

Cuprins

I. Elemente de algebră

Grupuri	5
Legi de compoziție	5
Proprietăți ale legilor de compoziție	9
Clase de resturi modulo n	16
Grupuri	23
Grupuri de permutări	31
Morfisme de grupuri	35
Subgrup. Ordinul unui element	39
*Izometrii într-un plan	46
<i>Teste de evaluare</i>	50
Inele și corpuri	52
Inele	52
Reguli de calcul într-un inel	57
Corpuri	63
<i>Teste de evaluare</i>	68
Polinoame	69
Polinoame având coeficienți într-un corp comutativ	69
Împărțirea cu rest a polinoamelor	77
Calculul valorilor unui polinom. Schema lui Horner	82
Relația de divizibilitate pentru polinoame	88
Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viète	99
Ecuații algebrice având coeficienți numerici (în \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C})	111
<i>Teste de evaluare</i>	119

II. Elemente de analiză matematică

Primitive	121
Probleme care conduc la noțiunea de integrală	121
Primitive și integrala nedefinită a unei funcții. Primitive uzuale	126
<i>Teste de evaluare</i>	134
Integrala definită	135
Integrale definite	135
Proprietăți ale integralei definite. Integrarea funcțiilor continue	142
Proprietatea de medie a integralei. Existența primitivelor unei funcții continue	148
Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea funcțiilor raționale	155
Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea prin părți și schimbarea de variabilă	160
<i>Teste de evaluare</i>	169
Aplicații ale integralei definite	170
Aria unei suprafețe plane	170
Volumul unui corp de rotație	174
Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită	177
<i>Teste de evaluare</i>	181
Probleme recapitulative	182
Probleme de tip bacalaureat	191
Teme de sinteză pentru pregătirea examenului de bacalaureat	202
<i>Indicații și răspunsuri</i>	217

Definiție. Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „ $*$ ” asociativă și cu element neutru e .

Spunem că un element $x \in M$ este *simetrizabil* în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” (asociativă și cu element neutru), dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$. Elementul x' cu această proprietate se numește *simetricul* (inversul sau opusul) lui x .

Proprietate. Dacă un element este simetrizabil, atunci admite un unic element simetric.

Demonstrație. Fie $x', x'' \in M$ care verifică aceeași proprietate: $x' * x = x * x' = e$ și $x'' * x = x * x'' = e$. Avem

$$x'' = x'' * e = x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'. \blacksquare$$

În notație multiplicativă simetricul lui x , dacă există, se notează x^{-1} și se numește *inversul lui x*, $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$; în notație aditivă se notează $-x$ și se numește *opusul lui x*, $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

Observație. Dacă operația $*$ pe mulțimea M nu este asociativă atunci este posibil ca să existe un element $x \in M$, care are un element simetrizabil la stânga x' și alt element simetrizabil x'' .

În acest caz: $(x' * x) * x'' = e * x'' = x''$, $x' * (x * x'') = x' * e = x'$, dar $(x' * x) * x'' \neq x' * (x * x'')$ operația $*$ nefiind asociativă.

Observație. Elementul neutru e are simetricul tot e , $e * e = e$.

În notație multiplicativă avem $1^{-1} = 1$.

În notație aditivă avem $-0 = 0$.



EXEMPLU Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este simetrizabilă (inversabilă) în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $M_2(\mathbb{R})$.

Într-adevăr, $\det(A) = 2 \neq 0$. Atunci există $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\text{Avem } AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^{-1}A$$

Teoremă. Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție „ $*$ ” (asociativă și cu element neutru), atunci $x * y$ și x' sunt simetrizabile. În plus avem:

$$(1) (x * y)' = y' * x'; \quad (2) (x')' = x.$$

În scriere multiplicativă (1) și (2) devin $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $(x^{-1})^{-1} = x$, iar în cea aditivă $-(x + y) = (-y) + (-x)$, $-(-x) = x$.

Demonstrație. Avem: $(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * (x * y)) = y' * ((x' * x) * y) = y' * (e * y) = y' * y = e$ și analog $(x * y) * (y' * x') = e$. Rezultă că $x * y$ este simetrizabil și deci $(x * y)' = y' * x'$. Din $x' * x = x * x' = e$, rezultă că x' este simetrizabil și $(x')' = x$. \blacksquare

15) Fie următoarele legi de compoziție definite cu ajutorul tabelelor:

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	p	q
p	p	q	n	m
q	q	p	m	n

\circ	α	β	γ	δ	ε
α	ε	α	δ	β	γ
β	α	β	γ	δ	ε
γ	δ	γ	α	ε	β
δ	β	δ	ε	γ	α
ε	γ	ε	β	α	δ

Pentru fiecare dintre aceste legi de compoziție, scrieți care este elementul neutru și apoi scrieți care este simetricul fiecărui element.

16) Folosiți tabla compunerii funcțiilor

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

pentru a arăta că funcțiile e și f sunt simetrizabile.

\circ	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

17) Studiați existența elementelor simetrizabile pentru următoarele legi de compoziție:

- $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0, 1)$;
- $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ pe $(4, \infty)$;
- $x * y = \frac{4xy + 3}{4x + 4y + 4}$ pe $(-\infty, -\frac{3}{2})$;
- $x * y = x^2y$ pe \mathbb{R} ;
- $x * y = x^{2y}$ pe $(0; \infty)$;
- $x * y = e^{x^{2y}}$ pe $(0; \infty)$.

Indicație.

a) $\forall x \in (0, 1)$, avem: $x * x' = e$,

$$\frac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \frac{1}{2}, x' = 1 - x \in (0, 1).$$

Analog, $x' * x = e$, $x' = 1 - x \in (0, 1)$.