Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

Scanează codul QR pentru
a accesa aplicația MATE 2000+

clasa a VI-a

partea I

ediția a IX-a

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Cuprins

GEOMETRIE

RECAPITULAREA MATERIEI DE CLASA A V-A ȘI COMPLETĂRI

Capitolul I. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

Algebră

Capitolul I
Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

PP Competenţe specifice

1.1. Identificarea unor noţiuni specifice mulţimilor şi relaţiei de divizibilitate în ℕ
2.1. Evidenţierea în exemple a relaţiilor de apartenenţă, de incluziune, de egalitate şi a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, $10n$, 3 şi 9 în ℕ
3.1. Utilizarea unor modalităţi adecvate de reprezentare a mulţimilor şi de determinare a c.m.m.d.c. şi a c.m.m.m.c.
4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situaţii concrete care se pot descrie utilizând mulţimile şi divizibilitatea în ℕ
5.1. Analizarea unor situaţii date în contextul mulţimilor şi al divizibilităţii în ℕ
6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situaţii date utilizând mulţimi, operaţii cu mulţimi şi divizibilitatea în ℕ

PE-PP 1.1. Mulţimi

1.1.1. Descriere, notaţii, reprezentări. Mulţimi numerice şi mulţimi nenumerice. Relaţia dintre un element şi o mulţime

Mulţimea este o colecţie de obiecte bine determinate şi distincte numite **elementele mulţimii**.

Mulţimile se notează cu litere mari, iar **elementele mulţimii** se notează cu litere mici.
Dacă A este o mulţime şi x, un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ şi vom citi x aparţine lui A. Dacă x nu este un element al mulţimii A, atunci vom scrie $x \notin A$ şi vom citi x nu aparţine lui A.

O mulţime poate fi dată în trei moduri:
1. **numind fiecare element al mulţimii**; în acest caz mulţimea se scrie punând între acolade elementele sale;
Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
2. **cu ajutorul diagramei Venn–Euler**; în acest caz, mulţimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă şi scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (fig. 1);

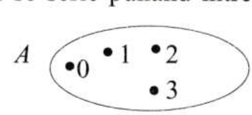

Fig. 1

3. **enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii** (pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu aparține mulțimii).

Exemplu: $A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } x < 4\}$.

● Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă**; ea se notează cu simbolul $\varnothing$.

● Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită **mulțimea numerelor naturale**. Aceasta se notează cu $\mathbb{N}$. Așadar:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

● Numărul de elemente al unei mulțimi A se numește **cardinalul** mulțimii A și se notează card A.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:
a) *bibliotecă*; b) *cinematecă*; c) *actualități*.

2. Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 43 257; b) 524 123; c) 17 230 415; d) 425 730.

3. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 4.

4. Scrieți mulțimea numerelor naturale cuprinse între 6 și 14.

5. Scrieți mulțimea cifrelor: a) pare; b) impare.

6. Fie mulțimile: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, d, e\}$; $C = \{a, c, e\}$. Căror mulțimi le aparține:
a) elementul a; b) elementul b?

7. Fie mulțimile: $A = \{1, 3, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $2 \in A$; b) $3 \notin A$; c) $2 \notin B$;
d) $1^{2003} \in A$; e) $4 \in A$ și $4 \in B$; f) $1 \in A$ sau $7 \in B$.

8. Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.

9. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $3 \in \{0, 1, 3\}$; b) $2 \notin \{1, 4, 5\}$;
c) $4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$; d) $0 \in \varnothing$;
e) $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3^{14}\}$; f) $10 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}$.

PE Aplicare și exersare **

10. Fie $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și calculați card B.

11. Indicați propozițiile false:
a) $2 \in \{1, 7, 3\}$; b) $7^0 \in \{1, 3, 9\}$; c) $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
d) $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$; e) $0 \in \varnothing$; f) $0 \notin \varnothing$.

12. Scrieți următoarele mulțimi enumerând elementele acestora:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$;
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$.

13. Scrieţi elementele mulţimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x \leq 32\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x^3 \leq 64\}$.

14. Scrieţi elementele mulţimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12 \text{ şi } x^2 \geq 9\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

15. Aflaţi cardinalul mulţimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\,001\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1\,957\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 10\}$;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 14\}$; $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 2\,002\}$.

16. Determinaţi elementele mulţimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 < 7\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ şi } x \leq 3^3 - 2\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}$; $D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\}$;

$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect şi } x \text{ are ultima cifră } 3\}$; $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 2^{x+1} = 32\}$.

17. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}$; b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\}$;

c) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

18. Determinaţi elementele mulţimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$.

19. Scrieţi elementele mulţimilor de mai jos. Ce observaţi?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}$.

20. Determinaţi mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ şi } x \text{ pătrat perfect}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{1ab} \text{ şi } x \text{ pătrat perfect}\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}$.

PE-PP Supermate ****

21. Determinaţi mulţimile A şi B care îndeplinesc simultan proprietăţile:

a) $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă mulţimea formată din toate elementele mulţimilor A şi B;

b) fiecare mulţime are câte două elemente; c) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

22. Se dă mulţimea A formată din numere naturale, cu proprietăţile:

a) $9 \in A$; b) dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$; c) dacă $7x + 4 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătaţi că $6 \in A$.

PE-PP 1.1.2. Relaţii între mulţimi

● Două mulţimi sunt **egale** dacă au aceleaşi elemente. Dacă A şi B sunt două mulţimi egale, notăm $A = B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A \neq B$.

● Fie A şi B două mulţimi; A este inclusă în B dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Se scrie $A \subset B$. Se mai spune că B **include** pe A şi se scrie $B \supset A$. În acest caz se spune despre A că este o **submulţime** a lui B. Dacă A nu este inclusă în B, adică A nu este o submulţime a lui B, notăm $A \not\subset B$ (citim „A nu este inclus în B") sau $B \not\supset A$ (citim „B nu include pe A").

● Se consideră că mulţimea $\varnothing$ este **submulţime** a oricărei mulţimi A.

● Orice mulţime este **inclusă** în ea însăşi. Deci $A \subset A$, oricare ar fi mulţimea A.

● Două mulţimi sunt **egale** dacă fiecare dintre ele este o submulţime a celeilalte mulţimi: $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Scrieţi toate submulţimile mulţimilor:
a) $\{1, 2\}$; b) $\{2, 3, 5\}$; c) $\{a, b, c\}$.

2. Scrieţi trei submulţimi ale mulţimii numerelor naturale.

3. Scrieţi toate mulţimile X care îndeplinesc condiţiile: $\{1, 3\} \subset X$ şi $X \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

4. Daţi trei exemple de mulţimi egale cu mulţimea vidă.

5. Fie mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x \leq 10\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 < 7\}$.
a) Scrieţi elementele celor două mulţimi.
b) Stabiliţi dacă $A \subset B$ sau $B \subset A$.

6. Care dintre mulţimile de mai jos sunt egale?
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 8\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\}$;
$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3, x \text{ cifră}\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5, x \text{ număr par}\}$.

7. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) $\{1, 2, 5\} \subset \{0, 1, 2, 5, 7\}$; b) $\{1, 2, 5\} \supset \{0, 1, 2, 5, 7\}$;
c) $\{3, 7, 11\} \supset \{3\}$; d) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 2\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$;
e) $\varnothing \subset \{0\}$; f) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este cifră a numărului } 34\,021\}$.

PE Aplicare şi exersare **

8. Fie $M = \{11, 21, 31, \ldots, 91\}$.
a) Scrieţi cardinalul mulţimii M.
b) Scrieţi trei submulţimi ale mulţimii M formate din câte patru elemente.
c) Scrieţi toate submulţimile mulţimii M formate din câte opt elemente.

9. Fie $M = \{0, 1, 7\}$.
a) Scrieţi toate submulţimile mulţimii M.
b) Scrieţi mulţimea X formată din submulţimile mulţimii M.
c) Scrieţi cardinalul mulţimii X.

10. Fie $M = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$.

a) Scrieți elementele mulțimii M.

b) Scrieți trei submulțimi care sunt incluse în M.

c) Scrieți trei mulțimi care includ mulțimea M.

11. Determinați toate valorile lui x pentru care următoarele afirmații să fie adevărate:

a) $\{x\} \subseteq \{2, 4\}$; b) $\{2, 3, x\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$; c) $\{1, x, 4\} \subseteq \{1, 4, 6, 7\}$.

12. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B, atunci A … B.

b) Dacă există în mulțimea A cel puțin un element care nu este element al mulțimii B, atunci A … B.

c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A, atunci A … B.

13. Fie mulțimile: $A = \{2x - 1; x; 3x + 1\}$ și $B = \{2(x + 1) - 3; 2x - 7; 2x + 8\}$. Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = B$.

14. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{2\}$; $D = \{2, 3, 4\}$; $E = \{3, 2\}$. Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile: „$\subset$”, „$\supset$”, „$\not\subset$”, „$\not\supset$”, „$=$” sau „$\neq$”.

a) A … B; b) C … A; c) B … D; d) B … E; e) C … D; f) E … A.

15. Fie $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \leq x < 5\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false?

a) $3 \in A$; b) $1 \notin B$; c) $\{0, 1\} \subset A$; d) $\{2, 3, 4\} \subseteq B$;
e) $\varnothing \subset C$; f) $C \supset A$; g) $B \not\subset C$; h) $\{1, 5\} \not\subset C$.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 4 \leq x \leq 7\}$; $B = \{y \mid y = x + 2, x \in A\}$ și $C = \{z \mid z = 2x, x \in A\}$.

a) Precizați care dintre propozițiile următoare sunt false și care sunt adevărate:

1) $\{5, 6\} \subset A$; 2) $A \subset C$; 3) $\{7, 8\} \subseteq B$.

b) Calculați card A, card B, card C.

17. Precizați cardinalul mulțimilor: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x^2 < 70\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^3 \leq 125\}$.

18. Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x + a < 14, a \in \mathbb{N}\}$. Determinați a, număr natural, astfel încât:

a) card $M = 0$; b) card $M = 1$; c) card $M = 2$; d) card $M = 3$.

19. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 3 < 9\}$; $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y + 2 < 8\}$ și $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$. Precizați care dintre propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

$$A = B, A \subset C, C \subset B, A = C, A \not\supset B, B \neq C.$$

PE-PP Supermate ****

20. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2\,014\}$. Determinați numărul submulțimilor formate din două elemente cu suma egală cu 2 015.

21. Fie $M = \{1, 4, 7, 10, \ldots, 97, 100\}$ și P o submulțime a sa formată din 19 elemente. Arătați că în P există două elemente distincte a căror sumă este divizibilă cu 52.

PE-PP 1.1.3. Mulţimi finite, cardinalul unei mulţimi finite. Mulţimi infinite. Mulţimea numerelor naturale

O mulţime care are n elemente, unde n este un număr natural, este o **mulţime finită.** Numărul de elemente ale unei mulţimi finite A se numeşte **cardinalul** mulţimii şi se notează **card A.**

O mulţime care nu este finită se numeşte **mulţime infinită.**

Mulţimea ale cărei elemente sunt toate numerele şirului numerelor naturale este **mulţimea numerelor naturale.**

După cum ştim deja, aceasta se notează cu $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

$\mathbb{N}^*$ este mulţimea numerelor naturale nenule: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Mulţimile $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}^*$ sunt mulţimi infinite şi $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

Fie a un număr natural. Notăm cu D_a mulţimea divizorilor lui a:

$$D_a = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ şi } n \mid a\}.$$

Evident, D_a nu este mulţimea vidă ($D_a \neq \varnothing$), deoarece D_a are cel puţin un element ($a \in D_a$, căci $a \in \mathbb{N}$ şi $a \mid a$). Se observă că $D_a \subset \mathbb{N}$ (pentru $a \neq 0$), $D_0 = \mathbb{N}$ şi $D_1 = \{1\}$.

Notăm cu M_a mulţimea multiplilor lui a:

$$M_a = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ şi } m \text{ este multiplul lui } a\}.$$

Evident, M_a nu este mulţimea vidă ($M_a \neq \varnothing$), deoarece M_a are ca elemente pe a, $2a$, $3a$, … . Deci, $M_a = \{0, a, 2a, 3a, 4a, \ldots\}$. Se observă că $M_a \subset \mathbb{N}$ (pentru $a \neq 1$), $M_0 = \{0\}$ şi $M_1 = \mathbb{N}$.

Oricare ar fi a număr natural nenul, **mulţimea divizorilor lui a este o mulţime finită**, iar **mulţimea multiplilor lui a este o mulţime infinită**.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Scrieţi mulţimile: D_2, D_{14}, D_{44}, D_7, D_{28}, D_{18}, D_{39}, D_{45}.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $D_4 \subset D_{20}$; b) $D_7 \subset D_{28}$; c) $D_3 \subset D_{13}$.

PE Aplicare şi exersare **

3. Determinaţi mulţimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in D_{15}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ şi } x + 1 \in D_{18}\}$;

$C = \{x \in D_{10} \text{ şi } x + 2 \in D_{12}\}$; $D = \{x \in M_{10} \text{ şi } x - 4 \in D_{26}\}$.

4. Determinaţi mulţimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 18 \text{ şi } 2x + 3 \leq 15\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 14 \text{ şi } 2x - 1 < 19\}$.

5. Determinaţi mulţimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 41 \mid (2x - 1)\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 5 \mid (3x - 1)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 4 \mid (x + 2)\}$.

6. Scrieți elementele următoarelor mulțimi:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+2) \mid 50$ și $3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (2x+3) \mid 18\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq 2x < 10$ și $(2x+1) \mid 7\}$.

7. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x+1) \mid (x+7)\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $x \mid (x+6)\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x-1) \mid x\}$.
a) Scrieți mulțimile A, B, C, enumerând elementele acestora.
b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

8. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x-5) \mid (3x+18)\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(2x+1) \mid \mid (4x+19)\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x+2) \mid (5x+27)\}$.

9. Determinați mulțimile:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(2x-1) \mid 121\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(3x+1) \mid 125\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x+1) \mid (x+50)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (2x+1) \mid 65$ și $17 \nmid (x+2)\}$.

PE Aprofundare și performanță ***

10. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 45$ și $3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 8$ sau $x \mid 6\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+3) \mid 36$ și $4 \mid x^2\}$.
a) Scrieți mulțimile enumerând elementele acestora.
b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

11. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(2x+1) \mid (3x+5)\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x+1) \mid (x^2+2)\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x+2) \mid (x^2+4x+15)\}$.

12. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x-1) \mid 11\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $(x+1) \mid 16\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, (x+2) \mid 20, 3 \mid x\}$.

13. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $7 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $42 \mid (2x-1)\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $5 \mid (3x+1)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $4 \mid (x+5)\}$.

14. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $2 \mid \overline{3x8}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $6 \mid \overline{x56}\}$.

PE-PP Supermate ****

15. Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 1\,995n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 1\,985p + 3, p \in \mathbb{N}\}$. Stabiliți dacă mulțimea $A \cap B$ are un număr finit de elemente sau o infinitate de elemente.

16. Arătați că oricare mulțime de 5 numere naturale are o submulțime de 3 elemente, astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 3.

PE-PP 1.1.4. Operaţii cu mulţimi: reuniune, intersecţie, diferenţă

REUNIUNEA MULŢIMILOR

Reuniunea a două mulţimi A şi B este mulţimea elementelor care aparţin cel puţin uneia dintre ele.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Ilustrăm reuniunea mulţimilor A şi B cu ajutorul unei diagrame Venn–Euler, reuniunea fiind reprezentată în figura 1 prin porţiunea haşurată.

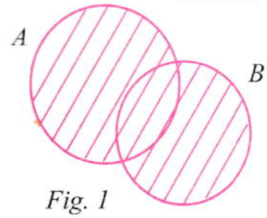

Fig. 1

INTERSECŢIA MULŢIMILOR

Intersecţia a două mulţimi A şi B este mulţimea elementelor comune celor două mulţimi.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}.$$

Cu ajutorul unei diagrame Venn–Euler, intersecţia a două mulţimi este ilustrată în figura 2 prin porţiunea haşurată.

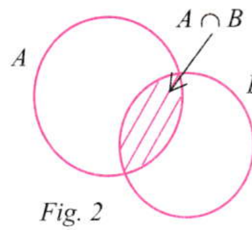

Fig. 2

Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci mulţimile A şi B sunt **mulţimi disjuncte**.

DIFERENŢA A DOUĂ MULŢIMI

Fie A şi B două mulţimi. Mulţimea formată din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B se numeşte diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

În figura 3, porţiunea haşurată ilustrează diferenţa $A - B$.

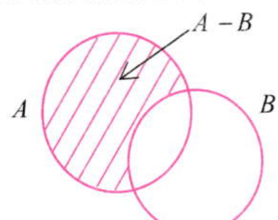

Fig. 3

PRINCIPIUL INCLUDERII ŞI EXCLUDERII (FACULTATIV)

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B).$$

Exemple:

Problema 1. Aflaţi câte numere naturale nenule mai mici decât 1 001 nu se divid nici cu 2, nici cu 5.

Rezolvare: Fie A mulţimea numerelor naturale mai mici decât 1 001 care sunt divizibile cu 2. Avem $1\,000 : 2 = 500$. Deci, card $(A) = 500$.

Fie B mulţimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 care sunt divizibile cu 5. Avem $1\,000 : 5 = 200$. Deci, card $(B) = 200$.

$A \cap B$ este mulţimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 care sunt divizibile şi cu 2, şi cu 5, deci, cu 10. Avem $1\,000 : 10 = 100$.

Deci, card $(A \cap B) = 100$.

$A \cup B$ este mulţimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 divizibile sau cu 2, sau cu 5.

Avem: card $(A \cup B)$ = card (A) + card (B) – card $(A \cap B)$.

card $(A \cup B) = 500 + 200 - 100 = 600$.

Deci, 1 000 – 600 = 400 numere naturale nenule mai mici decât 1 001 nu sunt divizibile nici cu doi și nici cu cinci.

Problema 2. Fie A și B două mulțimi astfel încât: $A \cap B = A \cup B$. Arătați că $A = B$.
Rezolvare: Avem $A - (A \cap B) = A - (A \cup B) = \varnothing \Rightarrow A - (A \cap B) = \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow A \subset A \cap B \Rightarrow A \subset B$ (1).
Avem $B - (A \cap B) = B - (A \cup B) = \varnothing \Rightarrow B - (A \cap B) = \varnothing \Rightarrow B \subset A \cap B \Rightarrow B \subset A$ (2).
Din (1) și (2) $\Rightarrow A = B$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Fie mulțimile A, B și C reprezentate cu ajutorul diagramelor (fig. 1).
a) Enumerați elementele mulțimilor A, B și C.
b) Enumerați elementele mulțimilor:
$M_1 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$; $M_2 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
$M_3 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$; $M_4 = \{x \mid x \in B \text{ sau } x \in C\}$;
$M_5 = \{x \mid x \in B \text{ și } x \in C\}$;
$M_6 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\}$;
$M_7 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}$.

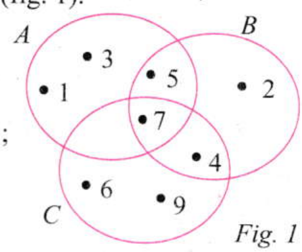

Fig. 1

2. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 5, 6\}$ și $B = \{2, 3, 7\}$. Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.
3. Scrieți două mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Determinați toate soluțiile.
4. Dacă $M \cup \{2\} = \{1, 2, 3\}$, enumerați elementele mulțimii M.
5. Fie $C = \{1, 3\}$. Scrieți:
a) două mulțimi având intersecția C; b) trei mulțimi având intersecția C.
6. Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ și $C = \{3, 5, 7\}$.
a) Determinați $B \cap C$ și $A \cup (B \cap C)$.
b) Determinați $A \cup B$, $A \cup C$ și $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
c) Comparați rezultatele. Ce observați?
7. Fie $A = \{0, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ și $C = \{1, 2, 5\}$.
a) Determinați $B \cup C$ și $A \cap (B \cup C)$.
b) Determinați $A \cap B$, $A \cap C$ și $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
c) Comparați rezultatele. Ce observați?

PE Aplicare și exersare **

8. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \le 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 3\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x + 1 < 10\}$.
a) Enumerați elementele mulțimilor A, B, C.
b) Calculați: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $B - C$, $C - B$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A - B) \cup (B - A)$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A - B) \cap C$, $(A \cup B) - C$, $(A \cap B) - A$, $(A - C) \cap (C - A)$.
9. Fie $A = \{x \mid x = 5k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că A și B sunt mulțimi disjuncte.
10. Fie $A = \{x \mid x = 6k + 3, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 4p + 2, p \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $A \cap B = \varnothing$.