Petre Năchilă Ana Cârstoveanu Ion Nica

MATEMATICĂ M2

Ghid pentru pregătirea examenului de Bacalaureat

- Itemi de antrenament
- 99 de teste
- Modele de subiecte date în perioada 2014-2019

Editura NOMINA

Cuprins

BREVIAR TEORETIC

CLASA a IX-a

ALGEBRĂ

I. Numere reale

- **Mulțimi finite. Reguli de numărare**

- O mulțime este ***finită*** dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.

- O mulțime este infinită dacă nu este finită.

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește ***mărginită*** dacă $\exists$ m, $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x \leq M$, $\forall x \in$ $\in A$.

Regula sumei: Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea „lui A sau B" poate fi realizată în (m + n) moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A se poate alege în m moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B) în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

- **Modulul unui număr real**: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*$

e) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

f) $|x| = a, a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$

g) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a], a > 0$

h) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty), a > 0$

- **Partea întreagă și partea fracționară**

- Se numește ***partea întreagă*** a numărului real x, notată [x], cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x. Deci $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Se numește ***partea fracționară*** a numărului real x, notată cu $\{x\}$, diferența dintre x și partea lui întreagă. Deci $\{x\} \in [0, 1)$ și $\{x\} = x - [x], \forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

a) $x \in [k, k + 1); k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = k$;

b) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = 0$;

c) $[x+n]=[x]+n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x+n\}=\{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;

e) $x-1<[x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- **Inegalități remarcabile** (pentru două numere reale)

  a) Inegalitatea mediilor: $\forall$ a, b > 0 avem:

$$\min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a, b);$$

  b) Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz:

$$a, b, x, y \in \mathbb{R}, (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2);$$

  c) Inegalitatea lui Bernoulli:

$$\alpha>0, r>-1, r \in \mathbb{Q}, (1+\alpha)^r > 1+r\alpha.$$

- **Principiul inducției matematice**

Propoziția p(n) este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ dacă sunt verificate următoarele două condiții:

1. Propoziția p(n) este adevărată pentru $n = 0$;
2. Din presupunerea că p(n) este adevărată pentru $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că este adevărată pentru $n = k + 1$.

Etapele inducției matematice

I. ***Verificarea propoziției***: pentru $n = 0$ verificăm dacă p(0) este adevărată;

II. ***Demonstrația***: $p(k) \to p(k+1)$. Presupunem că p(k) este adevărată și demonstrăm că $p(k+1)$ este de asemenea adevărată. Dacă cele două etape sunt validate, atunci are loc

Concluzia: Propoziția p(n) este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Formule care pot fi demonstrate prin inducție matematică:

a) $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*$;

c) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2, n \in \mathbb{N}^*$.

II. Progresii aritmetice și geometrice

- Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numește **progresie aritmetică** dacă $a_1 \in \mathbb{R}$ și $a_{n+1}=a_n+r, \forall n \geq 1, r \in \mathbb{R}$, unde r se numește rația progresiei aritmetice.

Proprietăți:

a) Formula termenului general este $a_n=a_1+(n-1)r, \forall n \geq 1$;

b) $(a_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$;

c) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_k+a_{n-k+1}, \forall k=\overline{1,n}$

d) $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}, \forall n \geq 1$.

- Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numește **progresie geometrică** dacă $b_1 \in \mathbb{R}^*$ și $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall\ n \geq 1$; $q \neq 0$ se numește rația progresiei geometrice.

Proprietăți:

a) Formula termenului general este $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall\ n \geq 1$;

b) $(b_n)_{n\geq 1}$ e progresie geometrică $\Leftrightarrow$ $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall\ n \geq 1$;

c) $b_1, b_2, ..., b_n$ sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = ... = b_k \cdot b_{n-k+1}$, $\forall\ k = \overline{1, n}$

d) $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1 \\ nb_1, \qquad q = 1 \end{cases}$.

III. Funcții

- Fie $A, B \neq \varnothing$, $f: A \to B$ se numește funcție definită pe A cu valori în B, dacă oricărui x din A i se asociază un unic element y din B.

A se numește ***domeniu de definiție***, B se numește ***codomeniu***, iar f se numește ***lege de corespondență***.

- Graficul unei funcții este mulțimea: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.
- ***Proprietăți***:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție **pară** dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție **impară**; $f(-x) = -f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție **periodică** dacă există $T > 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

d) $f: A \to B$, atunci $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește **imaginea funcției f**;

e) $f: A \to B$ este **crescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ sau dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$; (f este strict crescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

f) $f: A \to B$ este **descrescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ sau dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$; (f este strict descrescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

g) Graficul lui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are axă de simetrie dreapta $x = a$, dacă $f(a + x) = f(a - x)$ sau $f(x) = f(2a - x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

- Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$, funcția $g \circ f: A \to C$ se numește compunerea lui f cu g și $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Funcția $f: A \to B$ este inversabilă dacă există o funcție $g: B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Funcția g se numește inversa lui f și se notează cu f^{-1}.

- **Funcția de gradul I**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

Monotonia:

a) f strict crescătoare pentru $a > 0$;

b) f strict descrescătoare pentru $a < 0$;

Semnul:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Semn contrar lui a	0	semnul lui a

Graficul este o dreaptă.

- **Funcția de gradul II**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$

Forma canonică: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$;

Monotonia:

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

$\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ pentru $x = -\frac{b}{2a}$ și $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

$\max f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ pentru $x = -\frac{b}{2a}$ și $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$

Semnul:

$\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
f(x)	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)	semnul lui a	0	semnul lui a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	

Graficul este o parabolă cu vârful $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ și $x = -\frac{b}{2a}$ axă de simetrie.

- **Ecuații de gradul al II-lea**

$ax^2 + bx + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Descompunerea în factori: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- Natura rădăcinilor:

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$;

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$;

$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$.

- Relațiile lui Viete:

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$; $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$;

- Dacă se cunosc rădăcinile x_1 și x_2 ecuația de gradul al II-lea care are aceste soluții este:
$x^2 - Sx + P = 0$;
- Notăm $s_n = x_1^n + x_2^n$, atunci $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0$.

GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

I. Vectori în plan

- Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Atunci:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;

b) Dacă $M \in BC$, astfel încât $\dfrac{MB}{CM} = k \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$;

c) Dacă M este mijlocul lui BC $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

- Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ se numesc coliniari dacă au aceeași direcție; $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ coliniari $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$.

- În reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ considerăm punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x, y)$. Atunci:

a) $\vec{v} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ se numește vectorul de poziție al punctului M;

b) $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{v}|$;

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$;

d) Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\varphi$, unde $\varphi = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ se numește produsul scalar a 2 vectori în plan;

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$ pentru că $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 1$ și $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$;

f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$;

g) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

ITEMI DE ANTRENAMENT

Numere reale

1. Calculați:

a) $3^{\frac{3}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$;

b) $(13^2 - 5^2) : 6^2$;

c) $(1^0 + 2^0 + \ldots + 9^0) : 9^1$;

d) $55 \cdot 36 + 45 \cdot 36 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$;

e) $(0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}9) : 2 = \left(\frac{10}{3}\right)^{-1}$.

2. Arătați că:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$;

b) $x = 1{,}25 : 0{,}5 + \frac{3}{2}$ și $y = 3\frac{1}{2} + \frac{7}{2} - 2$ sunt numere naturale consecutive;

c) numărul $2\sqrt{3}\left(5\sqrt{6} - \sqrt{12}\right)$ este irațional;

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} - \frac{2}{\sqrt{24}}\right) : \frac{7\sqrt{6}}{12}$ este număr întreg;

e) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}} + \ldots + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{10}} > 0$;

f) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{9}} \in (0; 1)$.

3. Arătați că:

a) $(1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2 \in \mathbb{N}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \in \mathbb{N}$;

c) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{80}+\sqrt{120}\right) : \sqrt{20} + \left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}$ este număr natural nenul.

4. Arătați că:

a) $\sqrt[3]{64} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} \in \mathbb{N}$;

b) $\left(\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ este număr irațional.

5. a) Comparați numerele: $\sqrt{2}$ și $\sqrt[3]{3}$.

b) Ordonați crescător numerele: 2; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{3}$.

c) Ordonați crescător numerele: $\log_4 32$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{12}$.

6. Raționalizați fracția:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

7. Aflați a, b numere raționale pentru care:

a) $a+b\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$;

b) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right):\sqrt{3}+\left(a+\sqrt{2}\right)^2=(a-2)(a+2)+b$;

c) $\left(a+\sqrt{3}\right)^2-\left(b-\sqrt{3}\right)^2=(a-b)(a+b)$.

8. Raționalizați fracția: $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

9. Demonstrați că $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\in\mathbb{Z}$.

10. Demonstrați egalitatea: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

11. Arătați că: $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}\in\mathbb{N}$.

12. Care este cel mai mare dintre numerele: $\sqrt{2},\sqrt[3]{5},\sqrt[4]{7}$.

13. Calculați:

a) $\log_2 10-\log_2 5$; b) $\log_{\frac{1}{3}} 3+\log_{\frac{1}{3}} 27$;

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}-\log_4 16$; d) $\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5$;

e) $\log_3 9-\log_5 25$; f) $5^{\log_5 3}$;

g) $\log_9 3-\log_8 2$.

14. Determinați x în cazurile:

a) $\log_{\sqrt{2}} x=4$; b) $\log_x 216=3$; c) $\log_x \dfrac{1}{81}=4$; d) $\log_x \sqrt{8}=\dfrac{3}{4}$;

e) $\log_x \dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{2}$; f) $\log_{3\sqrt[3]{3}} x=-\dfrac{3}{2}$; g) $\log_{0,04}5=x$; h) $\log_x 0,125=-2$.

15. Calculați:

a) $2^{\log_2 4}$; b) $3^{\log_3 6}$; c) $25^{\log_5 3}$; d) $36^{\log_6 2}$;

e) $81^{0,5\log_3 7}$; f) $\log_2(\log_4 16)$; g) $3^{2-\log_3 2}$; h) $4^{\sqrt{\log_4 5}}-5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

16. Să se logaritmeze expresiile următoare pentru $a>0$, $b>0$:

a) $\dfrac{4ab^3}{5\sqrt{2ab}}$; b) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}}\right)^4$; c) $\dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a}}}{b\sqrt{a\sqrt{b}}}$; d) $\sqrt{a^{2+\sqrt{b}}}$; e) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}$.

17. Determinați valorile reale ale lui x pentru care sunt definiți următorii logaritmi:

a) $\log_2(x^2-2x)$; b) $\log_2(-2x^2+4)$; c) $\log_5(x^4-5x^2+4)$;

d) $\log_6(-x^2+8x-16)$; e) $\log_2(\log_3 x)$; f) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$;

g) $\log_{\sqrt{2}}\left(4-x^2\right)$; h) $\log_a(\log_a x)$; i) $\log_a(\log_b x)$;

j) $\log_{x-2}(x-1)$; k) $\log_{2-|x|}(x^2-2)$; l) $\log_{x+1}(4-x^2)$.

18. Arătați că $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\ldots\cdot\log_{2021}2020<1$.

19. Arătați că $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_2 2021}+\dfrac{1}{\log_3 2021}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{2020}2021}}=\log_{2020!}2021$.

20. Calculați $\dfrac{\log_5 18-\log_5 2}{\log_5 3}$.

21. Calculați: $\log_{21}3\cdot\log_7 3\cdot\log_{\sqrt{3}}7\cdot(1+\log_3 7)$.

22. Arătați că $\log_2 4+\log_5 25<\sqrt{49}$.

23. Arătați că $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=1$.

24. Arătați că $\log_5\dfrac{2}{1}+\log_5\dfrac{3}{2}+\log_5\dfrac{4}{3}+\ldots+\log_5\dfrac{25}{24}\in\mathbb{N}$.

25. Arătați că: $\dfrac{\log_2 3}{\log_{14}3}=1+\log_2 7$.

26. Dacă se notează $\log_3 2=a$, arătați că $\log_3 24=1+3a$.

27. Determinați valoarea produsului $\lg(\operatorname{tg}40°)\cdot\lg(\operatorname{tg}41°)\cdot\ldots\cdot\lg(\operatorname{tg}45°)$.

28. Determinați partea întreagă a numărului $\log_3 521$.

29. Arătați că $3\in(\log_2 7,\sqrt[3]{30})$.

30. Calculați $e^{\ln 10}-\sqrt[3]{125}$.

31. Calculați $1000^{\lg 3}-\sqrt[5]{-32}$.

32. Determinați $m, n\in\mathbb{Q}$ cu proprietatea $(m-2n+4)+(3m-2n)\sqrt{3}=0$.

33. Determinați $a, b\in\mathbb{Z}$ dacă $1+\sqrt{3}$ verifică ecuația $ax^2+bx+12=0$.

34. Rezolvați ecuația $[3x-2]=4$.

35. Fie $x, y\in[3, 5]$. Demonstrați că $a\in[3, 5]$, unde $a=xy-4(x+y)+20$.

36. Demonstrați inegalitatea $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$, $\forall\, a, b, c\in\mathbb{R}$.

37. Folosind metoda inducției matematice, demonstrați că:

a) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$;

c) 17 divide $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

38. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, arătați că $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

39. a) Găsiți două numere iraționale a și b pentru care $a + b \in \mathbb{Q}$.

b) Găsiți două numere iraționale c și d pentru care $c \cdot d \in \mathbb{Q}$.

c) Arătați că suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.

d) Arătați că produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este un număr irațional.

40. Considerăm suma $S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați S_n.

c) Arătați că $S_n < 1$ și determinați cel mai mare $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $S_n < \frac{2009}{2010}$.

41. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Verificați că $0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ și $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

b) Verificați că, dacă $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, atunci $x + y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ și $x \cdot y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

c) Arătați că $\sqrt{6+2\sqrt{5}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

d) Dați exemplu de un element din $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ care are inversul tot în $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

42. Se consideră numărul real $\omega = 1 + \sqrt{2}$ și mulțimea $M = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Notăm $\overline{\omega} = 1 - \sqrt{2}$ și cu $G = \{z \in M \mid \exists\, y \in M$ astfel încât $y \cdot z = 1\}$.

a) Verificați că $0 \in M$ și $1 \in M$.

b) Verificați că $\omega^2 = 2\omega + 1$.

c) Dacă $z, y \in M$, atunci $z + y \in M$ și $z \cdot y \in M$.

d) Arătați că $(a + b\omega)(a + b\overline{\omega}) \in \mathbb{Z}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

e) Arătați că $\omega \in G$.

f) Arătați că G are cel puțin 2010 elemente.

g) Arătați că $\omega^{2009} \notin \mathbb{Q}$.

Progresii

1. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică în care $a_1 = 2$ și $r = 3$. Aflați al zecelea termen.

2. Dacă $(a_n)_{n\geq1}$ este o progresie aritmetică cu $a_2 = 5$ și $a_4 = 13$, determinați a_1 și rația.

3. Fie $(b_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică cu $b_1 = -2$ și $b_2 = 0$. Calculați suma primilor 10 termeni.

4. Dacă într-o progresie aritmetică $a_1 = -1$ și $S_{10} = 80$, determinați rația progresiei.

5. Determinați al zecelea termen al șirului 1, 5, 9, 13, … .

6. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_2 + a_4 + a_6 = 27$, iar $a_5 - a_3 = 6$. Determinați a_1 și r.

7. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1 = 1$ și $a_5 = 21$. Calculați:
a) a_{2017};
b) $a_1 + a_2 + ... + a_{20}$;
c) soluțiile ecuației $\sqrt{x + a_1} = x - a_2$.

8. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ progresia aritmetică cu rația r și cu $a_2 + a_{40} = 16$ și $a_1 \cdot a_5 = 28$. Calculați a_1 și r.

9. Găsiți primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_2 + a_4 = 16$ și $a_1 \cdot a_5 = 28$.

10. Aflați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice:
a) 2; 5; $3x - 1$; b) 4; $2x + 1$; $2 - x$; c) $5 - x$; $3x + 2$; $2x - 1$.

11. Calculați următoarele sume:
a) $1 + 2 + 3 + … + 2017$; b) $2 + 4 + 6 + … + 250$; c) $1 + 3 + 5 + … + 111$;
d) $1 + 4 + 7 + … + 76$; e) $3 + 7 + 11 + … + 39$; f) $2 + 7 + 12 + … + 2017$.

12. Fie $(b_n)_{n\geq1}$ o progresie geometrică cu termenii pozitivi.
a) Dacă $b_1 = 2$ și $q = 3$, aflați b_2 și b_5.
b) Dacă $b_2 = 4$ și $q = 2$, aflați b_1, b_3 și $b_1 + b_2 + b_3$.
c) Dacă $b_2 = \frac{1}{2}$ și $b_4 = \frac{1}{8}$, aflați b_3, b_1 și q.

13. Dacă rația unei progresii geometrice este 3, iar al treilea termen este –54, determinați primul termen al progresiei și suma primilor 10 termeni.

14. Dacă într-o progresie geometrică, $b_6 = 8 \cdot b_3$, aflați rația.

15. Se dă șirul 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; … . Aflați termenii de pe locul 8 și respectiv 20.

16. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie geometrică. Dacă $a_4 + a_1 = \frac{7}{16}$ și $a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}$, să se precizeze a_1 și q (rația).

17. Primul termen al unei progresii geometrice este 5 și suma primilor 4 termeni este 75. Determinați progresia.