

Matematică

clasa a V-a

III

art
educationa

Prezentul auxiliar a fost avizat de Ministerul Educației Naționale prin Ordinul nr. 3022 din 08.01.2018 și se regăsește la poziția nr. 287 din anexa Ordinului.

Respect pentru oameni și cărți

Lucrarea a fost realizată în conformitate cu noua *Programă școlară pentru disciplina MATEMATICĂ. CLASELE A V-A – A VIII-A*, aprobată prin O.M. nr. 3393/28.02.2017.

Referenți științifici: prof. drd. Livia Harabagiu
prof. gr. I. Dorin Irinel Popa
prof. gr. I. Nicolae Bivol

Redactor: Irina Munteanu

Tehnoredactare: Cornel Drăghia

Coperta: Alexandru Daș

ISBN 978-606-003-148-2

ISBN 978-606-003-150-5 (sem. II)

Pentru comenzi vă puteți adresa Departamentului Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 0744 634 719; 0751 281 774; 021 796 73 83; 021 796 73 80
Fax: 021 369 31 99
www.art-educational.ro

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii Art Educațional.
Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă, stocată ori transmisă,
sub nicio formă (electronic, mecanic, fotocopiere, înregistrare sau altfel),
fără acordul prealabil scris al Editurii Art Educațional.

CUPRINS

Unitatea 1. Fracții ordinare

1.1. Fracții ordinare. Noțiuni introductive	7
1.2. Clasificarea fracțiilor ordinare.....	11
1.3. Fracții echivalente	16
1.4. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile	19
Teste de evaluare	25
Fișă pentru portofoliul individual (A1)	27
1.5. Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor	29
1.6. Compararea și ordonarea fracțiilor ordinare	32
1.7. Adunarea fracțiilor ordinare.....	35
1.8. Scăderea fracțiilor ordinare	39
Teste de evaluare	43
Fișă pentru portofoliul individual (A2)	45
1.9. Înmulțirea fracțiilor ordinare	47
1.10. Împărțirea fracțiilor ordinare	50
1.11. Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri	52
Teste de evaluare	55
Fișă pentru portofoliul individual (A3)	57
1.12. Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară.....	59
Teste de evaluare	63
Fișă pentru portofoliul individual (A4)	65
Test – model pentru Evaluarea Națională	67

Unitatea 2. Fracții zecimale

2.1. Scrierea fracțiilor ordinare cu numitorii puteri ale lui 10 sub formă zecimală. Transformarea unei fracții zecimale, cu un număr finit de zecimale nenule, într-o fracție ordinară	71
2.2. Compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale. Aproximări	75
2.3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule	79
Teste de evaluare	85
Fișă pentru portofoliul individual (A5)	87
2.4. Înmulțirea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule	89
2.5. Ridicarea la putere cu exponent natural a unei fracții zecimale care are un număr finit de zecimale nenule	93
Teste de evaluare	96
Fișă pentru portofoliul individual (A6)	97

2.6. Împărțirea numerelor naturale cu rezultat fracție zecimală.	99
Periodicitate	
2.7. Împărțirea a două fracții zecimale	104
2.8. Ordinea efectuării operațiilor. Aproximări	108
Teste de evaluare	112
Fișă pentru portofoliul individual (A7)	113
2.9. Media aritmetică a două sau mai multe fracții zecimale finite.....	115
2.10. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură	118
Teste de evaluare	120
Fișă pentru portofoliul individual (A8)	121
Test – model pentru Evaluarea Națională.....	123
2.11. Probleme cu caracter aplicativ	125
2.12. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	128
Unitatea 3. Elemente de geometrie	
3.1. Punctul. Dreapta. Planul	133
3.2. Semidreapta. Semiplanul.....	138
3.3. Segmentul de dreaptă.....	143
3.4. Pozițiile relative a două drepte	145
3.5. Lungimea unui segment.....	148
Teste de evaluare	153
Fișă pentru portofoliul individual (G1)	155
Test – model pentru Evaluarea Națională	157
3.6. Unghiul	159
3.7. Clasificarea unghiurilor	164
3.8. Probleme cu caracter aplicativ	167
3.9. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	169
Unitatea 4. Unități de măsură	
4.1. Unități de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări	173
4.2. Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului și a dreptunghiului. Transformări	176
4.3. Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic. Transformări	180
Teste de evaluare	183
Fișă pentru portofoliul individual (G2)	185
Test – model pentru Evaluarea Națională	187
4.4 Probleme cu caracter aplicativ.....	189
4.5 Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	192
Unitatea 5. Subiecte pentru evaluările finale	
5.1. Variante de subiecte pentru teză	197
5.2. Variante de subiecte pentru evaluarea finală	202
Teste – model pentru Evaluarea Națională	206
Soluții.....	212

FRACTII ORDINARE

Tema 1.1. Fracții ordinare. Noțiuni introductive

Tema 1.2. Clasificarea fracțiilor ordinare

Tema 1.3. Fracții echivalente

Tema 1.4. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

 Teste de evaluare

 Fișă pentru portofoliul individual (A1)

Tema 1.5. Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor

Tema 1.6. Compararea și ordonarea fracțiilor ordinare

Tema 1.7. Adunarea fracțiilor ordinare

Tema 1.8. Scăderea fracțiilor ordinare

 Teste de evaluare

 Fișă pentru portofoliul individual (A2)

Tema 1.9. Înmulțirea fracțiilor ordinare

Tema 1.10. Împărțirea fracțiilor ordinare

Tema 1.11. Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri

 Teste de evaluare

 Fișă pentru portofoliul individual (A3)

 Test – model pentru Evaluarea Națională

Tema 1.12. Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinată

 Teste de evaluare

 Fișă pentru portofoliul individual (A4)

 Test – model pentru Evaluarea Națională

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.2. Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intradisciplinar și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)

Tema 1.1

Fracții ordinare. Noțiuni introductive

O parte dintr-un întreg, împărțit în părți egale, se numește *unitate fracționară*.

Exemplu. Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:



o doime sau *o jumătate* sau *unu pe doi*; se scrie $\frac{1}{2}$.



o treime sau *unu pe trei*; se scrie $\frac{1}{3}$.



o patrime sau *un sfert* sau *unu pe patru*; se scrie $\frac{1}{4}$.

Una sau mai multe unități fracționare se numește *fracție*. Forma generală a fracției este $\frac{a}{b}$, unde a, b sunt numere naturale și $b \neq 0$.

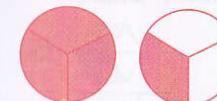
Numărul a se numește *numărător* și arată câte unități fracționare s-au luat; numărul b se numește *numitor* și arată în câte părți egale a fost împărțit întregul; linia orizontală (sau oblică) se numește *linie de fracție*.

Fracția este o pereche de numere naturale, a și b , scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ sau a/b , $b \neq 0$.

Exemplu. Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:



$\frac{3}{4}$ citim *trei patrimi* sau *trei supra patru* sau *trei pe patru*.



$\frac{4}{3}$ citim *patru treimi* sau *patru supra trei* sau *patru pe trei*.



1. Scrieți sub formă de fracție:

a) o patrime;

b) o șesime;

c) o zecime;

d) o treime;

e) o sutime;

f) trei optimi;

g) o miime;

h) o milionime;

i) două cincimi.

2. Citiți următoarele fracții:

a) $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{40}, \frac{1}{19}, \frac{1}{17}, \frac{1}{1000000}$;

b) $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{9}, \frac{3}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{10}{15}, \frac{16}{23}, \frac{24}{10}, \frac{15}{8}, \frac{13}{8}, \frac{12}{7}$.

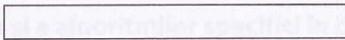
3. Reprezentați prin desene următoarele fracții: $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$.

4. Scrieți sub formă de fracție:

- | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------------------|
| a) trei noiimi; | d) opt zecimi; | g) cinci cincimi; |
| b) cinci săsimi; | e) patru cincimi; | h) treizeci și șapte de sutimi; |
| c) șapte pătrimi; | f) șase pătrimi; | i) patru optimi. |

Rezolvare. a) trei noiimi se scrie $\frac{3}{9}$.

5. Reprezentați, în desene diferite, fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{8}, \frac{6}{8}, \frac{8}{8}$ din întregul următor:



6. Desenați un pătrat cu latura de 3 cm. Colorați cu roșu $\frac{2}{3}$ din el și cu verde $\frac{1}{3}$ din el.

7. Desenați un dreptunghi cu dimensiunile de 6 cm și 4 cm. Colorați din acest dreptunghi fracțiile $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{24}, \frac{3}{12}, \frac{1}{2}$.

8. Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen ca în exemplul de la d):

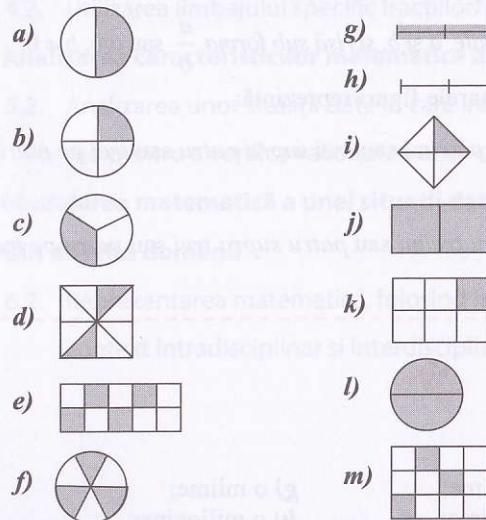


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
fracția				$\frac{2}{8}$									



9. Citiți următoarele fracții: $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{9}{12}, \frac{8}{7}, \frac{30}{42}, \frac{9}{16}, \frac{48}{50}, \frac{103}{207}, \frac{83}{96}, \frac{a}{b}, \frac{2x}{5y}$.

10. Folosind câte două dintre numerele 3, 5, 7, scrieți toate fracțiile posibile.

11. Folosind câte două dintre numerele 6, 4, 10, scrieți toate fracțiile posibile.

12. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale mai mici decât 6 și mai mari decât 3.

13. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime distincte cuprinse între 10 și 20.

Rezolvare. Numerele prime cuprinse între 10 și 20 sunt: 11, 13, 17 și 19. Fracțiile care se pot scrie cu aceste numere sunt: $\frac{11}{13}, \frac{11}{17}, \frac{11}{19}, \frac{13}{17}, \frac{13}{19}, \frac{17}{19}, \frac{17}{11}, \frac{17}{13}, \frac{19}{11}, \frac{19}{13}, \frac{19}{17}$.

14. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime diferite cuprinse între 20 și 40.

15. Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen, ca în exemplul h):

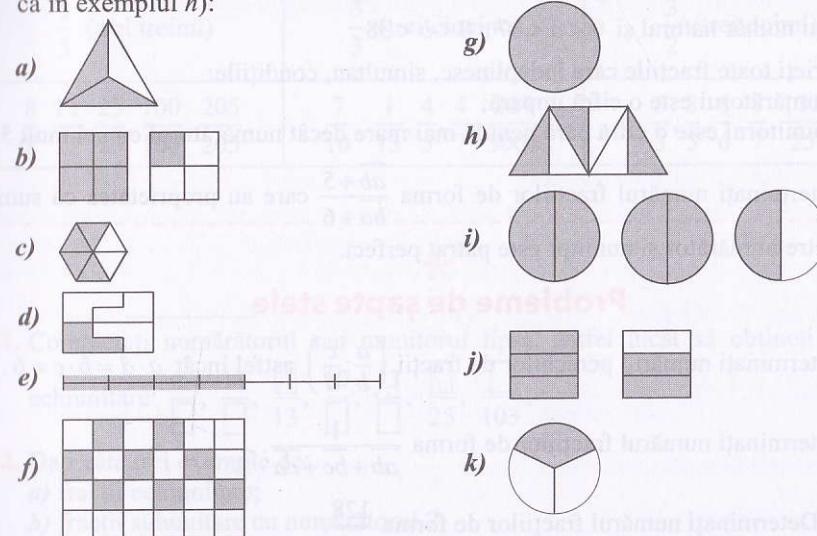


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
fracția								$\frac{3}{6}$			

16. Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, simultan, condițiile:

- numărătorul este o cifră pară, nenulă;

- numitorul este o cifră cu cel puțin 3 mai mare decât numărătorul.

17. Scrieți toate fracțiile de formă $\frac{a}{b}$, unde a este divizor al 12 și b este divizor al lui 35.

18. Scrieți toate fracțiile de formă $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere prime cuprinse între 25 și 45, iar $a < b$.



19. Fie fracția $\frac{23}{2x+1}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fractia are numitorul mai mic decât numărătorul.

Rezolvare. Avem $2x + 1 < 23 \Leftrightarrow 2x < 23 - 1 \Leftrightarrow 2x < 22 \mid : 2 \Leftrightarrow x < 11$. Cum x este pătrat perfect și $x < 11$, rezultă că x poate fi 0, 1, 4, 9.

20. Fie fracția $\frac{3x+2}{98}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fractia are numitorul mai mare decât numărătorul.

21. Scrieți toate fracțiile $\frac{a}{b}$ unde a este pătratul unui număr natural, b este cubul unui număr natural și $0 < a < 37$, $0 < b < 38$.

22. Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, simultan, condițiile:

- numărătorul este o cifră impară;

- numitorul este o cifră pară nenulă mai mare decât numărătorul cu cel mult 5.

23. Determinați numărul fracțiilor de formă $\frac{\overline{ab}+5}{\overline{ba}+6}$ care au proprietatea că suma dintre numărător și numitor este pătrat perfect.

Probleme de șapte stele

24. Determinați numărul perechilor de fracții $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ astfel încât $a \cdot d = b \cdot c = 6$.

25. Determinați numărul fracțiilor de formă $\frac{1}{ab+bc+ca}$.

26. a) Determinați numărul fracțiilor de formă $\frac{128}{ab}$.

b) Dintre fracțiile găsite la punctul anterior, aflați-le pe cele care au proprietatea că numărătorul și numitorul au cel puțin un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

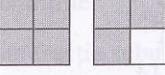
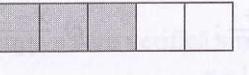
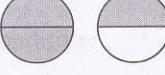
Tema 1.2

Clasificarea fracțiilor ordinare

Fie a și b două numere naturale, cu $b \neq 0$. Fracția $\frac{a}{b}$ se numește:

- **echiunitară**, dacă $a = b$ (numărătorul este egal cu numitorul);
- **subunitară**, dacă $a < b$ (numărătorul este mai mic decât numitorul);
- **supraunitară**, dacă $a > b$ (numărătorul este mai mare decât numitorul).

Exemple.

Fracții echiunitare	Fracții subunitare	Fracții supraunitare
		
$\frac{4}{4}$ (patru pătrimi)	$\frac{1}{4}$ (o pătrime)	$\frac{7}{4}$ (șapte pătrimi)
		
$\frac{3}{3}$ (trei treimi)	$\frac{3}{5}$ (trei cincimi)	$\frac{3}{2}$ (trei doimi)
$\frac{8}{8}, \frac{11}{11}, \frac{23}{23}, \frac{100}{100}, \frac{205}{205}$	$\frac{7}{10}, \frac{1}{13}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{307}{3008}$	$\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{8}{6}, \frac{8}{7}, \frac{100}{25}$



1. Completați numărătorul sau numitorul lipsă, astfel încât să obțineți fracții echiunitare: $\frac{6}{\square}, \frac{11}{\square}, \frac{1}{13}, \frac{10}{\square}, \frac{13}{\square}, \frac{\square}{25}, \frac{\square}{103}$.

2. Dați câte trei exemple de:

- fracții echiunitare;
- fracții subunitare cu numărătorul 7;
- fracții subunitare cu numitorul 12;
- fracții supraunitare cu numitorul 10;
- fracții supraunitare cu numărătorul 20.

3. Scrieți fracțiile echivalente, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare din sirul de fracții:

Respect pentru oameni $\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{4}, \frac{3}{5}, \frac{11}{12}, \frac{9}{8}, \frac{14}{10}, \frac{31}{20}, \frac{90}{30}, \frac{103}{91}, \frac{405}{504}$.

4. În următorul sir de fracții, subliniați-le pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{17}{16}, \frac{23}{20}, \frac{41}{43}, \frac{70}{60}, \frac{51}{41}, \frac{83}{15}, \frac{99}{103}, \frac{86}{68}, \frac{15}{105}.$$

5. În următoarea secvență de fracții, subliniați cu o linie pe cele subunitare și cu două linii pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{11}{10}, \frac{9}{10}, \frac{23}{15}, \frac{54}{27}, \frac{18}{41}, \frac{43}{43}, \frac{72}{71}, \frac{86}{86}, \frac{97}{79}.$$

6. Aflați, în fiecare caz, numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt echivalente:

a) $\frac{x}{4}$;	b) $\frac{x+1}{7}$;	c) $\frac{x-2}{10}$;	d) $\frac{6}{2x}$;
e) $\frac{14}{x+2}$;	f) $\frac{23}{x-1}$;	g) $\frac{104}{20x+4}$;	h) $\frac{3x+2}{2x+3}$.

7. Determinați, în fiecare caz, valorile numărului natural x pentru care fracțiile următoare sunt supraunitare:

a) $\frac{4}{x}$;	b) $\frac{x+1}{7}$;	c) $\frac{x-2}{10}$;	d) $\frac{6}{2x}$.
--------------------	----------------------	-----------------------	---------------------

8. Aflați numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt subunitare:

a) $\frac{x}{3}$;	b) $\frac{x+12}{17}$;	c) $\frac{11}{x-2}$;	d) $\frac{13}{4x}$.
--------------------	------------------------	-----------------------	----------------------

9. Indicați patru numere naturale care, puse în locul lui x în fracția $\frac{x}{13}$, determină o fracție subunitară.

Rezolvare. Fracția este subunitară dacă numărătorul este mai mic decât numitorul, adică $x < 13$. Prin urmare x poate fi unul dintre numerele 0, 1, 2, ..., 12. Putem lua oricare patru dintre aceste valori; spre exemplu pentru $x = 2, x = 5, x = 8$ și $x = 11$ se obțin fracțiile subunitare $\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{8}{13}$ și $\frac{11}{13}$.

10. Arătați că fracția $\frac{ab+bc+ca}{ac+cb+ba}$ este echivalentă.

11. Pentru câte numere naturale n fracția $\frac{8}{n+1}$ este supraunitară?

12. Se consideră fracțiile:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{6}{3}, \frac{9}{6}, \frac{8}{10}, \frac{8}{12}, \frac{9}{9}, \frac{11}{13}, \frac{14}{14}, \frac{15}{12}, \frac{23}{14}, \frac{39}{93}, \frac{74}{47}, \frac{103}{81}, \frac{205}{502}.$$

Selectați dintre acestea:

- a) fracțiile subunitare; b) fracțiile echivalente; c) fracțiile supraunitare.



13. Care dintre următoarele fracții sunt subunitare: $\frac{1}{7}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{6}, \frac{9}{8}, \frac{7}{8}, \frac{20}{3}, \frac{31}{15}$?

14. Care dintre următoarele fracții sunt supraunitare: $\frac{2}{5}, \frac{6}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{5}, \frac{3}{12}, \frac{13}{10}, \frac{71}{59}, \frac{60}{90}$?

15. La câte dintre fracțiile $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{13}, \frac{18}{53}, \frac{24}{60}, \frac{35}{104}, \frac{8}{8}, \frac{19}{14}$ trebuie să modificăm numărătorii pentru ca toate să devină, după modificare, fracții echivalente?

16. Pentru câte numere naturale n fracția $\frac{n+3}{27}$ este subunitară?

17. Determinați numerele naturale n care verifică simultan condițiile:

a) $\frac{n+1}{5}$ este fracție supraunitară; b) $\frac{n+7}{20}$ este fracție subunitară.

Rezolvare. Fracția $\frac{n+1}{5}$ este supraunitară dacă $n+1 > 5$, adică $n > 4$. Fracția $\frac{n+7}{20}$ este subunitară dacă $n+7 < 20$, adică $n < 13$. Obținem $4 < n < 13$, deci n poate lua valorile 5, 6, 7, ..., 11, 12.

18. Determinați numerele naturale n care verifică simultan condițiile:

a) $\frac{n+2}{15}$ este fracție subunitară; b) $\frac{n+1}{7}$ este fracție supraunitară.

19. Folosind ca numitor și numărător oricare două dintre numerele 3, 5, 6 și 9, scrieți toate fracțiile:

a) subunitare; b) supraunitare.

20. Subliniați fracțiile subunitare:

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{8}{18}, \frac{23}{21}, \frac{6}{4}, \frac{8}{10}, \frac{3}{13}, \frac{50}{25}, \frac{16}{32}, \frac{8}{40}, \frac{47}{47}, \frac{302}{120}, \frac{a}{5a}.$$

21. Câte numere naturale n există astfel încât fracția $\frac{17}{2n+3}$ să fie supraunitară?

22. Dați exemplu de o fracție echivalentă care să aibă la numărător cubul unui număr natural, iar la numitor patratul unui număr natural.

23. Determinați numerele naturale nenule a și b astfel încât $\frac{a+b}{6}$ să fie echivalentă.

24. Determinați numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{2a+3b}{12}$ este:

a) echivalentă; b) subunitară.

25. Determinați numerele naturale a și b , nu ambele nule, astfel încât fracția

$\frac{35}{2a+7b}$ să fie echivalentă, iar suma $a+b$ să fie minimă.

Respect pentru oameni și cărti

Rezolvare. Fracția $\frac{35}{2a+7b}$ este echivalentă dacă $2a+7b=35$. Atunci b este număr impar (dacă b ar fi par, suma $2a+7b$ ar fi și ea număr par, deci nu poate fi egală cu 35).

- dacă $b=1 \Rightarrow 2a+7=35 \Rightarrow a=14 \Rightarrow a+b=15$;
- dacă $b=3 \Rightarrow 2a+21=35 \Rightarrow a=7 \Rightarrow a+b=10$;
- dacă $b=5 \Rightarrow 2a+35=35 \Rightarrow a=0 \Rightarrow a+b=5$;
- dacă $b>5$ atunci fracția nu mai este echivalentă.

Numerele cerute sunt $a=0$ și $b=5$.

26. Determinați numerele naturale a și b , nu ambele nule, astfel încât fracția $\frac{53}{4a+3b}$ să fie echivalentă și suma $a+b$ să fie maximă.



27. a) Determinați numerele naturale a, b, c astfel încât fracția $\frac{4}{a^2+b^2+c^2}$ să fie supraunitară.

b) Determinați numerele naturale a, b, c , astfel încât fracția $\frac{5}{a^2+b^2+c^2}$ să fie echivalentă.

c) Determinați numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{9}{a^2+b^2+4}$ este echivalentă.

Rezolvare. a) Fracția dată este supraunitară dacă $4 > a^2+b^2+c^2$. Numerele a, b, c pot fi cel mult egale cu 1, dar nu pot fi toate egale cu 0. Cazurile se pot organiza în tabelul:

a	b	c	Discuție
1	1	1	toate sunt egale cu 1
1	1	0	două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 1 și al treilea este egal cu 0
1	0	1	și al treilea este egal cu 0
0	1	1	
1	0	0	două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 0 și al treilea este egal cu 1
0	1	0	
0	0	1	

28. a) Determinați fracțiiile subunitare de formă $\frac{\overline{xy}}{3y}$ știind că numărătorul \overline{xy} este patrat perfect, iar numitorul $3y$ este număr prim.

b) Determinați fracțiiile supraunitare de formă $\frac{\overline{6x}}{y\overline{7}}$, știind că numărătorul $\overline{6x}$ este patrat perfect, iar numitorul $y\overline{7}$ este număr prim.

Rezolvare. a) Fracția $\frac{\overline{xy}}{3y}$ este subunitară dacă $\overline{xy} < 3y$, de unde $x=1$ sau $x=2$.

Pentru $x=1$, rezultă $\overline{xy}=16=4^2$, iar pentru $x=2$, numărul $\overline{xy}=26$ nu este patrat perfect. Numerele prime de formă $3y$ sunt 31 și 37. Fracțiiile căutate sunt $\frac{16}{31}$ și $\frac{16}{37}$.

29. Andrei scrie pe tablă toate fracțiiile de formă $\frac{a}{8}$, cu proprietatea că $a|8$.

Bianca scrie toate fracțiiile de formă $\frac{8}{b}$, cu proprietatea că $b|8$. Corina scrie

toate fracțiiile de formă $\frac{a}{b}$, unde $a|4$ și $b|6$.

Determinați fracțiiile echivalentă, fracțiiile subunitare și fracțiiile supraunitare scrise de fiecare dintre cei trei copii.

30. Fie sirul de fracții ordinare:

$$\frac{1}{2017}, \frac{2}{2016}, \frac{3}{2015}, \frac{4}{2014}, \dots, \frac{2015}{3}, \frac{2016}{2}, \frac{2017}{1}.$$

Scrieți fracțiiile echivalentă, fracțiiile subunitare și fracțiiile supraunitare din acest sir.

Probleme de șapte stele

31. a) Știind că fracția $\frac{ab5+12}{2ab+123}$ este echivalentă, determinați $a+b$.

b) Știind că fracția $\frac{ab5+12}{2ab+123}$ este subunitară, determinați valoarea maximă a sumei $a+b$.

32. Arătați că fracția $\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2010}}{(32^{1608})^{251}}$ este supraunitară.

33. Fie secvența de fracții $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{20}{24}$.

a) Determinați numărul termenilor secvenței date.

b) Determinați numărul fracțiilor subunitare din secvența dată.

c) Determinați numărul fracțiilor supraunitare din secvența dată.

Analizând figura alăturată, constatăm că fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$



reprezintă aceeași parte din întreg. Putem scrie $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.



Definiție. Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt *echivalente* dacă $a \cdot d = b \cdot c$. Scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ nu sunt echivalente dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$. Scriem $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

Exemple. 1. $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, deoarece $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10$; 2. $\frac{1}{7} = \frac{4}{28}$, deoarece $1 \cdot 28 = 7 \cdot 4$;

3. $\frac{2}{11} = \frac{4}{22}$, deoarece $2 \cdot 22 = 11 \cdot 4$; 4. $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$, deoarece $16 \cdot 3 = 12 \cdot 4$;

5. $\frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$, deoarece $3 \cdot 3 \neq 6 \cdot 1$; 6. $\frac{3}{5} \neq \frac{5}{7}$, deoarece $3 \cdot 7 \neq 5 \cdot 5$.



1. Verificați dacă următoarele perechi de fracții sunt echivalente și scrieți între ele semnul corespunzător (= sau \neq), ca în exemplele a) și b).

- | | | | |
|--|--|--|--|
| a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; | b) $\frac{1}{4} \square \frac{5}{6}$; | c) $\frac{2}{3} \square \frac{6}{9}$; | d) $\frac{2}{7} \square \frac{10}{35}$; |
| e) $\frac{2}{10} \square \frac{1}{5}$; | f) $\frac{6}{5} \square \frac{6}{10}$; | g) $\frac{8}{24} \square \frac{1}{3}$; | h) $\frac{15}{25} \square \frac{3}{4}$; |
| i) $\frac{15}{25} \square \frac{3}{5}$; | j) $\frac{60}{80} \square \frac{2}{3}$; | k) $\frac{70}{50} \square \frac{5}{7}$; | l) $\frac{102}{24} \square \frac{17}{4}$; |

2. Verificați dacă următoarele perechi de fracții sunt echivalente și scrieți între ele semnul corespunzător (= sau \neq):

- | | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\frac{1}{7} \square \frac{2}{14}$; | b) $\frac{3}{5} \square \frac{3}{4}$; | c) $\frac{21}{49} \square \frac{3}{7}$; | d) $\frac{12}{30} \square \frac{5}{6}$; |
| e) $\frac{2}{11} \square \frac{18}{99}$; | f) $\frac{5}{13} \square \frac{20}{39}$; | g) $\frac{6}{7} \square \frac{54}{6}$; | h) $\frac{9}{5} \square \frac{36}{20}$; |
| i) $\frac{6}{11} \square \frac{12}{33}$; | j) $\frac{8}{12} \square \frac{20}{15}$; | k) $\frac{100}{53} \square \frac{2}{1}$; | l) $\frac{42}{5} \square \frac{84}{10}$; |

3. Scrieți în căsuțele libere numere naturale astfel încât să obțineți fracții echivalente:

- | | | | | |
|---|---|--|---|--|
| a) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{10}$; | b) $\frac{7}{9} = \frac{21}{\square}$; | c) $\frac{\square}{4} = \frac{12}{16}$; | d) $\frac{11}{\square} = \frac{1}{7}$; | e) $\frac{24}{14} = \frac{\square}{7}$; |
|---|---|--|---|--|

f) $\frac{20}{45} = \frac{4}{\square}$; g) $\frac{8}{5} = \frac{\square}{15}$;

h) $\frac{\square}{27} = \frac{36}{9}$;

i) $\frac{13}{20} = \frac{39}{\square}$;

j) $\frac{33}{42} = \frac{11}{\square}$.

Rezolvare. c) $4 \cdot 12 : 16 = 3$; scriem $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$.

4. Scrieți în căsuțele libere numere naturale astfel încât să obțineți fracții echivalente:

a) $\frac{6}{4} = \frac{3}{\square}$;

b) $\frac{2}{8} = \frac{\square}{48}$;

c) $\frac{\square}{5} = \frac{18}{45}$;

d) $\frac{11}{\square} = \frac{77}{28}$;

e) $\frac{32}{8} = \frac{\square}{9}$;

f) $\frac{\square}{21} = \frac{6}{3}$;

g) $\frac{8}{15} = \frac{24}{\square}$;

h) $\frac{\square}{10} = \frac{30}{100}$;

i) $\frac{2}{90} = \frac{\square}{9000}$;

j) $\frac{10}{30} = \frac{\square}{6}$.



5. Determinați numărul natural n , știind că următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $\frac{7}{9} = \frac{n}{27}$;

b) $\frac{n}{14} = \frac{3}{2}$;

c) $\frac{48}{n} = \frac{6}{10}$;

d) $\frac{80}{50} = \frac{8}{n}$;

e) $\frac{18}{n} = \frac{3}{4}$;

f) $\frac{1001}{7777} = \frac{13}{n}$;

g) $\frac{140}{90} = \frac{n}{9}$;

h) $\frac{n}{11} = \frac{48}{44}$;

i) $\frac{101}{37} = \frac{505}{n}$;

j) $\frac{5}{6} = \frac{n}{30}$.

6. a) Dați trei exemple de fracții echivalente cu fracția $\frac{5}{6}$, ai căror numitori să fie mai mici decât 40.

b) Dați trei exemple de fracții echivalente cu fracția $\frac{4}{7}$, ai căror numitori să fie mai mari decât 20.

Rezolvare. a) Multiplii lui 6 mai mici decât 40 sunt: 12, 18, 24, 30 și 36. Prin urmare avem fracții: $\frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \frac{30}{36}$, care sunt, fiecare, echivalente cu fracția $\frac{5}{6}$.

7. Stabiliți care dintre fracții

$$\frac{8}{10}, \frac{13}{15}, \frac{20}{25}, \frac{32}{40}, \frac{24}{30}, \frac{16}{15}, \frac{40}{50}$$

sunt echivalente cu $\frac{4}{5}$.

8. Scrieți două fracții de forma $\frac{ab}{cd}$ care sunt echivalente cu fracția:

a) $\frac{5}{8}$;

b) $\frac{10}{24}$;

c) $\frac{7}{20}$;

d) $\frac{12}{14}$;

e) $\frac{3}{18}$;

f) $\frac{33}{31}$;

g) $\frac{8}{13}$;

h) $\frac{9}{19}$.