

## 3.2. Semidreapta. Semiplanul

### *Semidreapta*

O semidreaptă se reprezintă în desen, spre exemplu ca în figura următoare:



Spre deosebire de o dreaptă, pe care o considerăm prelungită la nesfârșit în ambele părți, semidreapta o considerăm prelungită la nesfârșit într-o singură parte și limitată în cealaltă parte.

**Definiție:** **Semidreapta** este mulțimea tuturor punctelor unei drepte situate de aceeași parte a unui punct al acestei drepte, punct ce se numește **originea semidreptei**. La fel ca și dreapta, semidreapta se notează cu două litere mari ale alfabetului.

**Primul punct** din notația semidreptei indică **originea**, iar **al doilea punct** indică un punct oarecare de pe semidreaptă.

**Definiție:** Semidreapta care își conține originea se numește **semidreaptă închisă**.

**Exemplu:**   
A horizontal line with a point labeled 'A' at the left end and a point labeled 'B' further to the right. A small square bracket is drawn at point A, indicating that the line starts there and extends to the right.

Notăm:  $[AB$ ; Citim: semidreapta închisă  $AB$ .

- $A$  indică originea semidreptei și conform definiției,  $A \in [AB$ .
- $B \in [AB$ , conform definiției.

**Definiție:** Semidreapta care nu-și conține originea se numește **semidreaptă deschisă**.

**Exemplu:**   
A horizontal line with a point labeled 'A' at the left end and a point labeled 'B' further to the right. A small square bracket is drawn at point B, indicating that the line starts there and extends to the right.

Notăm:  $(AB$ ; Citim: semidreapta deschisă  $AB$ .

- $A$  indică originea semidreptei și conform definiției,  $A \notin (AB$ ;
- $B \in (AB$ , conform definiției.

**Observații:** 1)  $[AB \subset AB$ ;  $(AB \subset AB$ .

2)  $[AB = (AB \cup \{A\}$ ;  $(AB = [AB - \{A\}$ .

### *Semidrepte opuse. Semidrepte identice*

Dreapta  $AB$  este **suportul** semidreptelor. Orice punct al unei drepte determină pe dreapta respectivă două semidrepte, numite **semidrepte opuse**.

**Exemplu:**   
A horizontal line with three points labeled 'A', 'O', and 'B' from left to right. Point 'O' is in the middle. Small square brackets are drawn at point 'O', indicating that the line starts there and extends to the left and right.

Semidreptele  $[OA$  și  $[OB$  sunt semidrepte închise, opuse.

Semidreptele  $(OA$  și  $(OB$  sunt semidrepte deschise, opuse.

**Definiție:** Două semidrepte formate din aceleași puncte se numesc **semidrepte identice**.



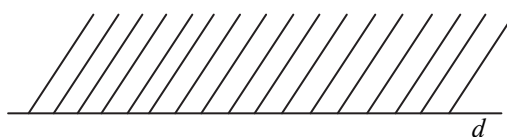
Semidreptele  $[AO$  și  $[AB$  sunt semidrepte închise, identice.

Semidreptele  $(AO$  și  $(AB$  sunt semidrepte deschise, identice.

**Definiție:** Două semidrepte care nu au aceleași puncte se numesc semidrepte **distinc-te (diferite)**.

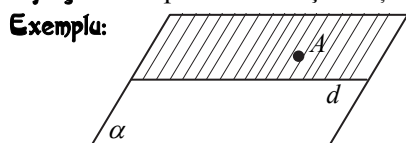
### Semiplanul

**Definiție:** **Semiplanul** este mulțimea tuturor punctelor unui plan situate de aceeași parte a unei drepte inclusă în acel plan.



Se notează cu o literă mică și o literă mare din alfabet. Litera mică din notația semiplanului indică dreapta care separă punctele planului și se numește **frontiera semiplanului**, iar litera mare indică un punct oarecare al semiplanului.

**Definiție:** Semiplanul care își conține frontiera se numește **semiplan închis**.

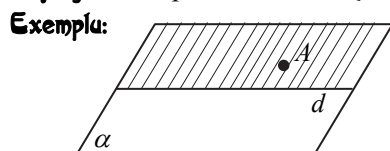


Notăm:  $[dA$  ; Citim: semiplanul închis  $dA$

- $d$  indică frontiera semiplanului și conform definiției,  $d \subset [dA$ .

- $A \in [dA$ , conform definiției.

**Definiție:** Semiplanul care nu își conține frontiera se numește **semiplan deschis**.



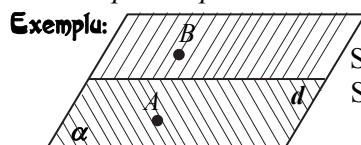
Notăm  $(dA$  ; Citim: semiplanul deschis  $dA$

- $d$  indică frontiera semiplanului și conform definiției  $d \not\subset (dA$ ;

- $A \in (dA$ , conform definiției.

### Semiplane opuse. Semiplane identice

Orice dreaptă inclusă într-un plan separă punctele din acel plan în două semiplane, numite **semiplane opuse**.

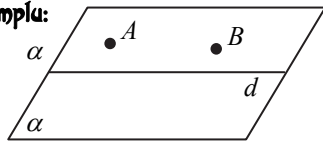


Semiplanele  $[dA$  și  $[dB$  sunt semiplane închise, opuse.

Semiplanele  $(dA$  și  $(dB$  sunt semiplane deschise, opuse.

**Definiție:** Două semiplane formate din aceleași puncte se numesc **semiplane identice**.

**Exemplu:**

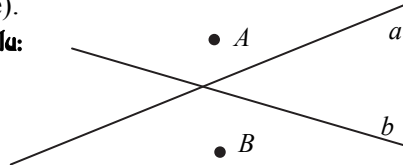


Semiplanele  $[dA$  și  $[dB$  sunt semiplane închise, identice și notăm  $[dA = [dB$ .

Semiplanele  $(dA$  și  $(dB$  sunt semiplane deschise, identice și notăm  $(dA = (dB$ .

**Definiție:** Două semiplane care nu au aceleași puncte se numesc **semiplane diferite (distincte)**.

**Exemplu:**



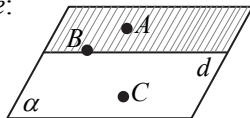
Semiplanele  $[aA$  și  $[bB$  sunt semiplane închise, diferite și notăm  $[aA \neq [bB$ .

Semiplanele  $(aA$  și  $(bB$  sunt semiplane deschise, diferite și notăm  $(aA \neq (bB$ .

### Probleme rezolvate

1. Desenați un plan  $\alpha$ , o dreaptă  $d$ ,  $d \subset \alpha$ ,  $A \in \alpha$ ,  $A \notin d$ ,  $B \in d$ ,  $C \in \alpha$ ,  $C \notin [dA$  și hașurați semiplanul  $[dA$ .

*Soluție:*



2. Fie punctele diferite  $A, B, C, D$ . Ilustrați grafic următoarele situații geometrice:

a)  $[AB = [AC$ ,  $D \in AB$ ,  $D \notin [AB$ ;

b)  $(AD = (AC$ ,  $B \in AC$ ,  $B \notin (AC$ .

*Soluție:* a) Avem două situații:

1)  $B$  este situat între  $A$  și  $C$ :

2)  $C$  este situat între  $A$  și  $B$ :

b) Avem două situații:

1)  $D$  este situat între  $A$  și  $C$ :

2)  $C$  este situat între  $A$  și  $D$ :

3. Fie punctele diferite  $A, B, C, D$  și o dreaptă  $d$ . Ilustrați grafic următoarele situații geometrice:

a) dreapta  $AB = d$ ,  $D \in (dC$ ;

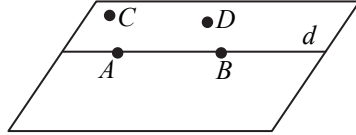
b) dreapta  $AB = d$ ,  $D \notin [dC$ ;

c) dreapta  $CD = d$ ,  $B \in (dA$  și  $[AB \cap d \neq \emptyset$ ;

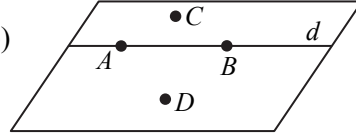
d) dreapta  $CD = d$ ,  $B \notin [dA$  și punctele  $A, B, C$  coliniare.

Soluție:

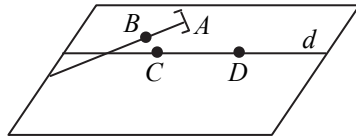
a)



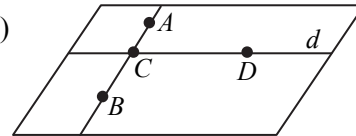
b)



c)



d)



## Probleme propuse

\*

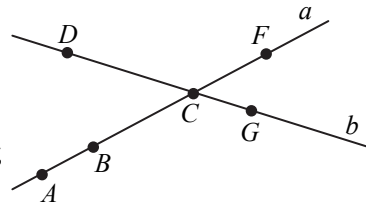
1. Folosind desenul de mai jos, precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:



- |  |                  |
|--|------------------|
| a) $[MN$ este o semidreaptă deschisă;                | b) $M \in [MN$ ; |
| c) $(MN$ este o semidreaptă deschisă;                | d) $M \in (MN$ ; |
| e) $[QP$ și $[QN$ sunt semidrepte închise, identice; | f) $M \in [QP$ ; |
| g) $(PN$ și $(PQ$ sunt semidrepte deschise, opuse;   | h) $M \in (PQ$ . |

2. Folosind notațiile din figura alăturată, stabiliți care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:

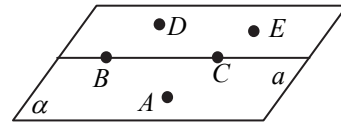
- |                          |                      |                  |
|--------------------------|----------------------|------------------|
| a) $A \in (AB$ ;         | b) $D \notin (AB$ ;  | c) $A \in [AB$ ; |
| d) $F \notin [AB$ ;      | e) $[BC \neq [CF$ ;  | f) $(AB = (AF$ ; |
| g) $[AB \not\subset a$ ; | h) $[DG \subset b$ . |                  |



3. Folosind notațiile din figura alăturată, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

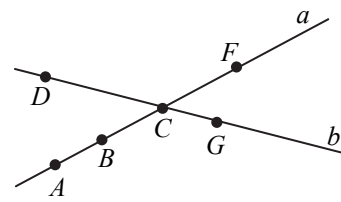
a)  $[aD$  este semiplanul închis determinat de dreapta  $a$  și punctul  $D$ ;

- |   |                  |                          |
|---|------------------|--------------------------|
| b) $E \in [aD$ ;                                    | c) $A \in (aD$ ; | d) $a \not\subset [aA$ ; |
| e) $(aD$ și $(aA$ sunt semiplane deschise, opuse;   |                  |                          |
| f) $(aD$ și $(aE$ sunt semiplane închise, identice. |                  |                          |



4. Folosind notațiile din figura de mai jos, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- |   |                     |                  |
|---|---------------------|------------------|
| a) Punctele $A$ și $B$ sunt de aceeași parte a dreptei $b$ ;      |                     |                  |
| b) Punctele $D$ și $G$ sunt de o parte și de alta a dreptei $a$ ; |                     |                  |
| c) $B \in [bA$ ;  | d) $B \notin (bA$ ; | e) $F \in (bA$ ; |
| f) $A \in [bB$ ;  | g) $B \in (bF$ ;    | h) $F \in (aD$ . |



5. Completați cu notația potrivită:

- a)  $(AB \cup \{A\} = \dots$ ;      b)  $[AB \setminus \{A\} = \dots$ ;      c)  $(AB \cup \{B\} = \dots$ ;  
 d)  $(dA \cup d = \dots$ ;      e)  $[dA \setminus d = \dots$ ;      f)  $(dA \cup \{A\} = \dots$ .

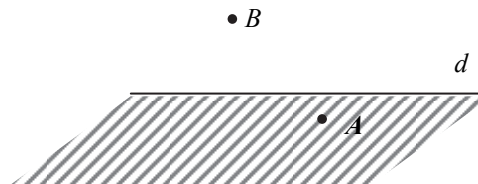
6. Desenați două puncte distincte  $A$  și  $B$ . Construiți cu o culoare semidreapta  $[BA$  și cu altă culoare semidreapta  $[AB$ .

7. Desenați un plan  $\alpha$ , o dreaptă  $d \subset \alpha$  și  $A \in \alpha$ ,  $A \notin d$ . Hașurați semiplanul închis  $[dA$  determinat de dreaptă și punct.

8. Desenați un plan  $\alpha$ , o dreaptă  $d \subset \alpha$ ,  $A \in \alpha$ ,  $A \notin d$ ,  $B \in d$ ,  $C \in \alpha$ ,  $C \notin dA$ , și semidreapta  $(BC$ .

\*\*

9. În figura alăturată s-a hașurat semiplanul determinat de dreapta  $d$  și punctul  $A$ . Trasați dreapta  $AB$  și notați cu  $O$  intersecția dreptelor  $d$  și  $AB$ . Precizați cine este:



- a) intersecția dintre semiplanul deschis  $(dA$  și dreapta  $AB$ ;  
 b) reuniunea semidreptelor  $[OA$  și  $[OB$ .

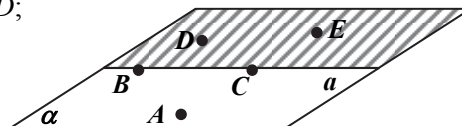
10. Folosind notațiile din figura de mai jos, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



- a)  $[AB = [AD$ ;      b)  $(BC = BD$ ;      c)  $(DE = (ED$ ;  
 d)  $[AB \subset AB$ ;      e)  $[AB \subset [AD$ ;      f)  $[DE \not\subset BC$ ;  
 g)  $(BC \cup \{B\} = [BC$ ;      h)  $[CA \cup (CD = d$ ;      i)  $[AB \cup (BE = (AC$ ;  
 j)  $[BA \cap [BE = \{B\}$ ;      k)  $[BA \cap [BE = \emptyset$ ;      l)  $CD \setminus [CD = (CA$ .

11. Folosind notațiile din figura de mai jos, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $[aD = [aE$ ;      b)  $(aD = (aA$ ;      c)  $BC \subset [aD$ ;  
 d)  $BC \not\subset [aA$ ;      e)  $(aA \cup BC = [aA$ ;  
 f)  $\{D\} \cup [aD = (aE$ ;      g)  $[aA \cap [aE = a$ ;  
 h)  $(aD \cap [aE = a$ ;      i)  $[aD \setminus a = (aE$ .



12. Considerăm punctele diferite  $A, B, C, D, E$ . Ilustrați grafic:

- a)  $B$  și  $C$  de aceeași parte a punctului  $A$ ;  
 b)  $B$  și  $C$  de o parte și de alta a punctului  $A$ ;  
 c)  $[AB = [AC$ ; d)  $[AB \neq [AC$ ; e)  $(AD = (AE$ ; f)  $[AB \neq [CD$  și oricare trei dintre punctele  $A, B, C, D$  sunt necoliniare;  
 g)  $(AB \neq (CD$  și trei dintre puncte sunt coliniare.

13. Fie punctele diferite  $A, B, C, D$  și o dreaptă  $d$ , ilustrați grafic următoarele situații geometrice:

- a) dreapta  $AB = d$  și  $C \in [dD$ ;      b) dreapta  $AB = d$  și  $C \notin [dD$ ;  
 c) dreapta  $CD = d$  și  $A \in [dB$ ;      d) dreapta  $CD = d$  și  $A \notin [dB$ .

14. Fie punctele diferite  $A, B, C, D, E$  și o dreaptă  $a$ . Ilustrați grafic următoarele situații geometrice:

- dreapta  $AB = a, D \in [aC$  și  $[BE \subset [aC$ ;
- dreapta  $AB = a, D \notin [aC$  și  $[CE \subset (aC$ ;
- dreapta  $CD = a, B \in [aA$  și  $[DE \not\subset [aA$ ;
- dreapta  $CD = a, B \notin [aA$  și  $[AE \subset [aA$ .

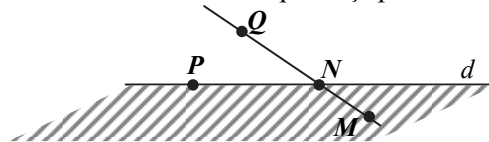
\*\*\*

15. Fie  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2015}$  puncte într-un plan, oricare trei dintre ele fiind necoliniare. Aflați numărul cel mai mare de puncte care se pot găsi în același semiplan determinat de:

- o dreaptă ce conține două dintre punctele date;
- o dreaptă oarecare.

16. În figura de mai jos s-a hașurat semiplanul determinat de dreapta  $d$  și punctul  $M$ . Determinați:

- $(MN \cup [NQ$ ;
- $MN \setminus [NQ$ ;
- $[MQ \cup (NQ$ ;
- $MQ \cap d$ ;
- $MQ - [dM$ ; f)  $(dM \cap MQ$ ; g)  $MQ - (dM$ .



17. În figura de mai jos se consideră punctele coliniare  $A, B, C, D, E$ . Completați tabelul alăturat în felul următor: veți scrie „da” în rubrica corespunzătoare dacă punctul aparține semidreptei și „nu” în caz contrar.



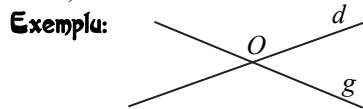
$\in$	$[AB$	$(BC$	$[CD$	$(BA$	$[ED$
$A$					
$B$					
$C$					
$D$					
$E$					

### 3.3. Pozițiile relative a două drepte

#### Drepte coplanare

Două drepte sunt **coplanare** dacă există un plan care să le conțină.

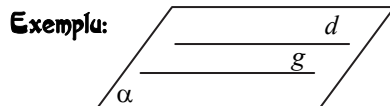
**Definiție.** Două drepte care au un singur punct comun se numesc drepte **concurente** (secante).



Notăm:  $d \cap g = \{O\}$ ; Citim: dreptele  $d$  și  $g$  sunt concurente în punctul  $\{O\}$ .

**Observație:** Dacă trei sau mai multe drepte au un punct comun, ele se vor numi drepte concurente.

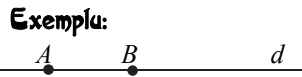
**Definiție:** Două drepte coplanare, care nu au nici un punct comun se numesc **drepte paralele**.



Notăm:  $d \parallel g$  sau  $d \cap g = \emptyset$ ;  
Citim: dreptele  $d$  și  $g$  sunt paralele.

**Observație:** Dacă două drepte  $d$  și  $g$  nu sunt paralele notăm  $d \not\parallel g$ .

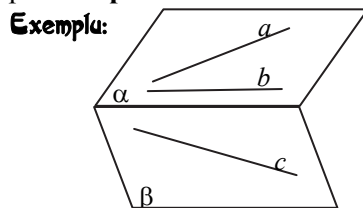
**Definiție:** Două drepte care au toate punctele comune se numesc drepte **identice** (confundate sau suprapuse).



Notăm:  $d = AB$ ; Citim: dreptele  $d$  și  $AB$  sunt identice.

#### Drepte necoplanare

**Definiție:** Două drepte pentru care nu există un plan care să le conțină se numesc drepte **necoplanare**.



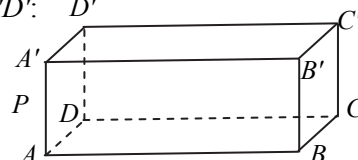
În figura alăturată, avem:

- dreptele  $a$  și  $b$  sunt coplanare ( $a, b \subset \alpha$ );
- dreptele  $a$  și  $c$  sunt necoplanare ( $a \subset \alpha, c \subset \beta$ )
- dreptele  $b$  și  $c$  sunt necoplanare.

**Observație:** Dacă  $d \cap g = \emptyset$  atunci  $d \parallel g$  sau  $d$  și  $g$  sunt drepte necoplanare.

**Exemplu:** În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$ :

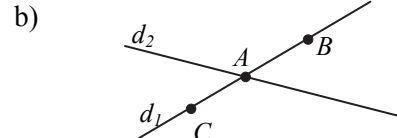
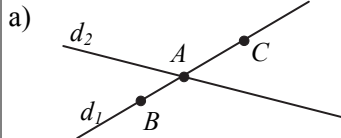
- $AA'$  și  $D'C'$  sunt drepte necoplanare;
- $AB$  și  $BC$  sunt drepte concurente în  $B$ ;
- $BC$  și  $B'C'$  sunt drepte paralele;
- $AP$  și  $AA'$  sunt drepte identice.



### Probleme rezolvate

1. Desenați două drepte  $d_1$  și  $d_2$  concurente în punctul  $A$  astfel încât punctele  $B$  și  $C$  sunt distincte, diferite de punctul  $A$  și sunt situate în semiplane diferite determinate de dreapta  $d_2$ .

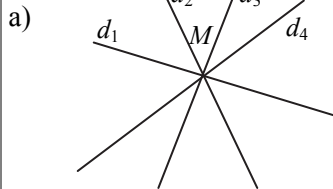
Soluție: Avem două situații:



2. a) Desenați patru drepte diferite și concurente în punctul  $M$ .

b) Mai există și alte drepte concurente în punctul  $M$ ?

Soluție:



b) Există o infinitate de drepte concurente în punctul  $M$ .

3. Desenați un plan  $\alpha$ , dreptele  $d_1, d_2, d_3$  astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

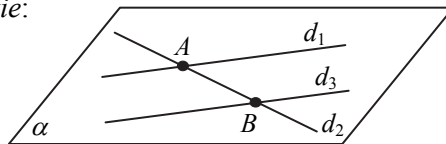
1)  $d_1 \subset \alpha, d_2 \subset \alpha, d_3 \subset \alpha$ ;

2)  $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ ;

3)  $d_3 \parallel d_1$ ;

4)  $d_2 \cap d_3 = \{B\}$ .

Soluție:



4. În figura alăturată,  $ABCD$  reprezintă o piramidă cu baza triunghiul  $ABC$ . Fiecare muchie a piramidei determină o dreaptă și fiecare față a piramidei determină un plan.

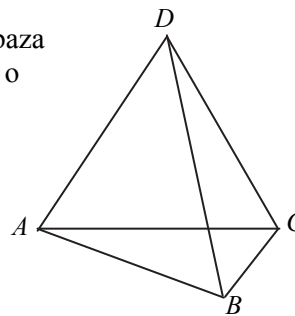
a) Scrieți toate dreptele reprezentate în figură și determinați numărul lor;

b) Câte plane sunt reprezentate în figură?

c) Scrieți toate perechile de drepte concurente și punctele lor de intersecție;

d) Scrieți toate perechile de drepte necoplanare;

e) Scrieți toate dreptele concurente în  $A, B, C$  respectiv  $D$  și scrieți notația corespunzătoare.





# CUPRINS

## ALGEBRĂ

### CAPITOLUL 1. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Operații cu numere naturale; reguli de calcul cu puteri .....	5
1.2. Divizor, multiplu. Criteriile de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3, 9 .....	11
1.3. Numere prime și numere compuse.....	17
1.4. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime.....	20
1.5. Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$ .....	23
1.6. Divizori comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.d.c.; numere prime între ele.....	26
1.7. Multipli comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.m.c.; relația dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ....	30
1.8. Probleme simple care se rezolvă folosind divizibilitatea .....	33
<i>TESTE DE EVALUARE</i> .....	35

### CAPITOLUL 2. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE POZITIVE

2.1. Frații echivalente; fracție ireductibilă; noțiunea de număr rațional; forme de scrierea unui număr rațional; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ .....	37
2.2. Adunarea numerelor raționale pozitive; scăderea numerelor raționale pozitive.....	44
2.3. Înmulțirea numerelor raționale pozitive.....	51
2.4. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr rațional pozitiv; reguli de calcul cu puteri .....	56
2.5. Împărțirea numerelor raționale pozitive.....	60
2.6. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive .....	64
2.7. Media aritmetică ponderată a mai multor numere raționale pozitive.....	68
2.8. Ecuații .....	72
2.9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor .....	76
<i>TESTE DE EVALUARE</i> .....	80

## **GEOMETRIE**

### **CAPITOLUL 3. DREAPTA**

3.1. Punct. Dreaptă. Plan.....	84
3.2. Semidreapta. Semiplanul .....	91
3.3. Pozițiile relative a două drepte.....	97
3.4. Segmentul .....	101
3.5. Lungimea unui segment; distanța dintre două puncte. Segmente congruente; construcția unui segment congruent cu un segment dat; mijlocul unui segment; simetricul unui punct față de alt punct.....	105
<i>TESTE DE EVALUARE</i> .....	111

### **CAPITOLUL 4. UNGHIURI**

4.1 Unghi. Unghi nul. Unghi alungit .....	114
4.2. Măsurarea unghiurilor cu raportorul. Unghi drept. Unghi ascuțit. Unghi obtuz.....	117
4.3. Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale. Unghiuri suplimentare, unghiuri complementare .....	121
4.4. Unghiuri adiacente, bisectoarea unui unghi.....	124
4.5. Unghiuri opuse la vârf, congruența lor; unghiuri în jurul unui punct, suma măsurilor lor.....	129
<i>TESTE DE EVALUARE</i> .....	134

### **CAPITOLUL 5. CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR**

5.1. Triunghiul .....	137
5.2. Construcția triunghiului .....	141
5.3. Congruența triunghiurilor. Criteriile de congruență.....	144
5.4. Metoda triunghiurilor congruente (M.T.C.). Raționamentul în geometrie .....	150
<i>TESTE DE EVALUARE</i> .....	153

<b>VARIANTE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE. SEMESTRUL I</b> .....	155
---	-----