MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

**Petre Năchilă** **Cătălin Năchilă**

# MATEMATICĂ

## Manual pentru clasa a XII-a

## M2

*Filiera teoretică*

**Profil real**

Specializare: științe ale naturii

*Filiera tehnologică*

**Toate calificările profesionale**

SIGMA

# CUPRINS

## ELEMENTE DE ALGEBRĂ

### Capitolul 1. Grupuri



### Capitolul II. Inele. Corpuri



### Capitolul III. Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ



## ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

### Capitolul IV. Primitive

# BIBLIOGRAFIE

• I.D. Ion, Nicolae R. – „*Algebră*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981

• Năchilă P., Becheanu M., Brânzei D. – „*Subiecte posibile pentru admitere*", Editura Paralela 45, Piteşti 1997

• Năchilă P., Stoica C. – „*Probleme pentru admiterea în învăţământul superior*", Editura Scorpion, Bucureşti 1997

• Nicolescu M. – „*Analiză Matematică*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980

• Roşculeţ M. – „*Analiza matematică*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1984

• Sireţchi Gh. – „*Calcul diferenţial şi integral*", Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985

• Donciu N., Flondor D. – „*Algebră şi analiză matematică*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1967

• Chiţescu I., Alexandrescu P. – „*Analiza matematică*", Editura Paralela 45, Piteşti 2000

# ELEMENTE DE ALGEBRĂ

## CAPITOLUL I
## GRUPURI

### I.1. Lege de compoziție internă

Matematicienii egipteni și babilonieni cunoșteau un sistem complet de reguli de calcul privind numerele naturale, numerele raționale pozitive, lungimile, ariile și volumele, ecuațiile de gradul întâi și al doilea. Aceste reguli erau, de obicei, enunțate în cazuri particulare.

Matematicienii greci (Euclid, Diofant) sunt primii care au încercat justificarea acestor reguli de calcul. Notarea cu litere a elementelor care intervin în probleme (adică apariția algebrei) a permis enunțarea primelor reguli generale de calcul, care se aplicau la început și unor numere neprecizate în acea perioadă (numere iraționale, numere complexe).

Perfecționarea notațiilor matematice și introducerea unor noțiuni noi (matrice, polinoame, vectori, etc.) au condus la considerarea operațiilor nedeterminate ce se efectuează cu obiecte nedeterminate (fapt specific algebrei abstracte).

Considerăm acum mulțimea numerelor naturale și operațiile de adunare, scădere și ridicare la putere în mulțimea $\mathbb{N}$. Oricăror două numere naturale $a$, $b$ le putem asocia un număr natural $c$ care este suma lor și este notat $a+b$. Oricăror două numere naturale $a \geqslant b$ le putem asocia un număr natural $d$ care este diferența lor și este notat $d=a-b$. Să observăm că, dacă $a<b$, atunci $a-b$ nu se poate efectua în $\mathbb{N}$. Spunem că, în acest caz, $d$ „nu este definit”. În cazul ridicării la putere a numerelor naturale avem „definit” numărul $a^b$ cu excepția cazului $a=0, b=0$.

În cele trei exemple considerate, orice operație asociază unei perechi ordonate $(a,b)$ de numere naturale un al treilea număr natural (atunci când este posibil). Asemenea operații se numesc și „binare” și pot fi „definite peste tot” sau „nu pot fi definite peste tot”. Ordinea în care se consideră „factorii” (sau „termenii”) este în general esențială. De exemplu, perechilor $(3,5),(5,3)$ le „corespunde” prin adunare numărul 8, iar perechilor $(2,5)$ și $(5,2)$ le corespund prin operația de ridicare la putere numerele 32, respectiv 25.

**Definiție.** Fie mulțimea nevidă $M$. Se numește *lege de compoziție* (*internă*) *pe M* (sau *operație algebrică pe M* sau *operație binară pe M*) o aplicație $f: M \times M \to M$. Elementul corespunzător cuplului (perechii) $(x,y)$ prin funcția (aplicația) $f$ se numește *compusul* lui $x$ cu $y$ (în această ordine !) și se notează cu $f((x,y))$ sau, mai simplu, $f(x,y)$.

Dacă legea de compoziţie prezintă unele analogii cu adunarea (numerică) sau înmulţirea (numerică), pentru notarea compusului folosim $x+y$ (notaţie aditivă) sau $x \cdot y$ (sau $xy$) (notaţie multiplicativă). Pentru compusul $f(x,y)$ se mai folosesc şi alte notaţii: $x \circ y$, $x * y$, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \oplus y$, $x \odot y$, $x \perp y$, $x \Delta y$, etc.

EXEMPLU

**Legi de compoziţie**

**a)** $f: M \times M \to M, f(x,y) = x+y$, unde $M$ este una din mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

**b)** $f: M \times M \to M, f(x,y) = xy$, unde $M$ este una din mulţimile de la punctul a);

**c)** Fie $\mathscr{F}(A) = \{g : A \to A\}$. Atunci $f: \mathscr{F}(A) \times \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(A), f(g,h) = g \circ h$ este o lege de compoziţie pe $\mathscr{F}(A)$.

**d)** Fie $A \neq \varnothing, \mathscr{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Atunci funcţiile $f, g: \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$, $f(X,Y) = X \cup Y, g(X,Y) = X \cap Y$ sunt legi de compoziţie definite pe $\mathscr{P}(A)$.

Fie mulţimea finită $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Legea de compoziţie $f$ definită pe $M$ poate fi cunoscută dacă se indică „tabla" legii de compoziţie: la intersecţia liniei $i$ cu coloana $j$ se află elementul $f((a_i, a_j))$.

| $f$ | $a_1$ | $a_2$ | ..... | $a_j$ | ..... | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | | | | ⋮ | | |
| $a_2$ | | | | ⋮ | | |
| ⋮ | | | | ⋮ | | |
| $a_i$ | ........... | | | $f(a_i, a_j)$ | ....... | |
| ⋮ | | | | | | |
| $a_n$ | | | | | | |

EXEMPLU

Să se scrie toate operaţiile algebrice definite pe $M = \{0,1\}$.

*Soluţie.* $M \times M$ are $2^2 = 4$ elemente. Atunci numărul operaţiilor algebrice definite pe $M$ este $2^4 = 16$. Avem următoarele operaţii:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

| $\wedge$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\vee$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\to$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

Între aceste operaţii recunoaştem conjuncţia $(\wedge)$, disjuncţia $(\vee)$, implicaţia $(\rightarrow)$. Care este tabla „echivalenţei" ?

**Probleme rezolvate**

**1.** Fie $M=\{1,2,3,4\}$. Este lege de compoziţie $f: M\times M\rightarrow M$ dată de

$$f(x,y)=\begin{cases} x-y, & x\geqslant 3,\ y\leqslant 2 \\ x+|x-y| & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}\ ?$$

*Soluţie*. „Tabla" legii este reprezentată alăturat.

| $f$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 5 | 4 |

Observăm că $f(4,3)=5\notin M$, deci nu avem lege de compoziţie.

**2.** Fie $D_n$ mulţimea divizorilor naturali ai numărului natural $n\geqslant 2$. Pe $D_n$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=(x,y)$ (cel mai mare divizor comun al lui $x$ şi $y$). Să se scrie tabla legii de compoziţie pentru $D_8$ şi $D_{12}$.

*Soluţie*. Avem $D_8=\{1,2,4,8\}, D_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$. Cele două table de compoziţie sunt:

| $\circ$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 4 |
| 8 | 1 | 2 | 4 | 8 |

| $\circ$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 6 | 6 |
| 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |

**3.** Să se demonstreze că legea „$\circ$" este lege de compoziţie pe $M=[-3, 5]$, unde $x\circ y=xy-4x-4y+20$, $\forall x, y\in M$.

*Soluţie*. Observăm că legea dată se mai poate scrie: $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$. Dacă $x, y\in[-3, 5]$, atunci $x-4, y-4\in[-1, 1]$ şi deci $(x-4)(y-4)\in[-1, 1]$. Atunci rezultă că $((x-4)(y-4)+4)\in[-3, 5]$ şi deci $x\circ y\in M$.

**4.** Fie mulţimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}$.

Să se demonstreze că înmulţirea matricelor este lege de compoziţie pe $M$.

*Soluţie.* Notăm $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Vom demonstra că $A(x) \cdot A(y) \in M$ pentru orice $x,\ y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Într-adevăr,

$$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2xy-x-y & 0 & -(2xy-x-y) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(2xy-x-y) & 0 & 1+2xy-x-y \end{pmatrix} =$$

$= A(2xy - x - y)$.

Pentru că $A(x) \cdot A(y) \in M$, trebuie să demonstrăm că $1 + 2xy - x - y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ pentru orice $x,\ y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Într-adevăr, din $x,\ y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ rezultă $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$, adică $2x - x - y + \frac{1}{2} \neq 0$, de unde $2xy - x - y + 1 \neq \frac{1}{2}$.

**5.** Câte elemente are mulţimea $M = \left\{ A^n \middle| A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$?

*Soluţie.* Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_3$ şi deci $M = \{O_3, A, A^2\}$. $M$ are trei elemente.

PROBLEME PROPUSE

**1.** Justificaţi de ce împărţirea nu este operaţie algebrică (lege de compoziţie internă) pe fiecare din mulţimile $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

**2.** Justificaţi de ce adunarea, înmulţirea, scăderea şi împărţirea nu sunt legi de compoziţie pe mulţimea numerelor iraţionale.

**3.** Pentru $a, b \in \mathbf{N}^*$ notăm cu $a \vee b$, respectiv cu $a \wedge b$, c.m.m.d.c., respectiv c.m.m.m.c. al numerelor $a$ şi $b$.

**a)** Să se calculeze $10 \vee 12$, $10 \vee (12 \vee 8)$ şi $(10 \vee 12) \vee 8$.

**b)** Să se calculeze $6 \wedge 15$, $6 \wedge (9 \wedge 15)$ şi $(6 \wedge 9) \wedge 15$.

**c)** Să se demonstreze că, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$, avem:

$1 \vee a = 1$, $a \vee a = a$, $1 \wedge a = a$, $a \wedge a = a$.

**4.** Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$ şi fie mulţimea $D(a) = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \mid a\}$.

Fie „$\vee$” şi „$\wedge$” operaţiile algebrice de „luare” a c.m.m.d.c., respectiv a c.m.m.m.c.

**a)** Să se determine $D(8)$, $D(13)$, $D(36)$.

**b)** Sunt „$\vee$” şi „$\wedge$” legi de compoziţie pe $D(8)$, $D(13)$, $D(36)$?

**c)** Sunt „$\vee$” şi „$\wedge$” legi de compoziţie pe $D(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$?

**5. a)** Să se demonstreze că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, avem:

$$\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \ \min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

**b)** Pe care din mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, „max” şi „min” sunt legi de compoziţie?

**c)** Să se scrie tabelele legilor „max” şi „min” pe mulţimile $M_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $M_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

**6.** Să se demonstreze că operaţia „$\circ$” este lege de compoziţie pe mulţimea indicată în fiecare din cazurile:

**a)** $M = (3, \infty)$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$;

**b)** $M = [3, \infty)$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$;

**c)** $M = [4, 6]$, $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$;

d) $M = 2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $x \circ y = \dfrac{xy + x + y - 1}{2}$;

**e)** $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$;

**f)** $M = (-\infty, 1)$, $x \circ y = \dfrac{xy-2}{x+y-3}$.

**7.** Fie mulţimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Fie funcţia $f : M \times M \to M$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} |x-y|, \ x \leqslant 2, \ y \leqslant 2 \\ a - |x-y|, \text{ în celelalte cazuri} \end{cases}.$$

Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f$ să fie lege de compoziţie.

**8.** Să se demonstreze că „$\cdot$” este lege de compoziţie internă pe mulţimea indicată:

**a)** $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \middle| \, a > -1 \right\}$; **b)** $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix} \middle| \, a > -1 \right\}$;

**c)** $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$; **d)** $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q}, \, 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$.

# I.2. Clase de resturi modulo $n$

Fie numărul natural $n \geqslant 2$. Împărţim mulţimea numerelor întregi în „clase" în modul următor: fiecare clasă cuprinde toate numerele întregi care împărţite la $n$ dau acelaşi rest. O astfel de clasă se numeşte *clasă de resturi modulo n*. Deoarece restul împărţirii oricărui număr întreg la $n$ este unul din numerele 0, 1, 2, 3, ... , $n$–1, rezultă că există exact $n$ clase de resturi modulo $n$. Aceste clase le notăm $C_k$ sau $\hat{k}$, unde $0 \leqslant k \leqslant n-1$ şi $C_k = \hat{k} = \{nm + k | m \in \mathbb{Z}\}$. Avem deci $C_0 = \hat{0} = \{nm | m \in \mathbb{Z}\}$, $C_1 = \hat{1} = \{nm + 1 | m \in \mathbb{Z}\}$, etc.. Orice număr dintr-o anumită clasă se numeşte *reprezentant al clasei*. De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 6, numerele –8, –2, 4, 10, 16 sunt reprezentanţi ai clasei $C_4$. De obicei, ca reprezentant luăm cel mai mic reprezentant număr natural. În cazul claselor de resturi modulo 6 avem deci $\widehat{-8} = \widehat{-2} = \widehat{10} = \widehat{16} = \hat{4} = C_4$.

Pe mulţimea claselor de resturi modulo $n$ (notată $\mathbb{Z}_n$) introducem două operaţii notate aditiv şi multiplicativ definite astfel: $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$. Tablele adunării şi înmulţirii definite ca mai sus pentru $\mathbb{Z}_4$ sunt:

| $+$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |

| $\cdot$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ |

**Definiţie.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ şi $x, y \in \mathbb{Z}$. Spunem că $x$ este congruent cu $y$ modulo $n$ dacă $n \mid x - y$. Notăm $x \equiv y \pmod{n}$.

**Teoremă.** Relaţia de congruenţă modulo $n$ are proprietăţile:

a) este reflexivă: $x \equiv x \pmod{n}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$;

b) este simetrică: $x \equiv y \pmod{n}$, $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$;

c) este tranzitivă: $x \equiv y \pmod{n}$, $y \equiv z \pmod{n}$, $x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \equiv z \pmod{n}$.

*Demonstraţie.* a) $x - x = 0$, $n \mid 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2 \Rightarrow x \equiv x \pmod{n}$;

b) $x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow n \mid x - y \Rightarrow$ există $d \in \mathbb{Z}$ cu $x - y = dn \Rightarrow y - x = (-d) \cdot n$, $-d \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \mid y - x$;

c) $x \equiv y \pmod{n}$, $y \equiv z \pmod{n} \Rightarrow$ există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x - y = na$, $y - z = nb$. Cum $x - z = (x - y) + (y - z) = n(a + b)$ şi $a + b \in \mathbb{Z}$, rezultă că $n \mid x - z$ şi deci $x \equiv z \pmod{n}$.

**Observație.** Congruența modulo $n$ este compatibilă cu adunarea și înmulțirea numerelor întregi, adică:

a) pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ cu $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$, avem $a + c \equiv (b + d) \pmod{n}$;

b) pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ cu $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$, avem $ac = (bd) \pmod{n}$.

**Problemă rezolvată**

**a)** Să se scrie tablele adunării și înmulțirii în $\mathbb{Z}_6$.

**b)** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_6$: $\widehat{-14} + \widehat{-13}$; $\widehat{-14} \cdot \widehat{-33}$.

**c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuațiile $x + \hat{4} = \hat{2}$, $x \cdot x = \hat{4}$.

**d)** Să se demonstreze că există în $\mathbb{Z}_6$ ecuații de forma $\hat{a} \cdot x = \hat{b}$, $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\hat{a} \neq \hat{0}$, care au cel puțin două soluții.

**e)** Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid \text{există } y \in \mathbb{Z}_6 \text{ cu } \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{1}\}$.

*Soluție.* a) Tablele adunării și înmulțirii în $\mathbb{Z}_6$ sunt:

| $+$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{4}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{5}$ | $\hat{5}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ |

| $\cdot$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{4}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{4}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{4}$ | $\hat{0}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{5}$ | $\hat{0}$ | $\hat{5}$ | $\hat{4}$ | $\hat{3}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ |

b) Avem $-14 = -3 \cdot 6 + 4$; $-33 = -6 \cdot 6 + 3$ și deci $\widehat{-14} = \hat{4}$, $\widehat{-33} = \hat{3}$.

Rezultă că $\widehat{-14} + \widehat{-33} = \hat{4} + \hat{3} = \hat{1}$; $\widehat{-14} \cdot \widehat{-33} = \hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{0}$.

c) $x + \hat{4} = \hat{2} \Leftrightarrow x = \hat{4}$; $\qquad \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{4} \Leftrightarrow x \in \{\hat{2}, \hat{4}\}$

d) $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{4} \Leftrightarrow x \in \{\hat{2}, \hat{5}\}$;

e) Avem $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{1}$ doar în cazurile $\hat{1} \cdot \hat{1}$, $\hat{5} \cdot \hat{5}$. Rezultă că $A = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.


**1.** Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, congruența modulo $n$ este compatibilă cu adunarea și înmulțirea numerelor întregi.

**2.** Fie $\mathbb{Z}_n$ mulțimea claselor de resturi pentru $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

**a)** Să se scrie tablele adunării și înmulțirii modulo $n$.

**b)** Să se demonstreze că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_n$, ecuația $a + x = b$ are soluție unică.

**c)** Să se demonstreze că, pentru $n \in \{2, 3, 5\}$ și pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\}$, ecuația $ax + b = \hat{0}$ are soluție unică.

**d)** Să se determine cazurile în care ecuația $ax + b = \hat{0}$, $a, b \in \mathbb{Z}_4 - \{\hat{0}\}$, nu are soluție unică în $\mathbb{Z}_4$.