

Ministerul Educației Naționale

Mihaela Singer

Sorin Borodi

Vlad Copil

Emilia Iancu

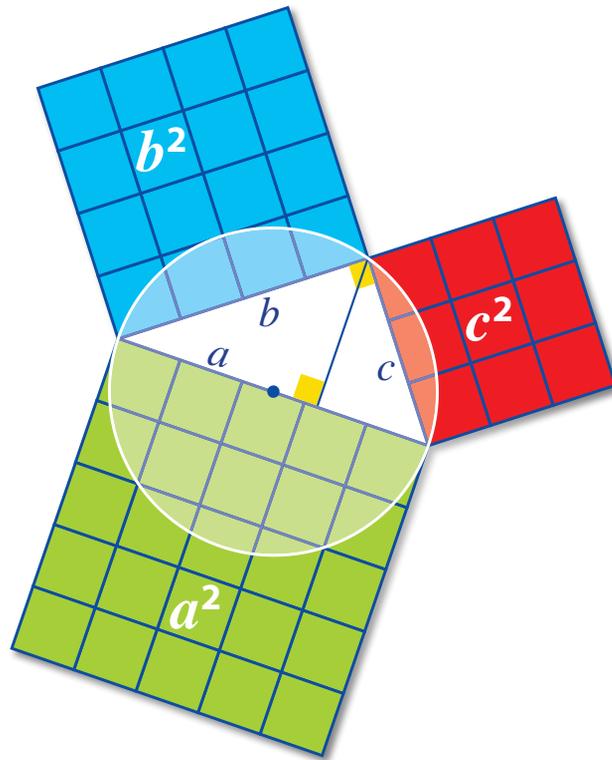
Maria Popescu

Vicențiu Rusu

Cristian Voica

# MATHEMATIK

Lehrbuch für die 7. Klasse



Die Schüler erhalten das Schulbuch kostenlos. Beginnend mit dem Schuljahr 2019-2020 wird das Buch vier Jahre lang verwendet.

Schulinspektorat .....

Schule / Kolleg / Lyzeum .....

DIESES LEHRBUCH WURDE VERWENDET VON:

Jahr	Name des Schülers	Klasse	Schuljahr	Zustand des Lehrbuches*	
				Gedruckte Version	
				Beim Empfang	Bei der Rückgabe
1					
2					
3					
4					

\* Der Zustand des Lehrbuches wird beschrieben als: *neu, gut, gepflegt, ungepflegt, beschädigt*.

Die Lehrer prüfen die Richtigkeit der Eintragungen.

Die Schüler sind angehalten, in das Buch nicht zu schreiben.

*Referenten:* Conf. univ. dr. Eugen Păltănea

*Redaktion:* Nicoleta Puiu

*Abbildungen:* Anita Ionescu

*Tehnoredaktion:* Dana Manolescu, Răzvan Anisoiu

*Umschlag:* Dana Manolescu, Răzvan Anisoiu

*Fotonachweise:* pixabay.com; freepik.com;

wikipedia.org; commons.wikimedia.org;

pxhere.com; flickr.com; vecteezy.com.

© 2019 Editura Sigma

Alle Rechte an dieser Ausgabe gehören dem Sigma-Verlag.

Kein Teil dieses Werkes kann ohne schriftliche Zustimmung des Sigma Verlages reproduziert werden.

ISBN: **978-606-727-368-7**

**Editura Sigma**

*Hauptsitz*

Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București,  
cod: 010169

Tel.: 021.243.40.14; 0748.100.719

E-mail: office@librariesigma.ro

Web: www.librariesigma.ro

*Versand*

Str. Nicolae Cartoian, Nr. 11, București

Tel.: 021.243.40.52; 0748.100.719; 0758.044.827

E-mail: comenzi@librariesigma.ro

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**Matematică : manual pentru clasa a VII-a / Mihaela Singer (coord.),**

Sorin Borodi, Vlad Copil, .... - București : Sigma, 2019

ISBN 978-606-727-368-7

I. Singer, Mihaela

II. Borodi, Sorin

III. Copil, Vlad

## Vorwort

Die Mathematik ermöglicht uns, die Wirklichkeit um uns herum besser zu verstehen. Zum Beispiel lässt sich die Spiralform, mit der uns die Natur oft beeindruckt (Schnecken, Verteilung von Aloe-Vera-Blättern oder Anordnung der Sonnenblumenkerne usw.) mathematisch durch die Bildung der berühmten Fibonacci-Zahlenkette erklären:  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$  In diesem Sinne ermöglicht der Mathematiklehrplan für die 7. Klasse relevante Zusammenhänge zwischen mathematischen Konzepten und dem konkreten Alltag sowie zwischen Algebra und Geometrie dauerhaft zu erkennen.

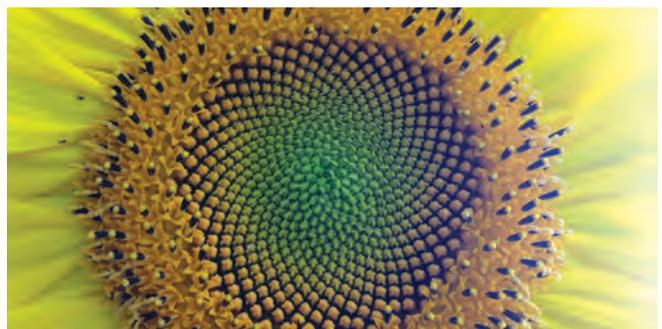
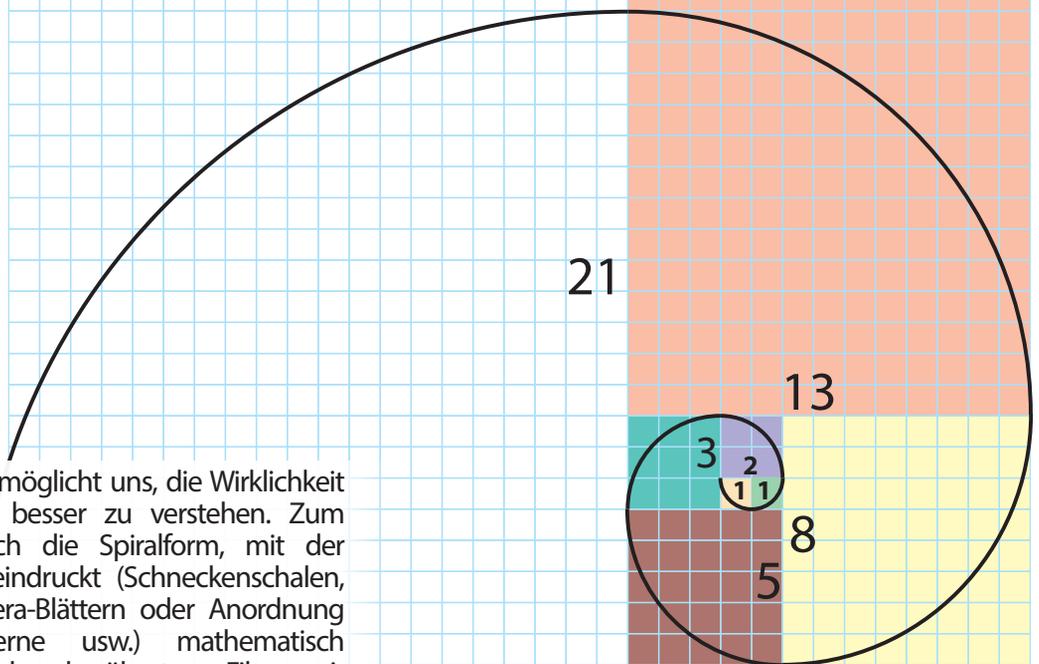
Mithilfe dieses Schulbuchs wird der Schüler überzeugt, dass Mathematik nützlich ist: Es erklärt die Struktur vieler Phänomene in unserer Welt und bietet allgemeine Modelle, mit denen sich praktische Aufgaben lösen lassen. Das Schulbuch beeindruckt durch Bilder und die Art der Kommunikation. Der Schüler wird als Gesprächspartner behandelt, der mathematische Konzepte verstehen und gleichzeitig aber auch spielen möchte. Alle Inhalte des Lehrplans werden entsprechend durchgenommen und exemplarisch dargestellt, wobei der Schwerpunkt auf der Bildung und Entwicklung allgemeiner und spezifischer Kompetenzen liegt.

Ich schätze das gesamte Konzept des Schulbuchs und die hervorragende Grafik. Die Lerneinheiten haben eine einheitliche, standardisierte Struktur. Schwerpunkt wird auf die praktischen Anwendungen des vorgestellten Themas gelegt und somit wird das Interesse der Schüler erweckt. Die Sprache ist angemessen. Die gelösten Aufgaben werden sorgfältig erklärt und die Anwendungen sind umfangreich und vielfältig. In jeder Lektion gibt es Anwendungen in vier Schwierigkeitsgraden.

Die Mathematiklehrer finden in diesem Lehrbuch umfangreiche Ressourcen für die Gestaltung des Unterrichts.

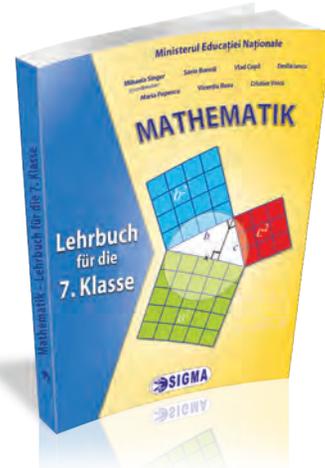
Die besten Evaluatoren des Lehrbuchs sind natürlich die Schüler!

*Conf. univ. dr. Eugen Păltănea*



# Das Lehrbuch

Das Lehrbuch enthält 9 Lerneinheiten. Jede Lerneinheit enthält einen Einstufungstest, ein Projekt, verschiedene Lerninhalte, Anwendungen, Wiederholungsaufgaben, eine Zusammenfassung und Tests (Test 1, Test 2).



Auf der ersten Seite einer jeden Lerneinheit findest du: den Titel der Lerneinheit, die Beschreibung eines Projekts und Arbeitshinweise.

Praktische Anwendung der gelernten Inhalte.

**4. Lerneinheit: Längen, Umfang, Flächeninhalt** **Stapfen des Projekts**

**Projekt: Bunte Pflaster**

**Anleitungen**

- Notwendige Materialien: Papier, Lineal, bunte Stifte
- Ziel: Interessante Deckungen für Flächen zeichnen und berechnen.

**Durchführung**

Arbeite in Gruppen von drei, vier oder fünf Kollegen!

- Erstelle mithilfe von bunten Vielecken interessante Muster in der Ebene. Unten ist ein Modell dargestellt. Teste eure Fantasie und erstelle Kunstwerke!
- Erstelle ein Arbeitsblatt, mit vorgeschlagenen und gelösten Aufgaben für euer Bild.
- Sucht die Aufgaben, die mit markiert sind.
  - Löst sie!
  - Vervollständige die Lösung, mit Zeichnungen.
  - Verändere die Aufgaben, sodass neue entstehen!
  - Erstelle ein Poster mit allen Materialien.

**Zu Beginn**

- Zeichne folgende Abbildung ins Heft. Achte auf das Muster.
- Wie viele kleine Sechsecke sind in der Abbildung? Und Dreiecke? Und Parallelogramme, aus zwei Dreiecken gebildet?
- Berechne den Flächeninhalt der Figur, wenn der Flächeninhalt eines kleinen, gleichseitigen Dreiecks  $2\sqrt{3} \text{ mm}^2$  beträgt.

**Gruppenarbeit**

In eurer Gruppe:

- Besprecht die Etappen des Projekts und verteilt die Aufgaben.
- Löst eure eigene Aufgabe, arbeite aber auch mit den anderen zusammen, damit die Gruppe am Ende zu einem guten Ergebnis kommt.
- Besprecht die Lösung und erörtere die Form des Posters. Verwendet alle von euch erstellten Materialien.

**Präsentation**

Arbeite mit der ganzen Klasse!

- Stelle die Poster aus.
- Jede Gruppe wird die Poster der anderen Gruppen bewerten.
  - Stimme ab welches Poster euch am besten gefallen hat.
  - Achtung! Keine Gruppe darf für ihr eigenes Poster abstimmen.
- Zähle die Punkte zusammen und bestimme die Siegergruppe.

**3. Lektion: Der Flächeninhalt des Dreiecks** **Ziel der Lektion**

**Problemsituation**

Am Samstag feiere ich meinen Geburtstag. Das Tischchen für meinen neuen Anzug werde ich folgenderweise fällen:

Wann wirst du es fällen? In der Brautstätte? Ist es leicht sichtbar?

**Wir lernen.** Wie den Flächeninhalt des Dreiecks?

**Beweis**

Voraussetzung:  $ABC$  Dreieck,  $BC = a$ ,  $AE \perp BC$ ,  $E \in BC$ ,  $AE = h$ .

Behauptung:  $F_{ABC} = \frac{1}{2}ah$

Beweis: Wir zeichnen das Parallelogramm  $ABCD$ . Dann  $F_{ABC} = F_{ACD}$  und  $F_{ACD} = F_{ACDE}$ .  
Weil  $a \cdot h = F_{ACDE} = 2 \cdot F_{ABC}$ , folgt, dass  $F_{ABC} = \frac{1}{2}ah$ .

**Erweiterung**

Wie berechnen wir den Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks mit der Grundlinie  $a$  und der entsprechenden Höhe  $h$  ist  $F = \frac{1}{2}ah$ .

folglich  $F_{ABC} = \frac{1}{2}K_1 \cdot K_2$ ,  $K_1 = \frac{1}{2}a \cdot h$ .  
Also  $h = \frac{2K_1}{a}$ .

**Mündliche Übung**

geführe Schritte, um den Flächeninhalt zu bestimmen und erkläre das Ergebnis.

**Testen der Grundkenntnisse**

1) Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundlinie  $5 \text{ cm}$  und der Höhe  $4 \text{ cm}$ .  
2) Dreieck  $ABC$  ist gleichseitig mit der Seite  $\sqrt{5} \text{ cm}$ . Berechne den Umfang des Dreiecks  $ABC$ .

**Gelöste Aufgabe**

Im Dreieck  $ABC$  sind  $AB = 45 \text{ mm}$ ,  $BC = 4 \text{ cm}$ . Wenn die Länge der Höhe  $CD$   $22 \text{ mm}$  beträgt, berechne die Länge der Höhe  $AE$  des Dreiecks  $ABC$ .

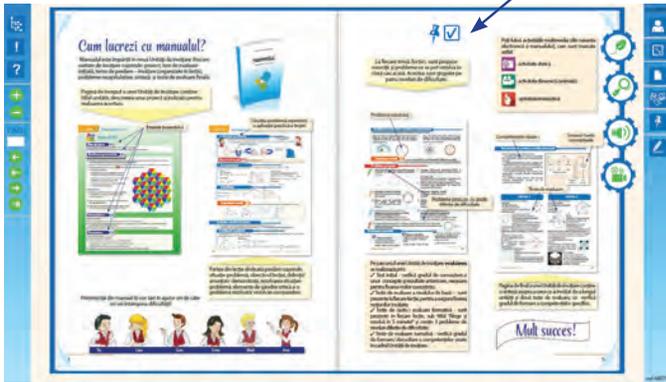
Lösung:  
 $F_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{45 \cdot 22}{2} \text{ mm}^2 = 495 \text{ mm}^2$   
 $F_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{40 \text{ mm} \cdot AE}{2} = 495 \text{ mm}^2 \Rightarrow AE = \frac{2 \cdot 495}{40} \text{ mm} = 24,75 \text{ mm}$

Deine Freunde aus dem Lehrbuch werden dir jedes Mal, wenn du Schwierigkeiten hast, helfen!

Der Teil der Stunde, der dem Unterrichten gewidmet ist, umfasst: eine Problemsituation, das Ziel der Lektion, Definitionen / Aussagen / Beweise, die Lösung des Problems, Elemente des kritischen und kreativen Denkens und eine gelöste Aufgabe/ mit verschiedenen Lösungen.



## Digitales Buch



Die multimedialen Tätigkeiten des digitalen Lehrbuchs sind wie folgt beschriftet:

-  - statische Tätigkeit
-  - dynamische Tätigkeit (Animation)
-  - interaktive Tätigkeit

Jedes Thema enthält Übungen und Aufgaben die in der Klasse oder zu Hause gelöst werden können. Sie sind in 4 Schwierigkeitsstufen unterteilt.

**Gelöste Aufgabe / Verschiedene Lösungen** Verschiedene Lösungen

Die Schüler haben ein regelmäßiges Sechseck mit verschiedenen Methoden gelöst. Ich habe die in der Lektion beschriebene Konstruktion verwendet. Ich habe  $360^\circ : 6 = 60^\circ$  berechnet, dann  $6$  Mittelpunktswinkel von je  $60^\circ$  gezeichnet und zum Schluss die erhaltenen Punkte des Kreises verbunden.

Ich habe gleich  $g$  sodass sie jeweils auch Nachbarkreise enthalten. Dann habe ich die von ihnen auf dem ursprünglichen Kreis bestimmten Punkte verbunden.



**Mündliche Übung** ist rascher? Und interessanter? Begründe deine Antworten!

aus den vorigen Zeichnungen ein gleichseitiges Dreieck erhalten?

**Aufgaben**

- Nenne die unten dargestellten regelmäßigen Vielecke und berechne die Maße ihrer Winkel.
- Mithilfe der geometrischen Zeichengeräte konstruiere ein regelmäßiges Vieleck mit  $n$  Seiten, falls: a)  $n = 4$ ; b)  $n = 6$ ; c)  $n = 8$ .
- Berechne das Maß eines Winkels eines regelmäßigen a) 10-; b) 12-; c) 18-Ecks.
- Aus einer Ecke eines regelmäßigen 9-Ecks werden alle Diagonalen gezeichnet. Welche Maße haben die entstandenen Winkel?
- Berechne die Seitenlängen der drei gleichseitigen Dreiecke, dessen  $l$  von  $18\text{ cm}$ .
- Berechne genau 3 Seitenlängen eines  $n$ -Ecks.
- Zeige, dass alle Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks kongruent sind.
- Beweise, falls alle Diagonalen eines regelmäßigen  $n$ -Ecks ( $n \geq 4$ ) kongruent sind, dann ist  $n = 4$  oder  $5$ .
- In der Abbildung ist ein regelmäßiges Achteck einem Kreis eingeschrieben. Berechne das Maß des bunten Winkels, der von den Verlängerungen zweier Seiten des Achtecks entstand.

**Wähle aus und löse in 5 Minuten!**

**A** Das Maß eines Winkels des regelmäßigen 9-Ecks ist: A.  $40^\circ$ ; B.  $60^\circ$ ; C.  $90^\circ$ ; D.  $140^\circ$ .

**B** Das Maß eines Außenwinkels des regelmäßigen 18-Ecks ist: A.  $20^\circ$ ; B.  $80^\circ$ ; C.  $90^\circ$ ; D.  $160^\circ$ .

**C** Das Maß eines Winkels eines regelmäßigen Vielecks ist  $168^\circ$ . Die Seitenanzahl ist: A. 20; B. 24; C. 30; D. 36.

Aufgaben mit verschiedenen Schwierigkeitsgraden

### Zusammenfassung/ mind map

### Kompetenzen

**Zusammenfassung**

Der Kreis

- Sehnen
- Bogen
- Winkel
- Länge des Kreises
- Regelmäßige Vielecke
- Tangente des Kreises
- Diskurs-flächeninhalt

**Kann ich das?**

- Die Elemente des Kreises und ihre Eigenschaften erkennen;
- Die Eigenschaften der Bogen, Sehnen, oder Tangenten anwenden;
- Die Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke mathematisch ausdrücken;
- Die Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke durch geometrische Darstellungen interpretieren;
- Die Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke in der Praxis anwenden.

**TEST 1**

- Beobachte die Figur und s...  
- Ein Durchmesser ist ...  
- Der Kreismittelpunkt ist ...  
- Der von der Sehne  $AM$  überspannte Bogen enthält auch Punkt ...
- Berechne die Maße der Winkel, die in dem regelmäßigen 8-Eck in der Figur nebenan markiert sind.
- Zeichne das gleichseitige Dreieck  $AMP$  mit dem Umkreis mit dem Mittelpunkt  $A$ . Zeichne die Tangente  $MB$  des Kreises. Verwende das Zeichen  $\perp$ , um mithilfe mathematischer Symbole auszudrücken, dass  $MB$  eine Tangente ist.
- $AM$  und  $AC'$  sind tangente an den Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$ . Falls das Maß von  $\angle BAC = 50^\circ$  beträgt, berechne das Maß des Winkels  $BDC$ .
- Die Parkettierung aus der unteren Darstellung besteht aus regelmäßigen Sechsecken. Beweise, dass es eine Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken gibt, deren Ecken die Mitten der Sechsecke sind.

**TEST 2**

Regelmäßiges

- Zeichne das Quadrat  $ABCD$  mit dem Umkreis mit dem Mittelpunkt  $O$ . Zeichne die Tangente  $CT$ . Verwende das Zeichen  $\perp$ , um mithilfe mathematischer Symbole auszudrücken, dass  $CT$  eine Tangente ist.
- Beweise, dass die Gerade  $l$ , aus der Figur senkrecht auf zwei Seiten des regelmäßigen Achtecks steht und durch deren Mitten läuft.
- Ein unvollendete Glasmaler sieht aus wie in der Darstellung. Der Radius ist  $1,5\text{ m}$ . Berechne den Flächeninhalt des fehlenden Glasstückes.

- Die Evaluation in einer Lerneinheit erfolgt durch:
- ✓ Einstufungstest- Überprüfung der Vorkenntnisse die für das Aneignen der neuen Kenntnisse notwendig sind;
  - ✓ Testen der Grundkenntnisse – in jeder Stunde für das festigen der gelernten Kenntnisse;
  - ✓ Selbstbewertung - sind in jeder Stunde unter "Wähle und löse in 5 Minuten!" zu finden und enthalten 3 Aufgaben mit verschiedenen Schwierigkeitsgraden;
  - ✓ Tests - das Niveau der erreichten Kompetenzen wird für die gegebene Lerneinheit überprüft.

Am Ende einer jeden Lerneinheit gibt es eine Zusammenfassung der gelernten Begriffe und zwei Tests.

# Viel Erfolg!

# Inhalt

<b>1. Lerneinheit: Zahlen und Rechenoperationen</b>	<b>8</b>
Projekt: <i>Algebra und Geometrie im quadratischen Raster.</i>	
Einstufungstest	8
Natürliche Zahlen; Rationale Zahlen; Zerlegungen	10
Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit rationalen Zahlen.	
Umkehroperationen	12
Die Quadratwurzel aus einem vollständigen Quadrat	14
Schätzen der Quadratwurzel aus einer Zahl	16
Wiederholungsaufgaben. Tests	18
<b>2. Lerneinheit: Das Viereck</b>	<b>20</b>
Projekt: <i>Parallelismus und Teppiche.</i> Einstufungstest	20
Vielecke (Polygone)	22
Die Winkelsumme im konvexen Viereck	24
Das Parallelogramm. Definition und Eigenschaften	26
Bedingungen, damit ein Viereck ein Parallelogramm ist	30
Besondere Parallelogramme: Rechteck, Rhombus, Quadrat; Eigenschaften	34
Das Trapez. Besondere Trapeze	38
Die Mittellinie im Dreieck. Die Mittellinie im Trapez	42
Wiederholungsaufgaben. Tests	46
<b>3. Lerneinheit: Die Menge der reellen Zahlen</b>	<b>48</b>
Projekt: <i>Die Spirale der Wurzeln.</i> Einstufungstest	48
Rationale Zahlen; irrationale Zahlen	50
Die Menge der reellen Zahlen	52
Runden (Approximation) einer reellen Zahl	55
Rechenregeln für Quadratwurzeln	58
Addition und Subtraktion der reellen Zahlen	61
Multiplikation der reellen Zahlen. Das geometrische Mittel	64
Verhältnisse reeller Zahlen. Das arithmetische Mittel	67
Potenzen reeller Zahlen mit ganzem Exponenten	70
Die Reihenfolge der Rechenoperationen	72
Wiederholungsaufgaben. Tests	74
<b>4. Lerneinheit : Länge, Umfang, Flächeninhalt</b>	<b>76</b>
Projekt: <i>Bunte Pflastersteine.</i> Einstufungstest	76
Bestimmen der Länge von Strecken; der Umfang eines Vielecks	78
Der Flächeninhalt eines Parallelogramms; der Flächeninhalt eines Rhombus	80
Der Flächeninhalt eines Dreiecks	82
Der Flächeninhalt eines Trapezes	84
Wiederholungsaufgaben. Tests	86

## Allgemeine Kompetenzen Spezifische Kompetenzen

### ● A.K. 1. Erkennen von Daten, Größen und mathematischen Beziehungen in verschiedene Kontexte

Erkennen der Zahlen die zu den verschiedenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  gehören. Erkennen von Aufgaben in Lebenssituationen die mithilfe von linearen Gleichungen oder Gleichungssysteme gelöst werden. Erkennen von Informationen aus Tabellen, Grafiken und Diagrammen. Erkennen der besonderen Vierecke in geometrischen Kontexten. Erkennen der Elemente des Kreises und/oder die der regelmäßigen Vielecke in geometrischen Kontexten. Erkennen der ähnlichen Dreiecke in geometrischen Kontexten. Erkennen der Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks in geometrischen Kontexten.

### ● A.K. 2. Bearbeiten von quantitativen, qualitativen und strukturellen Daten aus verschiedenen Informationsquellen.

Anwenden der Rechenregeln zum Schätzen und Approximieren von reellen Zahlen. Anwenden der Rechenregeln mit reellen Zahlen zur Überprüfung der Lösungen von Gleichungen oder von linearen Gleichungssystemen. Verarbeitung von Daten in Form von Tabellen, Grafiken oder Diagrammen im Sinne ihrer Registrierung, Ermittlung und Visualisierung. Die Beschreiben der Vierecke anhand ihrer Definitionen und Eigenschaften in vorgegebenen geometrischen Konfigurationen. Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke die in einen Kreis eingeschrieben sind. Ähnlichkeitssätze der Dreiecke. Anwenden der metrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck und Bestimmen der wichtigen Linien.

### ● A.K. 3. Verwendung spezifischer Konzepte und Algorithmen in unterschiedlichen mathematischen Kontexten

Verwendung von Algorithmen und Eigenschaften von Operationen zur Durchführung von Rechnungen mit reellen Zahlen. Verwendung äquivalenter Schreibweisen beim Lösen einiger Gleichungen und linearer Gleichungssysteme.. Auswahl der geeigneten Darstellungsmethode für die Aufgaben in denen funktionale Abhängigkeiten und ihre Darstellungen vorkommen. Lösen der Aufgaben mithilfe der Eigenschaften von Vierecken. Lösen der Aufgaben mithilfe der Eigenschaften es Kreises. Bestimmen von Längen, Winkelmaßen und Flächen mithilfe der Eigenschaften der ähnlichen Dreiecke. Beweisen der metrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck.

● **A.K. 4. Verwenden der mathematischen fachspezifischen Sprache für Informationen, Schlussfolgerungen und Lösungen in gegebenen Situationen**

Verwenden der Fachsprache bezüglich der reellen Zahlen (Vorzeichen, absoluter Betrag, entgegengesetztes Element, Umkehrelement). Schreiben der Lösung von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen. Verwenden der mathematischen Fachbegriffe für die Datenverarbeitung. Verwenden der spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Vierecke. Verwenden der spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Eigenschaften des Kreises und der Vielecke. Verwenden der Ähnlichkeit spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Eigenschaften von geometrischen Figuren. Verwenden der spezifischen mathematischen Fachbegriffe für die Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks

● **A.K. 5. Analyse der mathematischen Eigenschaften einer gegebenen Situation**

Strategien entwickeln, um Aufgaben mit reellen Zahlen zu lösen. Methoden zur Lösung von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen bestimmen. Analyse praktischer Situationen mithilfe der Datenverarbeitung. Auswahl der geeigneten geometrischen Darstellungen zur Optimierung der Berechnung von Streckenlängen, Winkelmaße und Flächen. Erklären der Eigenschaften des regelmäßigen Kreises und der Vielecke anhand geometrischer Darstellungen. Interpretation der Ähnlichkeit von Dreiecken anhand geometrischer Darstellungen. Interpretation der metrischen Beziehungen zwischen den Elementen im rechtwinkligen Dreieck.

● **A.K. 6. Mathematische Modellierung einer gegebenen Situation durch Integration von Informationen aus verschiedenen Bereichen**

Mathematische Modellierung praktischer Beispiele, die Operationen mit reellen Zahlen enthalten. Verwendung von Gleichungen und / oder linearen Gleichungssystemen praktischen Beispielen. Umsetzung einer gegebenen Situation in eine entsprechende mathematische Darstellung (Text, Formel, Diagramm, Grafik). Verwenden der Vielecke bei geometrischen Darstellungen für die Modellierung bestimmter praktischer Beispiele. Mathematische Modellierung von praktischen Situationen mithilfe der regelmäßigen Vielecke oder Kreise. Verwenden der Ähnlichkeit der Dreiecke in praktischen Beispielen. Verwenden der metrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck in praktischen Beispielen.

<b>5. Lerneinheit: Der Kreis</b>	<b>88</b>
Projekt: <i>Schneeflockengeometrie</i> . Einstufungstest	88
Der Kreis. Elemente des Kreises	90
Mittelpunktswinkel. Umfangswinkel. Winkelmaße	92
Kongruente Sehnen und kongruente Bogen	95
Der Abstand vom Mittelpunkt des Kreises zu einer Sehne	98
Regelmäßige Vielecke, die im Kreis eingeschrieben sind	100
Tangente eines Kreises	102
Die Länge des Kreises; der Flächeninhalt des Diskus	105
Wiederholungsaufgaben. Tests	108
<b>6. Lerneinheit: Ähnlichkeit der Dreiecke</b>	<b>110</b>
Projekt: <i>Die Kunst der Fotografie</i> . Einstufungstest	110
Proportionale Strecken	112
Äquidistante Parallelen. Anwendungen	114
Lehrsatz des Thales. Kehrsatz des Satzes des Thales	116
Ähnliche Dreiecke	120
Der Hauptsatz der Ähnlichkeit	122
Der S. S. S. - Satz	126
Der S. W. S. - Satz	128
Der W. W. - Satz	130
Umfang und Flächeninhalt ähnlicher Dreiecke	132
Wiederholungsaufgaben. Tests	134
<b>7. Lerneinheit: Gleichungen und Gleichungssysteme</b>	<b>136</b>
Projekt: <i>Ein schwieriger Weg</i> . Einstufungstest	136
Umformen von Gleichungen in äquivalente Gleichungen	138
Gleichungen der Form $ax + b = 0$ , mit $a, b \in \mathbb{R}$	140
Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten. Reduktionsmethode	142
Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten. Substitutionsmethode	144
Aufgaben mithilfe von Gleichungen oder Gleichungssystemen gelöst	146
Wiederholungsaufgaben. Tests	148
<b>8. Lerneinheit: Metrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck</b>	<b>150</b>
Projekt: <i>Spiele mit Quadraten und Dreiecken</i> . Einstufungstest	150
Verhältnisgleiche Strecken im rechtwinkligen Dreieck	152
Der Satz des Pythagoras und seine Umkehrung. Anwendungen	155
Konstante Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck	158
Auflösen eines rechtwinkligen Dreiecks	162
Metrische Beziehungen in regelmäßigen Vielecken	164
Schätzen der Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe der metrischen Beziehungen	167
Wiederholungsaufgaben. Tests	170
<b>9. Lerneinheit: Datenverarbeitung</b>	<b>172</b>
Projekt: <i>Ein gesundes Mittagessen</i> . Einstufungstest	172
Das kartesische Produkt zweier nicht leeren Mengen	174
Das orthogonale Achsensystem	176
Der Abstand zwischen zwei Punkten der Ebene	178
Tabellen, Diagramme und Grafiken. Das Häufigkeitspolygon	180
Wiederholungsaufgaben. Tests	184
<b>Wiederholungsaufgaben</b>	<b>186</b>
<b>Lösungen</b>	<b>190</b>



## Algebra und Geometrie im quadratischen Raster

### Anleitungen

- ✓ **Notwendige Materialien:** Blätter aus dem Matheheft, Lineal, Buntstifte.
- ✓ **Ziel:** Ihr werdet mithilfe von Strecken mit gegebenen Längen interessante Figuren zeichnen und die Längen anderer Strecken bestimmen.

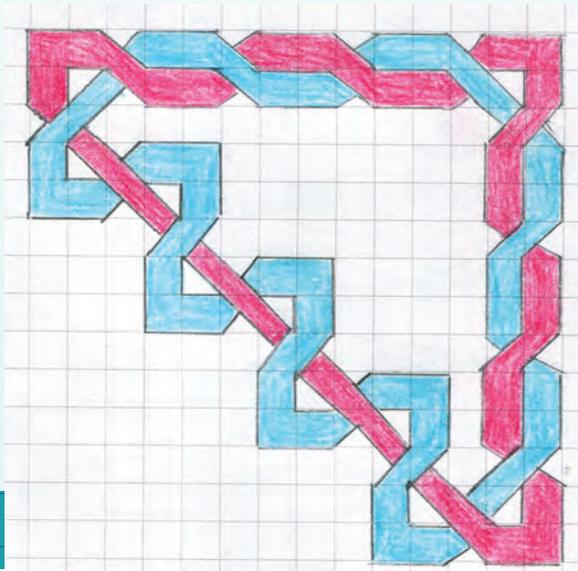
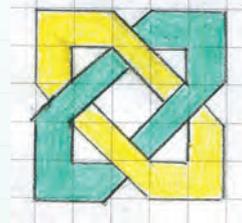
### Durchführung

Arbeitet in Dreier-, Vierer- oder Fünfergruppen!

- ✓ Zeichnet bunte „Geflechte“ wie jene in den dargestellten Modellen.
- ✓ Füllt für jedes Modell ein Arbeitsblatt mit:
  - Der Länge eines jeden „Kettengliedes“ (gebrochene geschlossene Linie);
  - Einem günstigen Näherungswert der Länge;
  - Rechenanleitungen.
- ✓ Verwendet für euer Projekt die, mit  bezeichneten Aufgaben. Dort findet ihr neue Methoden zum Berechnen von Streckenlängen. Benützt in euren Modellen Strecken mit Längen, die ihr in diesen Aufgaben berechnet.
- ✓ Erstellt ein Poster mit allen Materialien.

### Zu Beginn:

- ✓ Übertragt die nebenan dargestellte Figur in euer Heft (Beachtet die Einzelheiten).
- ✓ Berechnet die Gesamtlänge der horizontalen und vertikalen Strecken, die die rote „Kette“ begrenzen.



### Gruppenarbeit

In der Gruppe:

- ✓ Besprecht die Etappen des Projekts und verteilt die Aufgaben.
- ✓ Jeder erledigt seinen Auftrag, hilft aber auch den anderen, damit die Gruppe ein gutes Endprodukt erzeugt.
- ✓ Diskutiert und beschließt, wie euer Poster zum Schluss aussehen soll.

### Präsentation

Die ganze Klasse arbeitet mit!

- ✓ Stellt die Poster aus.
- ✓ Jede Gruppe bewertet die Poster der anderen Gruppen.
  - Stimmt ab welches Poster euch am besten gefallen hat.
  - Achtung! Keine Gruppe darf für ihr eigenes Poster abstimmen.
- ✓ Zählt die Punkte zusammen und bestimmt die Siegergruppe.

Beim Lösen folgender Aufgaben erinnerst du dich an Begriffe, die in dieser Lerneinheit notwendig sind. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhältst du einen Punkt. 1 Punkt von Amts wegen.

I. Schreibe nur die die fehlenden Wörter, sodass wahre Aussagen entstehen.

**Maßeinheiten;  
Umwandlungen**

1. Ergänze!  
a)  $3,4 \text{ m} = \dots \text{ cm}$ ; b)  $250 \text{ dm}^2 = \dots \text{ m}^2$ .

**Operationen mit  
rationalen Zahlen**

2. Berechne:  
a)  $1,2 + 3,56 = \dots$ ; b)  $2,4 \times 0,6 = \dots$ ; c)  $8,25 : 1,5$ ; d)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \dots$ ;  
e)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$ ; f)  $\frac{2}{5} : \frac{3}{10}$ ; g)  $3009 - 109 = \dots$ ; h)  $5 \cdot (-7) = \dots$ .

**Primzahlen**

3. Der Wahrheitswert der Aussage „Die folgenden Zahlen sind alle Primzahlen: 13; 23; 43; 53; 73; 83.“ ist ...

II. Schreibe den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht auf dein Lösungsblatt.

**Vergleichen der  
rationalen Zahlen**

4. Die größte der Zahlen  $-3,45$ ;  $2,2(32)$ ;  $1$ ;  $-12$ ;  $2,233$  ist:  
A.  $-12$ ; B.  $2,233$ ; C.  $2,2(32)$ ; D.  $-3,45$ .

**Teilbarkeit**

5. Die Einerziffer, die in das Kästchen  $\square$  geschrieben werden muss, damit die Zahl  $402\square$  durch 9 teilbar ist, ist:  
A. 10; B. 9; C. 8; D. 3.

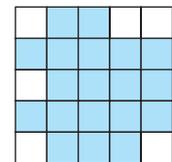
**Methoden zum Lösen  
von Aufgaben**

6. Geo denkt sich eine Zahl aus. Er multipliziert sie mit 3 und addiert zum Produkt 5. Er erhält 13,16. Die von Geo gewählte Zahl ist:  
A. 2,64; B. 3,72; C. 2,72; D. 6,02.

III. Schreibe die vollständigen Lösungen der folgenden Aufgaben auf dein Lösungsblatt.

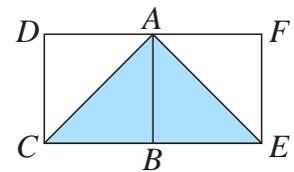
**Flächeninhalte**

7. Berechne den Flächeninhalt der bunten Figur. Als Maßeinheit gilt ein Kästchen des Rasters. Löse auf zwei Arten:  
a) Finde die Anzahl der Kästchen aus der Figur;  
b) Zähle alle Kästchen und die außerhalb der Figur.



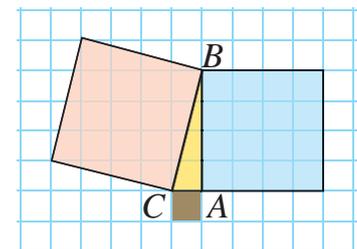
**Eigenschaften der  
Dreiecke**

8.  $ABCD$  und  $ABEF$  sind Quadrate.  
a) Zeige, dass die Dreiecke  $ABC$  und  $ADC$  kongruent sind.  
b) Beweise, dass das Dreieck  $ACE$  rechtwinklig und gleichschenkelig ist.



**Lehrsatz des Pythagoras**

9. Auf ein Matheblatt wurden das rechtwinklige Dreieck  $ABC$  und drei Quadrate, wie in der Figur nebenan, gezeichnet.  
a) Berechne die Flächeninhalte der Quadrate, mit den Seiten den Katheten  $AB$  und  $AC$ , wenn die Seite eines Kästchens  $0,5 \text{ cm}$  ist.  
b) Berechne den Flächeninhalt des Quadrates mit einer Seite  $BC$ .  
c) Schreibe eine Beziehung zwischen den Flächen von a) und b).



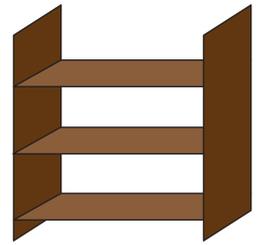
Falls du weniger als die Hälfte der Punkte erreicht hast, solltest du die Definitionen und Eigenschaften der oberen Begriffe wiederholen und festigen. Nur so kannst du die neuen Begriffe, die folgen, verstehen.

# 1. Lektion

## Natürliche Zahlen; rationale Zahlen; Zerlegen der Zahlen

### Problemsituation

Matei hat Bücher verschiedener Dicke: 1,8 cm oder 2,5 cm oder 2 cm. Er möchte ein Regal mit drei Pulten bauen und in jede Reihe nur Bücher derselben Dicke stellen. Welche ist die kürzeste Länge eines Pultes, wenn alle drei Pulte voll sein sollen? Wie viele Bücher sind dann in jeder Reihe?



**Lösung:**

Die Dicke der Bücher in Millimeter ist: 18, 25 und 20. Die Länge eines Pultes muss ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches sein, also  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$ .

Das heißt  $900 \text{ mm} = 90 \text{ cm}$ .

Die Anzahl der Bücher pro Pult ist:

$$900 : 18 = 50 \text{ (mit der Dicke 1,8 cm)}$$

$$900 : 25 = 36 \text{ (mit der Dicke 2,5 cm)}$$

$$900 : 20 = 45 \text{ (mit der Dicke 2 cm)}$$



Wir haben mit ganzen Zahlen gerechnet...

... damit wir die Teilbarkeit anwenden!



### Wir lernen

Welche Schreibweise der rationalen Zahlen ist zum Lösen der Aufgaben günstiger?

### Wir erinnern uns ...

- Natürliche Zahlen und Dezimalzahlen werden in der Zehnerbasis mithilfe der Ziffern 0, 1, ..., 9 geschrieben.

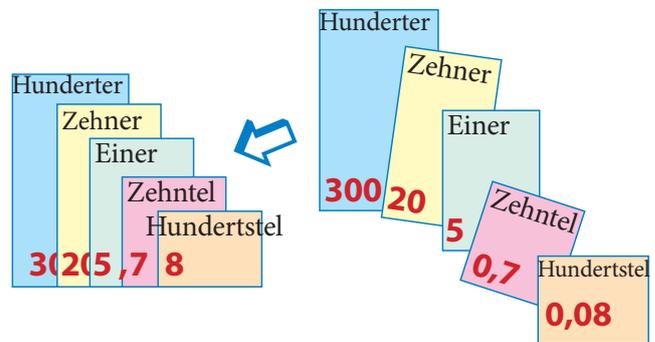
*Beispiel:* In der Zahl 325,78, gibt die Ziffer 2 die Anzahl der Zehner an und die 8 die Anzahl der Hundertstel. 325,78 ist eigentlich:

$$325,78 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2},$$

wobei  $10^{-1} = \frac{1}{10}$  und  $10^{-2} = \frac{1}{100}$ .

Die obere Summe ist die Schreibweise der Zahl 325,78 in der Basis 10, die Zerlegung der Zahl als **Summe** von Potenzen von 10.

*Beispiel:*  $20015,038 = 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} =$   
 $= 20000 + 10 + 5 + 0,03 + 0,008$



- Jede natürliche Zahl kann als **Produkt** von Primzahlen geschrieben werden.

*Beispiele:*  $234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

$$468 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$3072 = 2 \cdot 3 = 2^{10} \cdot 3$$

234	2
117	3
39	3
13	13
1	1

- Rationale Zahlen kann man mithilfe des Kommas (als Dezimalzahl) oder des Bruchstriches (als Bruch) darstellen.

*Beispiele:*

– Endliche Dezimalzahlen:  $0,7 = \frac{7}{10}$ ,  $2,75 = 2 + \frac{75}{100} = \frac{275^{(25)}}{100} = \frac{11}{4}$

– Reinperiodische Dezimalzahlen:  $0,(1) = \frac{1}{9}$ ,  $1,(34) = 1\frac{34}{99} = \frac{133}{99}$  oder  $1,(34) = \frac{134^\circ 1}{99} = \frac{133}{99}$

– Gemischtperiodische Dezimalzahlen:  $0,4(1) = \frac{41^\circ 4}{90} = \frac{37}{90}$ ,  $2,3(16) = 2\frac{316^\circ 3}{990} = 2\frac{313}{990} = \frac{2293}{990}$ .

### Mündliche Übung

Nenne die Regeln zum Umwandeln für jede Situation.

## Gelöste Aufgabe / Verschiedene Lösungen

Stelle fest wie viele natürliche Teiler 24 hat.

Geo, Anna und Lisa haben die Aufgabe verschiedenartig gelöst.

**Geo:**

Ich schrieb alle Zahlen von 1 bis 24 und die Teiler von 24 unterstrich ich.

1 2 3 4 5 6 7 8 9  
10 11 12 13 14 15  
16 17 18 19 20 21  
22 23 24.

Also hat 24 genau 8 Teiler.

**Anna:**

Ich haben mit dem kleinsten Teiler von 24 begonnen und dann gleich den Quotienten der Division von 24 durch ihn aufgeschrieben:

1 und 24; 2 und 12;  
3 und 8; 4 und 6.

Also hat 24 genau 8 Teiler.

**Lisa:**

Ich habe 24 in Primfaktoren zerlegt:  
 $24 = 2^3 \cdot 3$ .

Jeder Teiler von 24 hat die Form:

$2^a \cdot 3^b$ , wobei  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $b \in \{0, 1\}$ .

Weil  $a$  4 Werte annehmen kann und  $b$  2 Werte, gibt es für  $2^a \cdot 3^b$  genau 8 Werte.

Deshalb hat 24 genau 8 Teiler.

### Mündliche Übung

Welche Lösung ist die schnellste? Und die interessanteste? Begründe!

### Aufgaben

1. Schreibe alle natürlichen Zahlen von 10 bis 30 und unterstreiche die Primzahlen.

2. Hole die Ganzen aus den Brüchen heraus:

$$\frac{15}{7}; \frac{20}{3}; \frac{31}{5}.$$

3. a) Schreibe die rationalen

Zahlen in Dezimalform:  $\frac{5}{4}; \frac{14}{3}; \frac{23}{12}$

b) Schreibe die rationalen Zahlen als Bruch:  
2,35; 4,(6); 1,2(4).

4. Schreibe jede der folgenden Zahlen zwischen

zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen  $\frac{24}{7}$

;  $\frac{42}{5}$ ;  $-5,23$ ;  $13,85$ . Beispiel:  $-4 < -3,86 < -3$ .

6. Schreibe die unteren Zahlen als Summe von Potenzen von 10, wie im Beispiel  
2853; 308; 41,5; 28,06; 3,619; 43,28.

Beispiel:  $375 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$ ;

$42,96 = 4 \cdot 10 + 2 + 9 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$ .

5. Schreibe die folgenden Zahlen als Produkt von Primfaktoren: 63; 630; 6300.

7. Mati hat die Zahl 1050 als Produkt von Primfaktoren geschrieben.

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Verwende Matis Gleichung und zerlege die Zahlen: 10500; 2100; 3150 in Primfaktoren.

8. Wir schreiben 3,45 wie folgt:

$$3,45 = 3 + 0,45.$$

In dieser Schreibweise ist 3 der *ganze Teil*, und 0,45 der *gebrochene Teil* der Zahl 3,45.

Zerlege auf die gleiche Weise  $\frac{15}{4}; \frac{39}{26}$ .

9. Wie viele natürliche Teiler hat 180?

10. Emma kann eine Ziffer erraten, ohne die Zahlen, mit denen gerechnet wird zu kennen. Zum Beispiel!

Emma: – Schrieb eine natürliche Zahl!

Dan: – (Schrieb 2195)

Emma: – Ändere die Reihenfolge der Ziffern!

Dan: – (Schrieb 9512)

Emma: – Subtrahiere die Zahlen, lösche eine Ziffer und sag mir die Zahl, die bleibt!

Dan: – 737!

Emma: – Du hast die 1 gelöscht!

Wie konnte Emma die gelöschte Ziffer erraten?

11. a) Jede natürliche Zahl kann als Summe von verschiedenen Potenzen von 2 geschrieben werden. Schreibe so die Zahlen 18, 25 und 47.

b) Stimmt es, dass jede natürliche Zahl als Summe von verschiedenen Potenzen von 3 geschrieben werden kann?

### Wähle aus und löse in 5 Minuten!

**A** Schreibe 50 als Produkt von Primfaktoren.

**B** Schreibe  $\frac{402}{5}$  zwischen zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen.

**C** Finde alle natürlichen Zahlen der Form  $\overline{2a7b}$ , die durch 90 teilbar sind.

# 2. Lektion

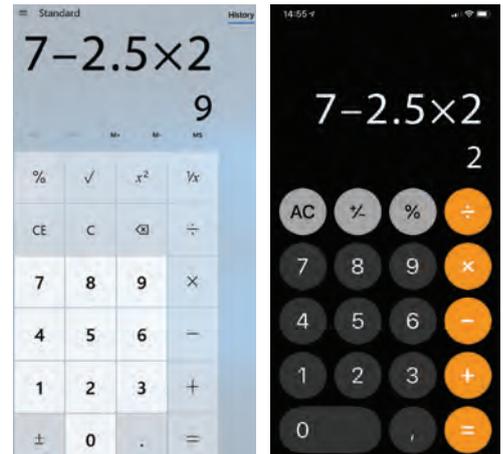
## Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit rationalen Zahlen. Umkehroperationen.

### Problemsituation

Geo hat mithilfe des Laptops und Emma mit dem Handy arithmetische Operationen ausgeführt. Sie haben folgende Tasten gedrückt:



Obwohl sie auf die gleichen Tasten in derselben Reihenfolge drückten, waren die Ergebnisse verschieden. Geo erhielt 9 und Emma 2. Haben sie gefehlt, oder ist ein Gerät kaputt?



Die eingegebenen Zahlen sind 7; 2,5 und 2...

...und die Operationen sind die Subtraktion und die Multiplikation



### Wir lernen

Welches ist die richtige Reihenfolge der arithmetischen Operationen? Welche Verbindungen gibt es zwischen den Operationen?

### Wir lösen die Problemsituation!

Der Rechner des Handys arbeitet im wissenschaftlichen Modus, der andere rechnete  $7 - 2,5 \cdot 2$  und nicht  $(7 - 2,5) \cdot 2$ .



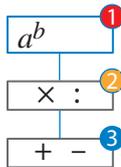
Die Klammern ändern die Priorität im Rechnen!

### Wir erinnern uns ...

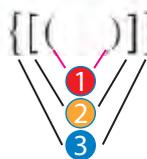
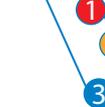
#### Die Reihenfolge der Rechnungen

Man berechnet der Reihe nach:

- 1 Potenzen
  - 2 Multiplikationen oder Divisionen,
  - 3 Additionen oder Subtraktionen.
- 1 Die runden Klammern,
  - 2 Die eckigen Klammern,
  - 3 Die geschweiften Klammern.



$$60 - 4^3 \cdot 0,5 = 60 - 64 \cdot 0,5 = 60 - 32 = 28$$



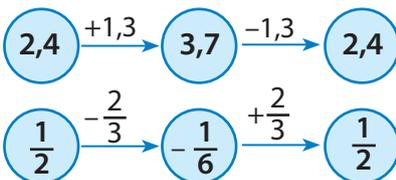
$$7 + 2 \cdot \{1 + 2 \cdot [3 + 4 \cdot (6 - 5)]\} = 37$$



#### Verbindungen zwischen arithmetischen Operationen

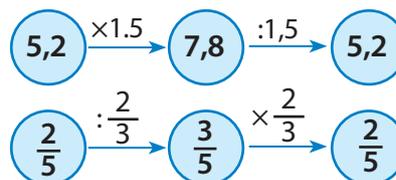
Addition und Subtraktion sind entgegengesetzt.

Beispiel:



Multiplikation und Division (mit Faktoren die nicht null sind) sind umgekehrt.

Beispiel:

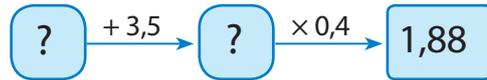


Untersuche die oberen Schemen. Wie funktioniert jedes Schema?

Kritisches und kreatives Denken!

## Gelöste Aufgabe / Verschiedene Lösungen

Geo hat auf seinem Taschenrechner die im Schema gezeigten Operationen ausgeführt.



Seine Kollegen wollen die erste Zahl finden. Ihre Lösungen sind:

**Tic:** Ich führte die Operationen in umgekehrter Reihenfolge aus!



**Anna:** Ich habe eine Gleichung verwendet.

$$\begin{aligned} x \text{ ist die erste Zahl. Es gilt:} \\ (x + 3,5) \cdot 0,4 &= 1,88 \\ x + 3,5 &= 1,88 : 0,4 \\ x &= 4,7 - 3,5 \\ x &= 1,2 \end{aligned}$$

### Münliche Übung

Warum hat Anna in der Gleichung zum Lösen der Aufgabe Klammern verwendet? Welche Lösung ist interessanter? Warum?

## Aufgaben

1. Führe aus:

- a)  $1,4 - 4,58$ ;  $0,5 \cdot 1,3$ ;  $2,96 : 0,4$ ;  
 b)  $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ ;  $\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$ ;  $\frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16}$ ;  $\frac{-1}{6} : \frac{2}{9}$ .

2. Berechne:  $1,(2) + 0,3(8)$ ;  $2,7 \cdot 0,(3)$ ;  $5,(4) : 0,(7)$ .

3. Wähle die richtige Antwort!  $2,5 + 1,5 \cdot 3 =$

- A. 12; B. 6; C. 7; D. 9.



4. Dan und Emma deuteten das Schema



wie folgt: Dan:  $(1,5 + 2) \cdot 3 =$

$$\text{Emma: } 1,5 + 2 \cdot 3 =$$

Wer hat recht?

Führe beide Rechnungen aus.

5. Der Umfang eines Quadrates ist 7 m. Wie viel beträgt sein Flächeninhalt?

6. Berechne die Fläche eines quadratischen Displays mit der Seite 2,5 dm.

7. Berechne  $(1,6 + 4,3)^2$  und  $1,6^2 + 4,3^2$ . Erkläre warum die Ergebnisse verschieden sind.



8. Berechne den Umfang und die Fläche der grünen Figur, wenn die Seite des Netzes 0,5 cm ist.



9. Berechne den Umfang und die Fläche des 2,3 m langen und 1,8 m breiten Fensters.



10. Bestimme die kleinste natürliche, von null verschiedene Zahl  $n$ , damit  $48 \cdot n$  ein vollständiges Quadrat ist.

11. Beweise, dass es 100 natürliche aufeinander folgende Zahlen gibt, wobei keine ein vollständiges Quadrat ist.

12. Zeige, dass  $2^{308} \cdot 3^{462}$  ein vollständiges Quadrat ist, und  $2^{491} \cdot 3^{186}$  kein vollständiges Quadrat ist.

13. Verwende ein Mal die Klammer in der Rechnung  $2 - 2 \cdot 3 + 4 : 5$ , damit das Ergebnis: a) positiv; b) negativ ist.

14. Die natürliche Zahl  $P$ , mit  $n$  Ziffern, nicht alle gleich, hat folgende Eigenschaft: falls wir die Reihenfolge der Ziffern verändern erhalten wir die natürliche Zahl  $Q$  mit der Eigenschaft:  $P + Q = \underbrace{99 \dots 9}_n$ .

a) Finde eine solche Zahl  $P$  für  $n = 6$ .

b) Zeige, dass die Zahl  $n$  der Ziffern von  $P$  eine gerade Zahl ist.

$n$  Ziffern

## Wähle aus und löse in 5 Minuten!

**A** Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 1,2 m ist gleich mit dem Umfang eines Quadrates. Welchen Flächeninhalt hat das Quadrat?

**B** Der Flächeninhalt eines rechteckigen Blechs ist  $12 \text{ m}^2$ , und eine seiner Seiten 2,5 m. Berechne seinen Umfang.

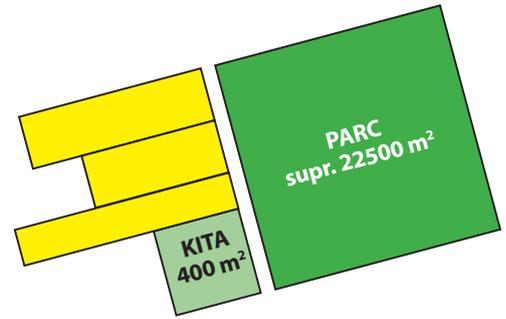
**C** Berechne:  
 $1 - (1 - (1 - \dots - (1 - 1) \dots))$   
 (es sind 100 offene und 100 geschlossene Klammern).

### Problemsituation

In Annas Viertel soll auf einer quadratförmigen Fläche von  $400 \text{ m}^2$  eine KITA (Kindertagesstätte) gebaut werden. Wie lang ist eine Seite des Grundstückes?



Wir lösen durch probieren:  
 $10^2 = 100$ , und  $20^2 = 400$ .  
 Die Seitenlänge ist also  $20 \text{ m}$ .



### Wir lernen!

Wie bestimmen wir die Seite eines Quadrates, wenn wir den Flächeninhalt kennen?

### Wir vergleichen!

Wodurch gleichen und wodurch unterscheiden sich die folgenden Aufgaben?

A. Der Sportplatz hat die Form eines Quadrates mit der Seite  $30 \text{ m}$ . Wie groß ist seine Fläche?

Lösung:

A sei der Flächeninhalt des Sportplatzes.  
 Dann ist:  $A = 30^2 = 900$ .  
 Also die Fläche ist  $900 \text{ m}^2$ .

B. Eine quadratförmige Fliese hat die Fläche  $900 \text{ cm}^2$ . Wie lang ist eine Seite der Fliese?

Lösung:

$L$  sei die Seitenlänge der Fliese.  
 Dann ist:  $L^2 = 900$ ;  $L^2 = 30^2$ ;  $L = 30$ .  
 Also ist eine Seite der Fliese  $30 \text{ cm}$ .

### Wir beobachten und definieren!

Die Zahl  $30$  ist Lösung der Gleichung  $L^2 = 30^2$  mit der Unbekannten  $L$ . Sie ist ihre einzige positive Lösung. Wir sagen  $30$  ist die **Quadratwurzel** aus  $900$ .

Bezeichnung:  
 $\sqrt{900} = 30$

Wir lesen:  
 Wurzel aus  $900$  ist  $30$ .

Wir prüfen:  
 $30 \geq 0$  und  
 $30^2 = 900$ .

Die Quadratwurzel ziehen ist die umgekehrte Operation des Quadrierens.



### Definition

Falls die natürliche Zahl  $a$  ein vollständiges Quadrat ist, heißt die natürliche Zahl  $n$ , für die  $a = n^2$ , die **Quadratwurzel** aus  $a$ . Wir schreiben:  $n = \sqrt{a}$ .

### Wir lösen die Problemsituation!

Laut Plan soll in Annas Wohnviertel auch ein quadratischer Park mit einer Fläche von  $22\,500 \text{ m}^2$  angelegt werden. Wie lang ist eine Seite des Parks?

Lösung:

Laut der oberen Definition ist eine Seitenlänge des Parks  $\sqrt{22\,500} \text{ m}$ . Damit wir diesen Wert bestimmen zerlegen wir die Zahl  $22\,500$  in Primfaktoren und erkennen ein vollständiges Quadrat:  $22\,500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2)^2$ . Der gesuchte Wert ist  $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 150$ . Probe:  $150^2 = 22\,500$ .

### Wir erweitern ...

Kann die Quadratwurzel aus einer Zahl, die keine natürliche Zahl ist gezogen werden?

$$\sqrt{2,25} = ?$$

Wir können so überlegen: Ein quadratisches Grundstück hat die Fläche  $2,25 \text{ hm}^2 = 22\,500 \text{ m}^2$ .

Die Seitenlänge ist  $\sqrt{22\,500} = 150$  (Meter), also  $1,5 \text{ hm}$ . Folglich:  $\sqrt{2,25} = 1,5$ .

### Testen der Grundkenntnisse

- ① Schreibe  $36$  als Produkt zweier Faktoren:
  - a) die gleich sind;
  - b) die verschieden sind.

- ②  $\sqrt{36} = ?$

- ③ Wahr oder falsch?  $\sqrt{64} = 32$ .

## Gelöste Aufgabe

Die Fläche eines quadratischen Bildes ist  $49 \text{ dm}^2$ . Welches ist die kürzeste Länge der Latten, die für den Bilderrahmen benötigt werden?

Lösung:

Eine Seitenlänge des Bildes ist:  $L = \sqrt{49} = 7 \text{ dm}$ .

Die kürzeste Länge der Latten ist der Umfang des Bildes, also  $4 \cdot 7 \text{ dm} = 28 \text{ dm}$ .



- Warum, glaubst du, dass man die *kürzeste* Länge des Rahmens verlangt?
- Können wir auf die gleiche Weise vorgehen wenn das Bild rechteckig ist und seine Fläche bekannt ist?

**Wir denken kritisch und konstruktiv!**

## Aufgaben

1. Berechne:

- a)  $28,2 \cdot 2,14$ ; b)  $2,0 \cdot 1,24$ ; c)  $0,13^3$ ; d)  $0,4^5$ ;  
e)  $0,1^2$ ; f)  $2,3^2$ ; g)  $1,5^2$ ; h)  $3,2^3$ ; i)  $10,3^3$ .

2. Berechne:

- a)  $0,5 \cdot \frac{4}{5}$ ; b)  $2\frac{1}{5} \cdot 0,75$ ; c)  $1,25 \cdot 4 \cdot \frac{2}{5}$ .

3. Welche Zahlen sind vollständige Quadrate? Warum?

- $2 \cdot 5$ ;  $3^2 \cdot 5^2$ ;  $2^4 \cdot 5^2$ ;  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$ ;  $100^0$ ;  $(7 \cdot 11)^2$ .

8. Berechne:

- a)  $5 - 0,5^3$ ; b)  $5^3 - 0,5$ ; c)  $5 + 0,5^3$ ;  
d)  $0,5^3 \cdot 5$ ; e)  $5^3 \cdot 0,5$ ; f)  $0,5^3 + 5^3$ ;  
g)  $5^3 \cdot 0,5^3$ ; h)  $5^3 - 0,5^3$ .

9. Finde die Fläche der roten Figur wenn die Seite des Rasters  $0,5 \text{ cm}$  ist.



13. Berechne mit zwei genauen Dezimalstellen:

- a)  $70 : 19$ ; b)  $15,26 : 13$ ; c)  $57,8 : 9$ ;  
d)  $0,45 : 0,7$ ; e)  $0,03 : 0,5$ ; f)  $106,6 : 1,7$ .

14. Die Dimensionen eines Rechtecks sind  $12 \text{ m}$  und  $75 \text{ m}$ . Berechne die Seite des Quadrates mit gleicher Fläche wie das Rechteck.

15. Die Seitenlängen eines Dreiecks sind  $10 \text{ m}$ ,  $10 \text{ m}$  und  $12 \text{ m}$ . Berechne seine Fläche.

18. Berechne die Quadratwurzel aus der Zahl  $N = 1 + 2 + 3 + \dots + 288$ .

19. a) Zeige, nachdem du rechnest, dass  $44 - 8$  und  $4444 - 88$  vollständige Quadrate sind.  
b) Berechne:  $\sqrt{4444444 - 888}$ .

4. Berechne:  $\sqrt{16}$ ;  $\sqrt{64}$ ;  $\sqrt{144}$ ;  $\sqrt{256}$ .

5. Zeige, dass  $a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 6^3$  ein vollständiges Quadrat ist und berechne dann  $\sqrt{a}$ .

6. Zerlege in Primfaktoren und berechne die Quadratwurzeln aus den vollständigen Quadraten:  $3600$ ;  $288$ ;  $1250$ ;  $1125$ ;  $432$ ;  $8100$ ;  $1764$ .

7. Welche Sätze sind wahr?

- A.  $\sqrt{49} = 7$ ; B.  $\sqrt{36} = 18$ ; C.  $\sqrt{25} = -5$ ; D.  $\sqrt{1} = 0$ .

10. Die Seite einer quadratischen Fliese ist  $15 \text{ cm}$ . Welche Fläche hat die Fliese?

11. Der Umfang eines quadratischen Teppichs ist  $18 \text{ m}$ . Welche Fläche hat der Teppich?

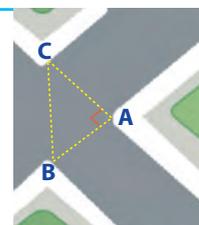
12. Ein quadratischer Garten hat die Fläche von  $1600 \text{ ha}$ . Wie lang ist der Zaun, der den Garten umgibt?

16. In der Straßenkreuzung im Bild

sind  $AB = 12 \text{ m}$ ,  $AC = 16 \text{ m}$ ,

$AB \perp AC$ .

Berechne  $BC$ .



17. a) Zeige, dass  $a \cdot 0,25 = a : 4$ ;

b) Führe, auf die einfachste Art, aus:  $120 \cdot 0,25$ ;  $0,25 \cdot 3600$ ;  $4,12 \cdot 0,25$ ;  $9,6 \cdot 0,25$ .



## Wähle aus und löse in 5 Minuten!

**A**

Berechne:  $\sqrt{36}$  und  $\sqrt{81}$ .

**B**

Berechne  $\sqrt{144}$  und  $\sqrt{2500}$ .

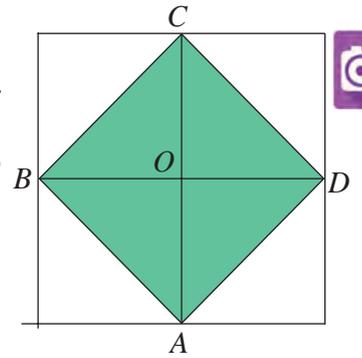
**C**

Bestimme die Ziffern  $a$  und  $b$  wenn  $\sqrt{3ab} = 19$ .

# 4 • Lektion Schätzen der Quadratwurzel aus einer Zahl

## Problemsituation

Tic hat die grüne Figur  $ABCD$ , aus der Abbildung, in ein quadratisches Raster mit der Kästchenlänge 1 cm, gezeichnet. Er faltete dann die weißen Ecken auf die grüne Fläche und bemerkte, dass diese genau bedeckt wird. Deshalb schlussfolgerte er, dass  $ABCD$  ein Quadrat mit der Fläche  $2 \text{ cm}^2$  ist. Wie lang ist eine Seite?



Dass  $ABCD$  ein Quadrat ist stimmt, weil die rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecke  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$  und  $AOB$  kongruent sind. Also ist  $AB = \sqrt{2} \text{ cm}$ .



Aber 2 ist kein vollständiges Quadrat! Was bedeutet  $\sqrt{2}$ ? Da  $\sqrt{2}$  die Länge der Strecke  $AB$  ist, ist  $\sqrt{2}$  eine Zahl!



Ich könnte die Seite des Quadrates  $ABCD$  abmessen, aber die Messung ist ungenau! (in mm, in zehntel mm?)

**Wir lernen!** >>> Wie approximieren wir die Quadratwurzel aus einer Zahl die keine Quadratzahl ist?

## Wir analysieren!

In der oberen Abbildung ist die Fläche des Quadrates  $ABCD$   $2 \text{ cm}^2$ . Wir könne behaupten, dass die Länge der Seite  $AB$  folgende Eigenschaften hat:

- $AB > AO$  (die Hypotenuse ist länger als jede Kathete), also ist  $AB > 1 \text{ cm}$ ;
  - $AB < AO + OB$  (eine Seite eines Dreiecks ist kürzer als die Summe der anderen beiden), also  $AB < 2 \text{ cm}$ .
- Daraus folgt, dass  $\sqrt{2}$  eine Zahl zwischen 1 und 2 ist. Also  $1 < \sqrt{2} < 2$ .

**Definition** >>> Falls  $a$  eine positive Zahl ist, heißt die positive Zahl  $b$ , für die  $a = b^2$  die **Quadratwurzel** aus  $a$ . Wir schreiben:  $b = \sqrt{a}$ . Die Zahl  $\sqrt{a}$  ist die einzige positive Zahl, deren Quadrat gleich  $a$  ist.

Also ist  $\sqrt{5}$  die positive Zahl, deren Quadrat 5 ist.

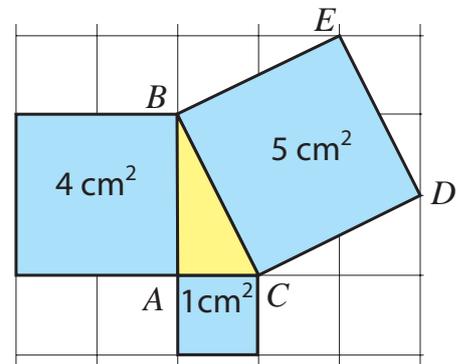


## Wir erinnern uns...

Wir wissen, dass die Fläche des Quadrates, das man an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, gleich ist mit der Summe der Flächen der Quadrate an den Katheten.

Die Fläche des Quadrates  $BCDE$  aus der Figur nebenan ist  $5 \text{ cm}^2$ ; deshalb ist die Länge der Strecke  $BC$   $\sqrt{5} \text{ cm}$ .

Da  $AB < BC < AB + AC$ , ist  $\sqrt{5}$  zwischen 2 und 3.  $2 < \sqrt{5} < 3$ .



## Testen der Grundkenntnisse

- 1) Berechne die Seitenlänge des Quadrates mit der fläche: **a)**  $25 \text{ cm}^2$ ; **b)**  $100 \text{ cm}^2$ ; **c)**  $5 \text{ cm}^2$ ; **d)**  $17 \text{ cm}^2$ .
- 2) Ordne  $\sqrt{6}$  zwischen zwei: **a)** beliebige natürliche Zahlen; **b)** aufeinander folgende natürliche Zahlen ein.
- 3) Es gilt  $4 + 9 = 13$ . Zeichne Quadrate mit den Flächeninhalten 4 und 9 an den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und ordne dann  $\sqrt{13}$  zwischen zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen ein.

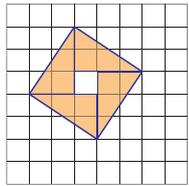
## Gelöste Aufgabe / Verschiedene Lösungen



Die Schüler sollten die Seitenlänge des rechts dargestellten Quadrates berechnen. Die Seite eines Rasterquadrates ist 1 cm. Ihre Lösungen sind:

**Tic:** Ich berechne zuerst den Flächeninhalt, durch zerlegen der Fläche.

Die 4 bunten rechtwinkligen Dreiecke in der Figur werden so neu angeordnet, dass ein Rechteck mit der Fläche  $12 \text{ cm}^2$  entsteht. In der Mitte entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm.



Der Flächeninhalt des Quadrates ist  $13 \text{ cm}^2$ . Also seine Seite ist  $\sqrt{13} \text{ cm}$ .

**Lisa:** Laut Lehrsatz von Pythagoras, gilt im rechtwinkligen Dreieck

$AOB$ :

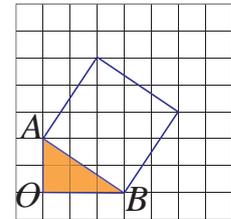
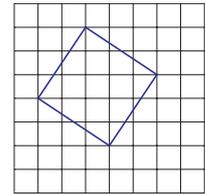
$$AB^2 = AO^2 + OB^2,$$

$$AO = 2 \text{ cm und } OB = 3 \text{ cm.}$$

$$\text{Also: } AB^2 = 2^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 13.$$

Folglich ist  $AB = \sqrt{13} \text{ cm}$ .



- 1) Welche anderen rechtwinkligen Dreiecke könnte Lisa zum Berechnen der Seite des Quadrates verwenden?
- 2) Rahme das ursprüngliche Quadrat in ein Quadrat ein, dessen Seiten horizontal und vertikal liegen. Verwende diese Figur um die obere Aufgabe zu lösen.

**Kritisches und kreatives Denken**

## Aufgaben

1. Welche Aussagen sind richtig?

a)  $\sqrt{6} = 3$ ; b)  $\sqrt{25} = 5$ ; c)  $\sqrt{3} \geq 1$ ; d)  $\sqrt{7} \leq 2$ .

2. Wähle die richtige Antwort aus!  $(\sqrt{6})^2 =$

A. 36; B. 3; C. 12; D. 6; E.  $\sqrt{6}$ .

4. Berechne die Seite eines quadratischen Etiketts mit gleichem Flächeninhalt wie ein rechteckiges mit Seiten von 6 cm und 2 cm.

5. Welche Fläche hat ein Quadrat mit der Seite  $\sqrt{7} \text{ cm}$ ?

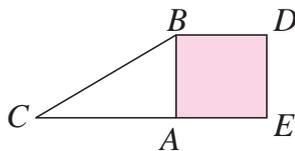
7. An der Kathete  $AB$  des rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  sei das Quadrat  $ABDE$ .

Wenn  $AC = 3 \text{ cm}$  und

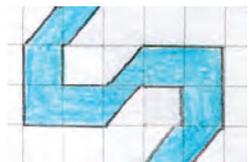
$BC = 4 \text{ cm}$ , berechne die

a) Fläche von  $ABDE$ ;

b) Länge der Strecke  $BD$ .



3. Approximiere den Umfang der blauen Figur mit ganzen Millimeter, wenn die Seite eines Kästchens im Raster 5 mm lang ist.

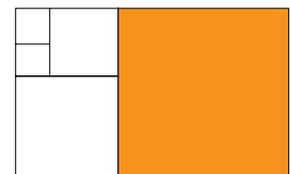


6. Zeichne ins Matheheft (ein Kästchen hat die Seite 5 mm) ein Quadrat mit dem Flächeninhalt: a)  $9 \text{ cm}^2$ ; b)  $8 \text{ cm}^2$ ; c)  $10 \text{ cm}^2$ . Welches Quadrat hat die längste Seite? Warum?

8. Dan steht genau im Zentrum eines quadratischen Hofes von 18 Ar. Wie viel Meter sind von Dan zu jeder Ecke des Hofes?

9. Anna hat drei quadratische Kartons mit den Seiten 4 dm, 6 dm und 9 dm in Stücke zerschnitten und danach als quadratisches Puzzle zusammengestellt. Welche Seitenlänge hat Annas Puzzle?

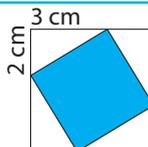
10. Die in der Abbildung dargestellte Figur wurde nach einer bestimmten Regel aus 5 Quadraten erzeugt. a) Berechne die Seitenlänge eines jeden Quadrates, wenn die Fläche des bunten Quadrates  $50 \text{ cm}^2$  ist. b) Übertrage die Zeichnung in dein Heft und füge, mit derselben Regel, ein neues Quadrat hinzu. Wie lang ist die Seite des neuen Quadrates?



## Wähle aus und löse in 5 Minuten!

**A** Schreibe alle Zahlen der unteren Liste, die zwischen 4 und 5 liegen ins Heft: 3,45; 4,5;  $\sqrt{7}$ ; 4,(5);  $\sqrt{18}$ ; -4,5;  $\sqrt{20,25}$ .

**B** Berechne die Seitenlänge des bunten Quadrates.



**C** Die Ecken des Quadrates mit  $l = 10 \text{ cm}$  werden mit den Mitten der Gegenseiten verbunden. Berechne  $l_1$ .

