O\}$. Arătaţi că $\dfrac{d(O, MN)}{d(A, MN)} = \dfrac{d(O, BC)}{d(A, BC)}$.

Gheorghe Szöllösy, R.M.T., *2/2013*

TESTUL I.2

I.2.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Rezolvaţi ecuaţia

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+2}{6}+\frac{x^2+3}{12}+\ldots+\frac{x^2+n}{n^2+n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

I.2.2. Determinaţi numerele reale a, b, c pentru care expresia $E(a, b, c)=6a^2+b^2+$ $+4c^2+4a\sqrt{2}-2bc\sqrt{3}-2ac\sqrt{5}+18$ este minimă. Găsiţi acest minim.

I.2.3. Un paralelipiped dreptunghic are volumul 60 cm^3. Dacă mărim dimensiunile paralelipipedului cu 3 cm, 4 cm, respectiv 5 cm, atunci volumul său devine 480 cm^3. Determinaţi aria totală a paralelipipedului iniţial.

I.2.4. Determinaţi numerele prime a şi b care verifică relaţia $a^5-b^3=(a+b)^2+54$.

SOLUŢIILE TESTELOR INIŢIALE

TESTUL I.1

I.S.1.1. Se constată că $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, (n+3)^2 < n^2+6n+28 < (n+4)^2$. Deci $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$, $n+3 < \sqrt{n^2+6n+28} < n+4$. Atunci pentru $n \geq 7, \sqrt{n^2+6n+28}$ nu poate fi pătrat perfect. Căutăm $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Verifică $n = 6$.

I.S.1.2. Avem $36 = (x+y+z)^2$. Folosind şi a doua relaţie, rezultă $x^2+y^2+z^2 = 12$. Deci $x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$. Obţinem $x = y = z = 2$.

I.S.1.3. Fie $\alpha = |S-3S_1| = |S-3S_2| = |S-3S_3|$. Atunci $S-3S_1 = k_1\alpha$, $S-3S_2 = k_2\alpha$, $S-3S_3 = k_3\alpha$, unde $k_1, k_2, k_3 \in \{-1, 1\}$. Prin adunare obţinem $3S-3(S_1+S_2+S_3) = \alpha(k_1+k_2+k_3)$, deci $0 = \alpha(k_1+k_2+k_3)$. Prin urmare, $\alpha = 0$ şi $S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S}{3}$. Rezultă că M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

I.S.1.4. Avem: $\dfrac{d(O, MN)}{d(A, MN)} = \dfrac{S_{OMN}}{S_{AMN}}$, iar $\dfrac{d(O, BC)}{d(A, BC)} = \dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$.

Deci trebuie arătat că $\dfrac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$ sau echivalent $S_{OMN} \cdot S_{ABC} = S_{AMN} \cdot S_{OBC}$.

Dar $S_{OMN} \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{4} OM \cdot ON \cdot AB \cdot AC \sin \sphericalangle(MON) \cdot \sin \sphericalangle(BAC)$, iar

$S_{AMN} \cdot S_{OBC} = \dfrac{1}{4} AM \cdot AN \cdot OB \cdot OC \sin \sphericalangle(MON) \cdot \sin \sphericalangle(BAC)$.

Prin urmare, trebuie arătat că $\quad OM \cdot ON \cdot AB \cdot AC = AM \cdot AN \cdot OB \cdot OC \quad (1)$

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiurile BON, respectiv COM cu secantele $A-M-C$, respectiv $A-N-B$, rezultă: $\dfrac{AN}{AB} \cdot \dfrac{MB}{MO} \cdot \dfrac{CO}{CN} = 1$ şi $\dfrac{AM}{AC} \cdot \dfrac{NC}{NO} \cdot \dfrac{BO}{BM} = 1$.

Deci $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{MO}{MB} \cdot \dfrac{CN}{CO}$ şi $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{NO}{NC} \cdot \dfrac{MB}{OB}$.

Atunci $\dfrac{AN}{AB} \cdot \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MO}{MB} \cdot \dfrac{CN}{OC} \cdot \dfrac{NO}{CN} \cdot \dfrac{MB}{OB} = \dfrac{MO \cdot NO}{OC \cdot OB}$, din care rezultă relaţia (1).

TESTUL I.2.

I.S.2.1. Pentru $x^2 > 1$, avem că $\dfrac{x^2+1}{2} + \dfrac{x^2+2}{6} + \dfrac{x^2+3}{12} + \ldots + \dfrac{x^2+n}{n^2+n} > 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$,

iar pentru $x^2 < 1$, avem că $\dfrac{x^2+1}{2} + \dfrac{x^2+2}{6} + \dfrac{x^2+3}{12} + \ldots + \dfrac{x^2+n}{n^2+n} < 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

Iar $x^2 = 1$ verifică ecuația, deci soluția este $x \in \{-1, 1\}$.

I.S.2.2. $E(a, b, c) = \left(a + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(b - c\sqrt{3}\right)^2 + \left(c - a\sqrt{5}\right)^2 + 10$ este minimă, atunci când $a = -2\sqrt{2}$, $c = -2\sqrt{10}$, $b = -2\sqrt{30}$ și minimul este 10.

I.S.2.3. Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului. Atunci $V = abc = 60 \text{ cm}^3$, iar $(a+3)(b+4)(c+5) = 480 \text{ cm}^3$. Aplicând inegalitatea mediilor, vom obține că $a + 3 \geq$ $\geq 2\sqrt{3a}$; $b + 4 \geq 2\sqrt{4b}$; $c + 5 \geq 2\sqrt{5c}$. Înmulțind membru cu membru inegalitățile anterioare, vom obține că $(a+3)(b+4)(c+5) \geq 8\sqrt{60abc} = 480 \text{ cm}^3$. Deci vom avea egalitate în fiecare inegalitate dintre cele anterioare, prin urmare $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Atunci aria totală va fi 94 cm^2.

I.S.2.4. Dacă $a, b \in \mathcal{M}_3 + 1$ sau $a, b \in \mathcal{M}_3 + 2$, atunci $a^5 - b^3 \in \mathcal{M}_3$ și din egalitate obținem că $a + b \in \mathcal{M}_3$, ceea ce este fals. Dacă $a \in \mathcal{M}_3 + 1$ și $b \in \mathcal{M}_3 + 2$ sau invers, atunci $a + b \in \mathcal{M}_3$ și din egalitate obținem că $a^5 - b^3 \in \mathcal{M}_3$ care este fals. Deci cel puțin unul dintre numerele a și b este 3. Dacă $a = 3$, ecuația devine $189 - b^3 = (3 + b)^2$ cu singura soluție $b = 5$. Dacă $b = 3$, ecuația devine $a\left(a^4 - a - 6\right) = 90$, care nu are soluții numere prime.

CAPITOLUL 1. PRINCIPIUL INCLUDERII ŞI EXCLUDERII

Prezentăm în continuare o tehnică utilă în rezolvarea unor probleme de numărare.

1.1. Teoremă (Principiul includerii şi excluderii)

Dacă mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt finite, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $|A_k|$ reprezintă numărul de elemente din mulţimea A_k $(k \in \overline{1,n})$, atunci:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1} \cdot \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Demonstraţie: Vom demonstra formula anterioară prin inducţie matematică. Pentru $n = 2$, avem de demonstrat că: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Într-adevăr, numărul elementelor mulţimii $A_1 \cup A_2$ este egal cu suma numărului elementelor lui A_1 şi A_2, din care se scade numărul elementelor comune celor două mulţimi, elemente care au fost numărate de două ori. Presupunem că formula de demonstrat este adevărată pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi o demonstrăm pentru $n + 1$. Fie mulţimile finite $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$. Cu notaţia $B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, avem:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n+1}| = |B \cup A_{n+1}| = |B| + |A_{n+1}| - |B \cap A_{n+1}| \quad (1)$$

Deoarece operaţia de intersecţie este comutativă, asociativă şi distributivă faţă de reuniune, avem: $|B \cap A_{n+1}| = |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})| \overset{\text{ip. ind.}}{=} \sum_{i=1}^{n}|A_i \cap A_{n+1}| -$
$- \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n+1}|$. Utilizând relaţia (1), ipoteza inducţiei pentru mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n$ şi relaţia anterioară, vom obţine:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap$$
$$\cap ... \cap A_n| + |A_{n+1}| - \left(\sum_{i=1}^{n}|A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n+1}|\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1}|A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| - ... + (-1)^n \cdot |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n+1}|,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

1.2. Consecinţă. Dacă A, B, C sunt mulţimi finite, atunci sunt utile următoarele cazuri particulare:

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$.

Notăm cu $\varphi(n)$ funcţia indicatorul lui Euler, adică numărul de numere naturale mai mici decât n şi care sunt relative prime cu n, unde $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, iar $\varphi(1) = 1$.

1.3. Observaţie. Formula din teorema anterioară rămâne valabilă dacă se înlocuieşte „$\cup$" cu „$\cap$" şi „$\cap$" cu „$\cup$". Atunci obţinem:

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cup A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

1.4. Propoziţie. Dacă descompunerea în factori primi a numărului natural nenul n este $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$, atunci $\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$.

Demonstraţie: Vom calcula numărul $n - \varphi(n)$. Acest număr reprezintă numărul numerelor naturale mai mici decât n şi care sunt divizibile cu cel puţin unul din numerele p_i, $i \in \overline{1,m}$. Dacă notăm cu A_i mulţimea numerelor naturale mai mici decât n şi divizibile cu p_i, atunci avem:

$$n - \varphi(n) = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{m-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|,$$

deci $\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le m} \frac{n}{p_i \cdot p_j} - \ldots + (-1)^m \cdot \frac{n}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m} =$

$$= n\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le m} \frac{1}{p_i \cdot p_j} - \ldots + (-1)^m \cdot \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat. La ultima egalitate s-a folosit faptul că:

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot x^{n-1} + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i \cdot x_j \cdot x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

relaţie ce se poate demonstra prin inducţie matematică, unde $x, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5. Consecinţă. Dacă p este un număr natural prim, atunci:

a) $\varphi(p) = p - 1$;

b) $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţia rezultă imediat din proprietatea anterioară sau din definiţie.

Principiul lui Dirichlet

Dacă vei dori să pui trei bile în două cutii, în mod sigur vei pune cel puţin două bile în aceeaşi cutie. De asemenea, nu se pot aranja patru cutiuţe în cele 3 sertare ale unui birou fără a pune cel puţin două cutiuţe în acelaşi sertar. Distribuind cinci iepuri în patru cuşti, proprietarul acestora va fi nevoit să pună cel puţin doi iepuri în aceeaşi cuşcă.

Aceste observaţii simple stau la baza unui principiu care poate fi formulat astfel: dacă introducem $n + 1$ obiecte în n cutii, atunci va exista o cutie care va conţine cel puţin două obiecte.

Varianta discretă a acestui principiu este cel mai simplu exemplu de raționament „de bun-simț" cunoscut sub denumirea de principiul lui Dirichlet sau principiul cutiei (*Principe de tiroirs* – principiul sertarelor, în franceză; *Pigeonhle principle* – principiul cuștilor de porumbei, în engleză). Principiul cutiei este legat de numele matematicianului german Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), cu toate că era bine cunoscut cu mult înaintea acestuia. Meritul lui Dirichlet este acela de a fi aplicat acest principiu în multe probleme de teoria numerelor.

Acest raționament extrem de simplu are marea calitate de a putea fi stăpânit de elevi de la cea mai fragedă vârstă și, dacă profesorul știe să le ofere probleme cu enunțuri variate, le poate dezvolta copiilor pasiunea pentru raționamente matematice care urmează a fi folosite în situații mai complicate.

Vom da în continuare unele formulări ale principiului cutiei în algebră sau geometria combinatorică.

PRINCIPIUL LUI DIRICHLET ÎN ALGEBRĂ

Dăm în continuare două formulări în algebră ale principiului cutiei.

I. Dacă repartizăm $n \cdot k + 1$ obiecte în k cutii, atunci va exista o cutie în care se află cel puțin $n + 1$ obiecte.

II. Fie A o mulțime nevidă și $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ o partiție a mulțimii A, adică $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$ și $A_i \cap A_j = \varnothing$ pentru $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$.

Dacă avem $n + 1$ elemente din A, atunci va exista o mulțime A_i și care să conțină cel puțin două dintre cele $n + 1$ elemente considerate.

Acest principiu stabilește existența unei cutii cu anumite proprietăți, fiind așadar un principiu de existență și nu unul constructiv, deoarece nu stabilește un algoritm de aflare a cutiei cu proprietățile dorite. Diversitatea și frumusețea problemelor în care se poate utiliza principiul cutiei face ca, la numeroase concursuri sau în diverse cărți de specialitate, acest tip de probleme să fie mereu prezent.

1.6. Exemplu. Arătați că, oricum am alege 7 pătrate perfecte distincte, există cel puțin două a căror diferență se divide prin 10.

Soluție: Restul împărțirii la 10 a unui număr este egal cu ultima cifră a numărului. Un pătrat perfect poate avea ultima cifră egală cu 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Cum avem 7 pătrate și doar 6 posibilități pentru ultima cifră, vor exista două pătrate care au aceeași ultimă cifră. Diferența acestora se divide cu 10.

1.7. Exemplu. Arătați că, oricare ar fi 7 puncte într-un disc de rază 1, există două puncte între care distanța este cel mult 1.

Soluție: Împărțim discul în 6 sectoare congruente. Într-unul dintre cele 6 sectoare se găsesc cel puțin două dintre cele 7 puncte. Atunci distanța maximă dintre două puncte aflate într-un astfel de sector este 1.

PRINCIPIUL LUI DIRICHLET ÎN GEOMETRIA COMBINATORICĂ

O variantă geometrică a principiului lui Dirichlet care ne apropie de geometria combinatorică ar fi: dacă pe suprafața unei mese de arie S se așază foi de hârtie având suma ariilor $S' > S$, atunci există cel puțin două foi suprapuse.

O primă generalizare a principiului cutiei ar fi: dacă în n cutii introducem m obiecte și $m > p \cdot n, p \in \mathbb{N}^*$, atunci există o cutie care conține cel puțin $p + 1$ obiecte.

Se observă că în varianta discretă, algebrică, esențial este să cunoaștem numărul obiectelor și numărul cutiilor, iar în varianta geometrică să cunoaștem aria mesei și aria obiectelor, adică o măsură a lor.

Cadrul teoretic care permite studiul problemelor în care se aplică principiul lui Dirichlet și generalizările lui îl constituie spațiile măsurabile, formate din submulțimi ale unei mulțimi date (submulțimi măsurabile) și de o „măsură" pentru fiecare dintre aceste mulțimi.

Fie X o mulțime, $P(X)$ mulțimea părților sale și $m : P(X) \to [0, \infty)$ o funcție numită **măsură pe X**, cu proprietățile:

1) $m(\varnothing) = 0$;

2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

1.8. Observație. În teoria măsurii, în loc de $P(X)$ se ia o submulțime $P_m(X)$ formată din mulțimi măsurabile (în sens Lebesgue sau Jordan), dar pentru această lucrare considerăm că nu trebuie să dezvoltăm teoria cea mai generală, având în vedere că toate mulțimile cu care se lucrează în școală sunt mulțimi normale (măsurabile).

Fie $A_1, A_2, ..., A_n \in P(X)$. Să notăm: $I_k = \bigcup\limits_{1\le i_1<...<i_k\le n} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... A_{i_k}),\ k = \overline{1,n}.$

1.9. Propoziție. Pentru orice $A_1, A_2, ..., A_n \in P(X)$ este verificată egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k).$$

Demonstrație: Demonstrația este un util exercițiu de aplicare a principiului inducției matematice.

Pentru $n = 2$, obținem: $m(A_1) + m(A_2) = m(A_1 \cup A_2) + m(A_1 \cap A_2)$ adevărată din proprietatea 2) din definiția măsurii.

Presupunem relația adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$.

Fie $I'_k = \bigcup\limits_{1\le i_1<...<i_k\le n+1} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$. Avem: $I'_k = I_k \cup (A_{n+1} \cap I_{k-1})$ și obținem

$m(I'_k) = m(I_k) + m(A_{n+1} \cap I_{k-1}) - m(I_k \cap A_{n+1}),\ k = \overline{2,n}$, așadar:

$$m(I'_1) = m(I_1) + m(A_{n+1}) - m(I_1 \cap A_{n+1})$$
$$m(I'_2) = m(I_2) + m(I_1 \cap A_{n+1}) - m(I_2 \cap A_{n+1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m(I'_n) = m(I_n) + m(I_{n-1} \cap A_{n+1}) - m(I_n \cap A_{n+1}).$$

Atunci obținem: $\sum\limits_{k=1}^{n} m(I'_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(I_k) + m(A_{n+1}) - m(A_{n+1} \cap I_n),$

dar $I_n \cap A_{n+1} = I'_{n+1}$, deci $\sum_{k=1}^{n+1} m(I'_k) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k) + m(A_{n+1})$ și folosind ipoteza inducției, avem: $\sum_{k=1}^{n+1} m(I'_k) = \sum_{k=1}^{n+1} m(A_k)$.

1.10. Corolar. Dacă $I_{p+1} = \varnothing$, atunci: $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq p \cdot m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$.

(Dacă orice element din reuniune aparține la cel mult p submulțimi, atunci suma măsurilor lor nu depășește de p ori măsura reuniunii.)

Demonstrație: Avem, evident, $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{p+1} \supset \ldots \supset I_n$,
așadar $m(I_1) \geq m(I_2) \geq \ldots \geq m(I_p) \geq m(I_{p+1}) \geq \ldots \geq m(I_n)$,
deci $I_{p+1} = \varnothing \Rightarrow m(I_k) = 0$, $\forall k \geq p + 1$.
Folosind relația din propoziția anterioară, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{p} m(I_k) \leq p \cdot m(I_1) = p \cdot m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

1.11. Corolar (Principiul cutiei generalizat)

Dacă $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) > p \cdot m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$, există $i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}$ cu $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{p+1} \leq n$, astfel încât $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{p+1}} \neq \varnothing$.

(Dacă suma măsurilor submulțimilor $A_1, \ldots, A_n$ depășește de p ori măsura reuniunii lor, atunci există puncte în reuniune care sunt acoperite de cel puțin $p + 1$ submulțimi.)

1.12. Observație.

a) Dacă X este finită, se poate lua $m(A)$ = numărul elementelor mulțimii A.

b) Dacă $X \in \mathbb{R}$, pentru $a < b$ definim $m([a, b]) = b - a$.

c) Dacă $X \in \mathbb{R}^2$, putem lua ca măsură aria.

d) Dacă $X \in \mathbb{R}^3$, putem lua ca măsură volumul.

1.13. Observație. Pentru cazurile geometrice b), c), d), putem enunța cele două corolare sub forma:

b) Pe un segment de lungime L se pun n segmente de lungimi $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

• Dacă $L_1 + L_2 + \ldots L_n > L$, atunci există două segmente L_i și L_j care au cel puțin un punct comun.

• Dacă $L_1 + L_2 + \ldots L_n < L$, atunci există pe segmentul de lungime L un punct care nu se află pe niciunul dintre segmentele $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

• Dacă $L_1 + L_2 + \ldots L_n > p \cdot L$, atunci există $[p] + 1$ segmente care au un punct comun.

c) Pe o suprafață de arie S se așază n suprafețe de arii $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

• Dacă $S_1 + S_2 + \ldots S_n < S$, atunci există pe S un punct care nu se află în nicio suprafață S_i, $i = \overline{1,n}$.

• Dacă $S_1 + S_2 + ... S_n > p \cdot S$, atunci există $[p] + 1$ suprafețe care au un punct comun.

d) În interiorul unui corp de volum V se desenează n corpuri de volume $V_1, V_2, ..., V_n$.

• Dacă $V_1 + V_2 + ... V_n > V$, atunci există două corpuri V_i și V_j care au puncte comune.

• Dacă $V_1 + V_2 + ... V_n < V$, atunci există în V puncte care nu se află în niciun corp V_i, $i = \overline{1,n}$.

• Dacă $V_1 + V_2 + ... V_n > p \cdot V$, atunci există $[p] + 1$ corpuri care au un punct comun.

1.14. Exemplu. Oricare ar fi funcția $f : \{1, 2, ..., mn + 1\} \to \{1, 2, ..., m\}$, există $i_1, i_2, ..., i_{n+1}$ astfel încât $f(i_1) = f(i_2) = ... = f(i_{n+1})$.

Soluție: Fie $A_k = \{f(k)\}$, $k = \overline{1, mn+1}$. Atunci, $\bigcup_{k=1}^{m \cdot n+1} A_k \subset \{1, 2, ..., m\} \Rightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{m \cdot n+1} A_k\right) \le m$;

$\sum_{k=1}^{mn+1} m(A_k) = mn + 1$, deci $\sum m(A_k) > n\left[m\left(\bigcup_{k=1}^{m \cdot n+1} A_k\right)\right]$ și din Corolarul 1.11, există $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_{n+1}}$ cu $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_{n+1}} \ne \varnothing$, deci $f(i_1) = f(i_2) = ... = f(i_{n+1})$.

1.15. Exemplu. Punctele de pe suprafața unui hexagon regulat de latură 1 se colorează cu 6 culori. Arătați că există două puncte de aceeași culoare între care distanța este cel puțin 1.

Soluție: Distanța între oricare două vârfuri ale hexagonului este ≥ 1, deci dacă două dintre vârfuri ar fi de aceeași culoare am terminat. Dacă cele 6 vârfuri sunt de culori diferite, atunci oricum am colora centrul cercului distanța de la el la vârful de aceeași culoare este 1.

1.16. Exemplu. Într-un teren pătrat cu latura de 1 km se găsește o pădure cu 4500 stejari de diametrul 50 cm. Arătați că se poate săpa în pădure un lac de 10 m × 20 m fără a tăia niciun copac.

Soluție: Împărțim pădurea în suprafețe dreptunghiulare de dimensiuni 10,5 m × 20,5 m.

Formăm astfel 48 × 95 = 4560 dreptunghiuri. Cel puțin unul dintre dreptunghiuri nu conține niciun copac. În acest dreptunghi putem săpa lacul.

1.17. Observație. Bordarea dreptunghiurilor de dimensiuni 10 m × 20 m este necesară, căci, dacă centrul unui copac se află în afară, dar foarte aproape de margine, copacul intră în dreptunghi.

1.18. Exemplu. În interiorul unui triunghi se consideră 7 puncte. Arătați că se pot alege trei dintre ele care să formeze un triunghi de arie mai mică sau egală cu $\frac{1}{4}$.

Soluție: Împărțim triunghiul în două triunghiuri de arie $\frac{1}{4}$ și un paralelogram de arie $\frac{1}{2}$. Cel puțin una dintre cele trei zone conține cel puțin trei dintre punctele date. Dacă ele sunt în triunghiuri, am terminat. Dacă avem trei puncte în paralelogram, ele formează un triunghi de arie cel mult jumătate din aria paralelogramului, deci cel mult egală cu $\frac{1}{4}$.

PROBLEME DE ANTRENAMENT

1.A.1. Câte numere naturale mai mici sau egale cu 2013 sunt divizibile sau cu 2, sau cu 3?

Soluție: Fie $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, 2n \leq 2013\}$ și $B = \{3n \mid n \in \mathbb{N}, 3n \leq 2013\}$. Cum $(2, 3) = 1$, avem că $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbb{N}, 6n \leq 2013\}$. Evident, numărul căutat este $|A \cup B| =$ $= |A| + |B| - |A \cap B| = 1007 + 672 - 336 = 1343$.

1.A.2. Toți locuitorii dintr-un oraș vorbesc fie franceza, fie germana. Dacă 64% vorbesc franceza și 58% germana, câți vorbesc ambele limbi?

Soluție: Deoarece datele din ipoteză sunt exprimate procentual și nu se cunoaște numărul locuitorilor orașului, este bine să luăm ca număr de locuitori ai orașului 100 și rezultatul va fi un procent. Notăm cu E mulțimea locuitorilor orașului, cu F mulțimea vorbitorilor de limbă franceză și cu G mulțimea vorbitorilor de limbă germană. Atunci vom avea: $|E| = |F \cup G| = \text{card}(F) + \text{card}(G) - \text{card}(F \cap G)$, deci $\text{card}(F \cap G) = 64 +$ $+ 58 - 100 = 22$. Așadar, 22% dintre locuitori vorbesc ambele limbi.

1.A.3. Câte numere compuse din n cifre există, știind că acestea conțin doar cifrele 1, 2, 3, dar pe fiecare dintre acestea cel puțin o dată?

Soluție: Este necesar ca $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de număr are forma $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$ cu $a_k \in \{1, 2, 3\}$, $k = \overline{1, n}$. Deoarece fiecare cifră dintr-un astfel de număr se poate alege în trei moduri, cu principiul produsului, vor exista în total 3^n numere de n cifre formate doar cu cifrele 1, 2 și 3. Notăm în continuare cu A_i mulțimea numerelor de n cifre ca și mai sus care nu conțin pe i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Avem de calculat numărul: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 3^n - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3^n - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| -$ $- |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, unde $\overline{A_i}$ reprezintă mulțimea numerelor de n cifre care conține pe i. Deoarece $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^n$ (pentru fiecare cifră din număr sunt 2 posibilități de alegere), $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.