

Marius Perianu
Cătălin Stănică
Ștefan Smărăndoiu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a V-a

II

Algebră

I. Frații ordinare

I.1.	Fracții ordinare. Noțiuni introductive	8
I.2.	Clasificarea fracțiilor ordinare	12
I.3.	Fracții echivalente	17
I.4.	Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile	20
	Teste de evaluare	27
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	29
I.5.	Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor	31
I.6.	Compararea și ordonarea fracțiilor ordinare	34
I.7.	Adunarea fracțiilor ordinare	37
I.8.	Scăderea fracțiilor ordinare	41
	Teste de evaluare	45
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	47
I.9.	Înmulțirea fracțiilor ordinare	49
I.10.	Împărțirea fracțiilor ordinare	52
I.11.	Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri	54
	Teste de evaluare	57
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	59
I.12.	Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară	61
	Teste de evaluare	65
	Fișă pentru portofoliul individual (A4)	67
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a.	69

II. Frații zecimale

II.1.	Scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă zecimală. Transformarea unei fracții zecimale, cu un număr finit de zecimale nenule, într-o fracție ordinară	74
II.2.	Compararea, ordonarea, reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale. Aproximări	78
II.3.	Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule	83
	Teste de evaluare	89
	Fișă pentru portofoliul individual (A5)	91
II.4.	Înmulțirea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule	93
II.5.	Ridicarea la putere cu exponent natural a unei fracții zecimale care are un număr finit de zecimale nenule	97
	Teste de evaluare	100
	Fișă pentru portofoliul individual (A6)	101
II.6.	Împărțirea numerelor naturale cu rezultat fracție zecimală. Periodicitate	103
II.7.	Împărțirea a două fracții zecimale	108
II.8.	Ordinea efectuării operațiilor. Aproximări	113
	Teste de evaluare	118
	Fișă pentru portofoliul individual (A7)	119

II.9.	Media aritmetică a două sau mai multe fracții zecimale finite	121
II.10.	Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură	124
	Teste de evaluare	126
	Fișă pentru portofoliul individual (A8)	127
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	129
II.11.	Probleme cu caracter aplicativ	131
II.12.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	135

Geometrie

III. Elemente de geometrie

III.1.	Punctul. Dreapta. Planul	140
III.2.	Semidreapta. Semiplanul	145
III.3.	Segmentul de dreaptă	149
III.4.	Pozițiile relative a două drepte	151
III.5.	Lungimea unui segment	154
	Teste de evaluare	159
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	161
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	163
III.6.	Unghiul	165
III.7.	Clasificarea unghiurilor	170
III.8.	Probleme cu caracter aplicativ	172
III.9.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	175

IV. Unități de măsură

IV.1.	Unități de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări	178
IV.2.	Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului și a dreptunghiului. Transformări	181
IV.3.	Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic. Transformări	185
	Teste de evaluare	189
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	193
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	195
IV.4.	Probleme cu caracter aplicativ	197
IV.5.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	200

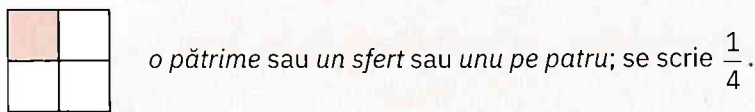
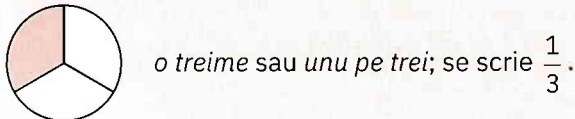
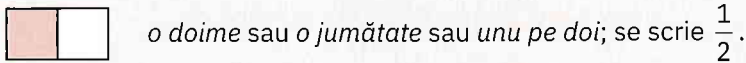
V. Subiecte pentru evaluările finale

	Variante de subiecte pentru teză	206
	Variante de subiecte pentru evaluarea finală	211
	Teste-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	215

Soluții	221
---------	-----

O parte dintr-un întreg, împărțit în părți egale, se numește *unitate fracționară*.

Exemple: Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:

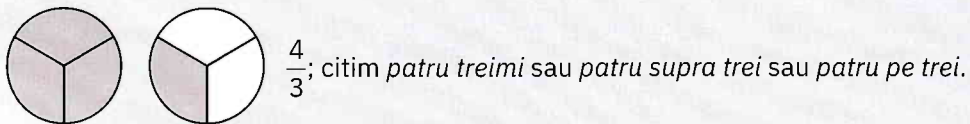
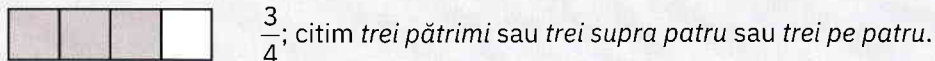


Una sau mai multe unități fracționare se numește *fracție*. Forma generală a fracției este $\frac{a}{b}$, unde a, b sunt numere naturale și $b \neq 0$.

Numărul a se numește *numărător* și arată câte unități fracționare s-au luat; numărul b se numește *numitor* și arată în câte părți egale a fost împărțit întregul; linia orizontală (sau oblică) se numește *linie de fracție*.

Fracția este o pereche de numere naturale, a și b , scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ sau a/b , $b \neq 0$.

Exemple: Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:



Exersare



1 Scrieți sub formă de fracție:

a o pătrime;

d o treime;

g o miime;

b o șesime;

e o sutime;

h o milionime;

c o zecime;

f trei optimi;

i două cincimi.

2 Citiți următoarele fracții:

a $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{40}, \frac{1}{19}, \frac{1}{17}, \frac{1}{1000000}$;

b $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{9}, \frac{3}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{10}{15}, \frac{16}{23}, \frac{24}{10}, \frac{15}{8}, \frac{13}{8}, \frac{12}{7}$.

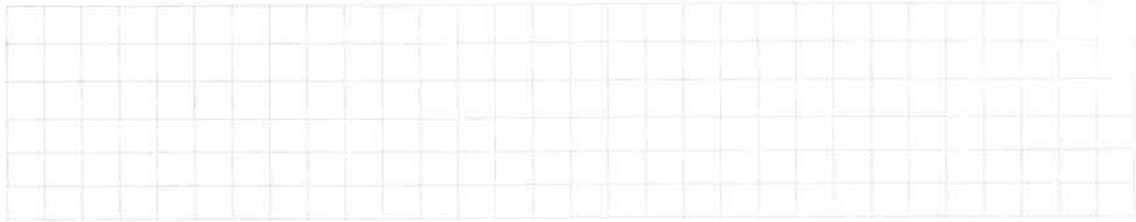
3 Reprezentați prin desene următoarele fracții: $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$.

4 Scrieți sub formă de fracție:

- a trei noimi; d opt zecimi; g cinci cincimi;
- b cinci șesimi; e patru cincimi; h treizeci și șapte de sutimi;
- c șapte pătrimi; f șase pătrimi; i patru optimi.

Rezolvare: a Trei noimi se scrie $\frac{3}{9}$.

Rezolvă problema chiar aici:



5 Reprezentați, în desene diferite, fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{8}, \frac{6}{8}, \frac{8}{8}$ din întregul următor:



6 Desenați un pătrat cu latura de 3 cm. Colorați cu roșu $\frac{2}{3}$ din el și cu verde $\frac{1}{3}$ din el.

7 Desenați un dreptunghi cu dimensiunile de 6 cm și 4 cm. Colorați din acest dreptunghi fracțiile $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{24}, \frac{3}{12}, \frac{1}{2}$.

8 Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen, ca în exemplul de la d:

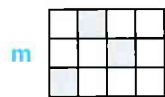
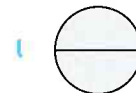
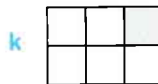
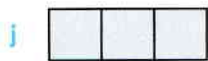
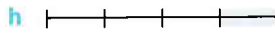
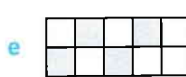
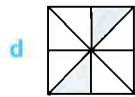
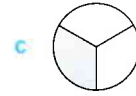
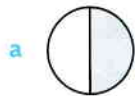


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
fracția				$\frac{2}{8}$									



Respect pentru oameni și cărți

- 9 Citiți următoarele fracții: $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{9}{12}, \frac{8}{7}, \frac{30}{42}, \frac{9}{16}, \frac{48}{50}, \frac{103}{207}, \frac{83}{96}, \frac{a}{b}, \frac{2x}{5y}$.
- 10 Folosind câte două dintre numerele 3, 5, 7, scrieți toate fracțiile posibile.
- 11 Folosind câte două dintre numerele 6, 4, 10, scrieți toate fracțiile posibile.
- 12 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale mai mici decât 6 și mai mari decât 3.
- 13 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime distincte cuprinse între 10 și 20.
- Rezolvare:** Numerele prime cuprinse între 10 și 20 sunt: 11, 13, 17 și 19. Frațiile care se pot scrie cu aceste numere sunt: $\frac{11}{13}, \frac{11}{17}, \frac{11}{19}, \frac{13}{11}, \frac{13}{17}, \frac{13}{19}, \frac{17}{11}, \frac{17}{13}, \frac{17}{19}, \frac{19}{11}, \frac{19}{13}, \frac{19}{17}$.
- 14 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime diferite, cuprinse între 20 și 40.
- 15 Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen, ca în exemplul **h**:

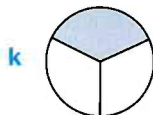
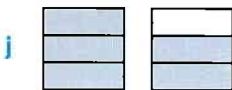
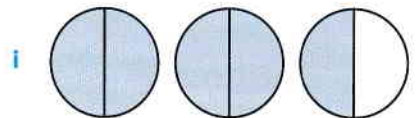
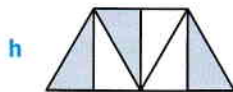
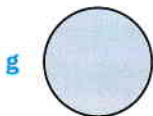
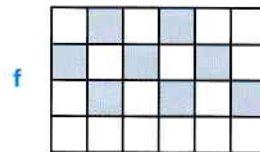
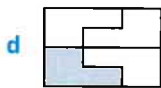
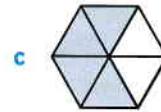
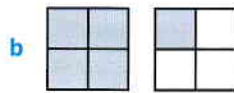
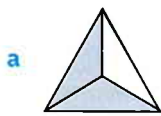


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
fracția								$\frac{3}{6}$			

- 16 Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, simultan, condițiile:
- numărătorul este o cifră pară, nenulă;
 - numitorul este o cifră cu cel puțin 3 mai mare decât numărătorul.

17 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a este divizor al lui 12 și b este divizor al lui 35.

18 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere prime cuprinse între 25 și 45, iar $a < b$.

Aprofundare



19 Fie fracția $\frac{23}{2x+1}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fracția are numitorul mai mic decât numărătorul.

Rezolvare: Avem $2x + 1 < 23 \Leftrightarrow 2x < 23 - 1 \Leftrightarrow 2x < 22 \mid : 2 \Leftrightarrow x < 11$. Cum x este pătrat perfect și $x < 11$, rezultă că x poate fi 0, 1, 4, 9.

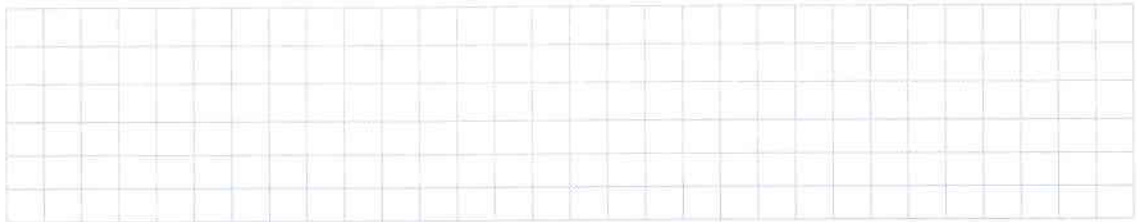
20 Fie fracția $\frac{3x+2}{98}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fracția are numitorul mai mare decât numărătorul.

21 Scrieți toate fracțiile $\frac{a}{b}$, unde a este pătratul unui număr natural, b este cubul unui număr natural și $0 < a < 37$, $0 < b < 38$.

22 Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, simultan, condițiile:

- numărătorul este o cifră impară;
- numitorul este o cifră pară nenulă mai mare decât numărătorul cu cel mult 5.

Rezolvă problema chiar aici:



23 Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{\overline{ab+5}}{\overline{ba+6}}$, care au proprietatea că suma dintre numărător și numitor este pătrat perfect.

Probleme de șapte stele



24 Determinați numărul perechilor de fracții $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ astfel încât $a \cdot a = b \cdot c = 6$.

25 Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{1}{\overline{ab+bc+ca}}$.



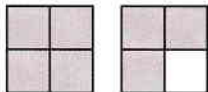

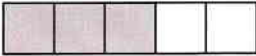
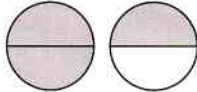
26 a Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{128}{ab}$.

- b Dintre fracțiile găsite la punctul anterior, aflați-le pe cele care au proprietatea că numărătorul și numitorul au cel puțin un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

Fie a și b două numere naturale, cu $b \neq 0$. Frația $\frac{a}{b}$ se numește:

- *echiunitară*, dacă $a = b$ (numărătorul este egal cu numitorul);
- *subunitară*, dacă $a < b$ (numărătorul este mai mic decât numitorul);
- *supraunitară*, dacă $a > b$ (numărătorul este mai mare decât numitorul).

Exemple:

Fracții echiunitare	Fracții subunitare	Fracții supraunitare
 $\frac{4}{4}$ (patru pătrimi)	 $\frac{1}{4}$ (o pătrime)	 $\frac{7}{4}$ (șapte pătrimi)
 $\frac{3}{3}$ (trei treimi)	 $\frac{3}{5}$ (trei cincimi)	 $\frac{3}{2}$ (trei doimi)
$\frac{8}{8}, \frac{11}{11}, \frac{23}{23}, \frac{100}{100}, \frac{205}{205}$	$\frac{7}{10}, \frac{1}{13}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{307}{3008}$	$\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{8}{6}, \frac{8}{7}, \frac{100}{25}$

Exersare



- 1 Completați numărătorul sau numitorul lipsă, astfel încât să obțineți fracții echiunitare:

$$\frac{6}{\square}, \frac{11}{\square}, \frac{\square}{13}, \frac{10}{\square}, \frac{13}{\square}, \frac{\square}{25}, \frac{\square}{103}$$

- 2 Dați câte trei exemple de:

- fracții echiunitare;
- fracții subunitare cu numărătorul 7;
- fracții subunitare cu numitorul 12;
- fracții supraunitare cu numitorul 10;
- fracții supraunitare cu numărătorul 20.

- 3 Scrieți fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare din șirul de fracții:

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{4}, \frac{3}{5}, \frac{11}{12}, \frac{9}{8}, \frac{9}{10}, \frac{14}{20}, \frac{31}{30}, \frac{90}{91}, \frac{103}{33}, \frac{405}{504}$$

4 În următorul șir de fracții, subliniați-le pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{17}{16}, \frac{23}{20}, \frac{41}{43}, \frac{70}{60}, \frac{51}{41}, \frac{83}{15}, \frac{99}{103}, \frac{86}{68}, \frac{15}{105}$$

5 În următoarea secvență de fracții, subliniați cu o linie fracțiile subunitare și cu două linii pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{10}, \frac{9}{10}, \frac{23}{15}, \frac{54}{27}, \frac{18}{41}, \frac{43}{43}, \frac{72}{71}, \frac{86}{86}, \frac{97}{79}$$

6 Aflați, în fiecare caz, numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt echiunitare:

a $\frac{x}{4}$; b $\frac{x+1}{7}$; c $\frac{x-2}{10}$; d $\frac{6}{2x}$;
 e $\frac{14}{x+2}$; f $\frac{23}{x-1}$; g $\frac{104}{20x+4}$; h $\frac{3x+2}{2x+3}$.

7 Determinați, în fiecare caz, valorile numărului natural x pentru care fracțiile următoare sunt supraunitare:

a $\frac{4}{x}$; b $\frac{x+1}{7}$; c $\frac{x-2}{10}$; d $\frac{6}{2x}$.

8 Aflați numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt subunitare:

a $\frac{x}{3}$; b $\frac{x+12}{17}$; c $\frac{11}{x-2}$; d $\frac{13}{4x}$.

9 Indicați patru numere naturale care, puse în locul lui x în fracția $\frac{x}{13}$, determină o fracție subunitară.

Rezolvare: Frația este subunitară dacă numărătorul este mai mic decât numitorul, adică $x < 13$. Prin urmare x poate fi unul dintre numerele 0, 1, 2, ..., 12. Putem lua oricare patru dintre aceste

valori; spre exemplu, pentru $x = 2, x = 5, x = 8$ și $x = 11$ se obțin fracțiile subunitare $\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{8}{13}$

și $\frac{11}{13}$.

10 Arătați că fracția $\frac{\overline{ab+bc+ca}}{\overline{ac+cb+ba}}$ este echiunitară.

11 Pentru câte numere naturale n fracția $\frac{8}{n+1}$ este supraunitară?

12 Se consideră fracțiile:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{3}{7}, \frac{8}{6}, \frac{7}{3}, \frac{6}{6}, \frac{9}{8}, \frac{8}{10}, \frac{8}{12}, \frac{9}{9}, \frac{11}{13}, \frac{14}{14}, \frac{15}{12}, \frac{23}{14}, \frac{39}{93}, \frac{74}{47}, \frac{103}{81}, \frac{205}{502}$$

Selectați dintre acestea:

a fracțiile subunitare; b fracțiile echiunitare; c fracțiile supraunitare.

Consolidare



13 Care dintre următoarele fracții sunt subunitare: $\frac{1}{7}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{6}, \frac{9}{8}, \frac{7}{8}, \frac{20}{3}, \frac{31}{15}$?

14 Care dintre următoarele fracții sunt supraunitare: $\frac{2}{5}, \frac{6}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{5}, \frac{3}{12}, \frac{13}{10}, \frac{71}{59}, \frac{60}{90}$?

Rezolvare: a) Frația $\frac{\overline{x6}}{3y}$ este subunitară dacă $\overline{x6} < \overline{3y}$, de unde $x = 1$ sau $x = 2$. Pentru $x = 1$,

rezultă $\overline{x6} = 16 = 4^2$, iar pentru $x = 2$, numărul $\overline{x6} = 26$ nu este pătrat perfect. Numerele prime de forma $\overline{3y}$ sunt 31 și 37. Frațiile căutate sunt $\frac{16}{31}$ și $\frac{16}{37}$.

29 Andrei scrie pe tablă toate fracțiile de forma $\frac{a}{8}$, cu proprietatea că $a \mid 8$. Bianca scrie toate fracțiile de forma $\frac{8}{b}$, cu proprietatea că $b \mid 8$. Corina scrie toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde $a \mid 4$ și $b \mid 6$. Determinați fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare scrise de fiecare dintre cei trei copii.

30 Fie șirul de fracții ordinare:

$$\frac{1}{2017}, \frac{2}{2016}, \frac{3}{2015}, \frac{4}{2014}, \dots, \frac{2015}{3}, \frac{2016}{2}, \frac{2017}{1}.$$

Scrieți fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare din acest șir.

Probleme de șapte stele



31 a Știind că fracția $\frac{\overline{ab5} + 12}{2ab + 123}$ este echiunitară, determinați $a + b$.

b Știind că fracția $\frac{\overline{ab5} + 12}{2ab + 123}$ este subunitară, determinați valoarea maximă a sumei $a + b$.

32 Arătați că fracția $\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2010}}{(32^{1608})^{251}}$ este supraunitară.

33 Fie secvența de fracții $\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{20}{24}$.

a Determinați numărul termenilor secvenței date.

b Determinați numărul fracțiilor subunitare din secvența dată.

c Determinați numărul fracțiilor supraunitare din secvența dată.

Analizând figura alăturată, constatăm că fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$ reprezintă aceeași



parte din întreg. Putem scrie $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.



Definiție. Frațiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt *echivalente* dacă $a \cdot d = b \cdot c$. Scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ nu sunt echivalente dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$. Scriem $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

Exemple: 1 $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, deoarece $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10$; 2 $\frac{1}{7} = \frac{4}{28}$, deoarece $1 \cdot 28 = 7 \cdot 4$;

3 $\frac{2}{11} = \frac{4}{22}$, deoarece $2 \cdot 22 = 11 \cdot 4$; 4 $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$, deoarece $16 \cdot 3 = 12 \cdot 4$;

5 $\frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$, deoarece $3 \cdot 3 \neq 6 \cdot 1$; 6 $\frac{3}{5} \neq \frac{5}{7}$, deoarece $3 \cdot 7 \neq 5 \cdot 5$.

Exersare



1 Verificați dacă următoarele perechi de fracții sunt echivalente și scrieți între ele semnul corespunzător (= sau \neq), ca în exemplele **a** și **b**.

a $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$;

b $\frac{1}{4} \neq \frac{5}{6}$;

c $\frac{2}{3} \square \frac{6}{9}$;

d $\frac{2}{7} \square \frac{10}{35}$;

e $\frac{2}{10} \square \frac{1}{5}$;

f $\frac{6}{5} \square \frac{6}{10}$;

g $\frac{8}{24} \square \frac{1}{3}$;

h $\frac{15}{25} \square \frac{3}{4}$;

i $\frac{15}{25} \square \frac{3}{5}$;

j $\frac{60}{80} \square \frac{2}{3}$;

k $\frac{70}{50} \square \frac{5}{7}$;

l $\frac{102}{24} \square \frac{17}{4}$.

2 Verificați dacă următoarele perechi de fracții sunt echivalente și scrieți între ele semnul corespunzător (= sau \neq):

a $\frac{1}{7} \square \frac{2}{14}$;

b $\frac{3}{5} \square \frac{3}{4}$;

c $\frac{21}{49} \square \frac{3}{7}$;

d $\frac{12}{30} \square \frac{5}{6}$;

e $\frac{2}{11} \square \frac{18}{99}$;

f $\frac{5}{13} \square \frac{20}{39}$;

g $\frac{6}{7} \square \frac{54}{6}$;

h $\frac{9}{5} \square \frac{36}{20}$;

i $\frac{6}{11} \square \frac{12}{33}$;

j $\frac{8}{12} \square \frac{20}{15}$;

k $\frac{100}{53} \square \frac{2}{1}$;

l $\frac{42}{5} \square \frac{84}{10}$.

3 Scrieți în căsuțele libere numere naturale astfel încât să obțineți fracții echivalente:

a $\frac{3}{5} = \frac{\square}{10}$;

b $\frac{7}{9} = \frac{21}{\square}$;

c $\frac{\square}{4} = \frac{12}{16}$;

d $\frac{11}{\square} = \frac{1}{7}$;

e $\frac{24}{14} = \frac{\square}{7}$;