Carmen Angelescu, Nicolae Baciu, Ovidiu Bădescu,
Nicolai Buzduga, Constantin Chirilă, Daniela Chiteş,
Marinela-Cristina Cimpoeşu, Gabriela Constantinescu,
Dorel Cosic, Doina Cremenescu, Mihai Ionescu, Viorel Lupşor,
Laura Marin, Ioan Marinescu, Dan Nănuți, Daniel Năstruț,
Mihai Păuna, Ana Poştaru, Nicolae Stănică,
Gheorghe Stoianovici, Nicolae Suciu, Gheorghe Tirla,
Dorina Trifon, George Vlad, Cătălin Zîrnă

GHID DE PREGĂTIRE
BACALAUREAT
MATEMATICĂ - M2

- **Filiera teoretică: profil real**
  Specializarea: ştiințe ale naturii
- **Filiera tehnologică: toate profilurile**
  toate specializările

SIGMA

VARIANTA 1

5p | 1. Să se calculeze $C_3^2+3!$.

5p | 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+4)=2$.

5p | 3. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-x-2=0$.

5p | 4. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p | 5. Fie punctele $A(2,-1)$ și $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.

5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4, AC=\sqrt{7}$ și $BC=\sqrt{3}$. Să se calculeze măsura unghiului B.

Soluții

1. $C_3^2+3!=\frac{3!}{2!\cdot 1!}+3!=3+6=9$.

2. Punem condiția: $3x+4>0\Leftrightarrow x>-\frac{4}{3}, D=\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$. Din $\log_5(3x+4)=2$ rezultă $3x+4=25$, adică $3x=21$, deci $x=7\in D$.

3. Din relațiile lui Viéte: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=-2\end{cases}$. Dar $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$.

4. $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2$ este continuă și strict descrescătoare pe $[0,1]$. Atunci mulțimea valorilor funcției f este: $f([0,1])=[f(1);f(0)]=[-1,0]$.

5. Cum $\overrightarrow{AB}=(-1-2)\vec{i}+(3+1)\vec{j}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, atunci $a=-3$ și $b=4$.

6. Din teorema cosinusului avem $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$, adică $\left(\sqrt{7}\right)^2=4^2+\sqrt{3}^2-2\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos B$. Rezultă că $8\sqrt{3}\cos B=12$, de unde $\cos B=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $m(\sphericalangle B)=30°$.

VARIANTA 2

5p | 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$. Să se determine $f(-4)\cdot f(-3)\cdot ...\cdot f(3)\cdot f(4)$.

5p | 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

5p | 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația $x^2-5x+5\le 1$.

5p | 4. Să se demonstreze că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ numerele 3^x-1, 3^{x+1} și $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ și $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

5p | 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AC=2$, $m(\sphericalangle BAC)=30°$ și $AB=4$.

Soluții

1. $f(x)=0$ dacă $x=3$; deci $f(3)=0$. Atunci $f(-4)\cdot f(-3)\cdot ...\cdot f(4)=0$.

2. Condiții: $\begin{cases}x+2>0\\x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2\\x>0\end{cases}$, deci $D=(0,+\infty)$.

$\log_2(x+2)+\log_2 x=3$, $\log_2 x(x+2)=3$, de unde $x^2+2x=2^3$, adică $x^2+2x-8=0$; $\Delta=36$, de unde $x_1=2\in D$ și $x_2=-4\notin D$. $S=\{2\}$.

3. $x^2-5x+5\leqslant 1$; $x^2-5x+4\leqslant 0$ rezultă $x\in[1,4]$. Dar $x\in\mathbf{Z}$, deci $x\in\{1,2,3,4\}$.

4. Cele trei numere sunt în progresie aritmetică dacă $3^{x+1}=\dfrac{3^x-1+5\cdot 3^x+1}{2}$, adică $2\cdot 3^{x+1}=6\cdot 3^x$; $3^x\cdot 3=3\cdot 3^x$ (A), $\forall x\in\mathbb{R}$.

5. Avem $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}-8\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+3\vec{j}$. Atunci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=10\vec{i}-5\vec{j}$, deci coordonatele sunt $(10,-5)$.

6. $A_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\dfrac{8\cdot\frac{1}{2}}{2}=2$.

VARIANTA 3

5p | 1. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...

5p | 2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta sa fie divizibil cu 3.

5p | 3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2+x}=x$.

5p | 4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)$.

5p | 5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.

5p | 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=AC=\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=30°$

Soluţii

1. Observăm că termenii şirului sunt în progresie aritmetică. Avem $a_1=1$ şi $r=6$. Deci $a_{10}=a_1+9r=1+9\cdot 6=55$.

2. Fie numerele de acest fel notate $\overline{abc}$.
Fie funcţiile $f:\{a,b,c\}\to\{1,2\}$. Sunt $2^3=8$ astfel de funcţii, adică 8 astfel de numere $\overline{abc}$, cu $a,b,c\in\{1,2\}$. Deci sunt 8 numere de 3 cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1,2\}$. Dintre ele, sunt divizibile cu 3 doar cele cu $a=b=c$, adică 111 şi 222. Atunci $P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0,25$.

3. Din condiţiile de existenţă $2+x\geqslant 0$ şi $x\geqslant 0$, rezultă $x=[0,+\infty)=D$. Ridicând la pătrat, ecuaţia devine $x^2-x-2=0$ având soluţiile $x_1=-1\notin D$ şi $x_2=2\in D$.

4. $f(-2)=2\cdot(-2)+1=-3$, $f(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$, $f(0)=2\cdot 0+1=1$, $f(1)=2\cdot 1+1=3$, deci $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)=0$.

5. (AB): $y-y_A=m(x-x_A)$; $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2+1}{1-2}=1$.

Rezultă (AB): $y+1=x-2\Leftrightarrow x-y-3=0$.

6. $A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\dfrac{(\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

VARIANTA 4

5p 1. Să se determine soluţiile întregi ale inecuaţiei $(x-1)^2+x-7<0$.

5p 2. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=1$ şi $a_2=3$.

5p 3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-8x-3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m ştiind că valoarea maximă a funcţiei f este egală cu 5.

5p 4. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$.

5p 5. Să se determine numărul real a ştiind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=3$ şi $m(\sphericalangle C)=30°$.

Soluţii

1. $x^2-2x+1+x-7<0 \Rightarrow x^2-x-6<0$, $(x-3)(x+2)<0$.
Avem $x\in(-2,3)\cap\mathbb{Z}=\{-1,0,1,2\}$.

2. $r=a_2-a_1=2$. $S_5=\dfrac{[2a_1+(5-1)r]\cdot 5}{2}=\dfrac{10\cdot 5}{2}=25$.

3. Dacă f are maxim, atunci $m<0$.

$\max(f)=\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{-(12m+64)}{4m}=\dfrac{-3m-16}{m}$.

Deci $\dfrac{-3m-16}{m}=5$, adică $-8m=16$, de unde $m=-2$.

4. Condiţii: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-5>0 \end{cases} \Rightarrow D=(5,+\infty)$.

$\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$, $\log_2\dfrac{x+2}{x-5}=3$, deci $\dfrac{x+2}{x-5}=8 \Rightarrow 8x-40-x-2=0$, adică $7x=42$, de unde $x=6\in D$.

5. Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, atunci $\dfrac{2}{3}=\dfrac{a}{a-2}$, adică $2a-4=3a$, de unde $a=-4$.

6. Din teorema sinusurilor avem $\dfrac{AB}{\sin C}=2R$. Atunci $R=\dfrac{AB}{2\sin C}=\dfrac{3}{2\cdot\frac{1}{2}}=3$.

VARIANTA 5

5p 1. Să se determine numărul elementelor mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x+1|\leq 2\}$.

5p 2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3},..., \sqrt[3]{30}\}$, acesta să fie număr raţional.

5p 3. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x-1$. Să se determine soluţia reală a ecuaţiei $2f(x)+3g(x)=-5$.

5p 4. După o reducere cu 20 %, preţul unui produs este 320 de lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.

5p 5. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$.

5p 6. Fie triunghiul dreptunghic *ABC* şi *D*, mijlocul ipotenuzei *BC*. Să se calculeze lungimea laturii *AB* ştiind că $AC=6$ şi $AD=5$.

Soluţii

1. $A=[-3;1]\cap\mathbb{Z}$ adică numărul elementelor mulţimii este 5.

2. Numerele raţionale sunt $\{\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{8},\sqrt[3]{27}\}=\{1, 2, 3\}$, adică 3 cazuri favorabile din cele 30 posibile. Atunci $P=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}=0{,}1$.

3. Avem $2f(x)+3g(x)=-5$; $2(x+3)+3(2x-1)=-5$; $8x+3=-5$. Rezultă $x=-1$.

4. 80% din x este 320; atunci $x=400$.

5. $5\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}=-15\cdot\vec{i}+10\cdot\vec{j}+15\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}=7\cdot\vec{j}$, de unde coordonatele $(0,7)$.

6. Cum $BC=2AD$, atunci $BC=10$ şi conform teoremei lui Pitagora, $AB^2=BC^2-AC^2=100-36=64$, de unde $AB=8$.

CUPRINS