

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

978-606-580-100-1

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

</div

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale 5

ALGEBRĂ

Capitolul I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

1. Multimi de numere. Forme de scriere a unui număr	13
<i>Test de autoevaluare</i>	19
2. Reprezentarea pe axă. Ordonarea numerelor reale. Valoarea absolută.	
Aproximarea numerelor reale	21
Recapitulare și sistematizare prin teste	26
<i>Test de autoevaluare</i>	27
3. Multimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	29
4. Intervale în \mathbb{R} . Definiție. Reprezentare pe axă	30
5. Operații cu intervale	35
<i>Test de autoevaluare</i>	41
Recapitulare și sistematizare prin teste	43
6. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, >, <$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	44
<i>Test de autoevaluare</i>	47
Recapitulare și sistematizare prin teste	49

Capitolul II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

A. Operații cu numere reale reprezentate prin litere	50
1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	51
2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	54
3. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a numerelor reale reprezentate prin litere	58
4. Ordinea efectuării operațiilor cu expresii algebrice	61
<i>Test de autoevaluare</i>	65
Recapitulare și sistematizare prin teste	67
5. Formule de calcul prescurtat	68
<i>Test de autoevaluare</i>	73
Recapitulare și sistematizare prin teste	75
6. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în \mathbb{R}	76
6.1. Metoda factorului comun	76
6.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat	79
6.3. Gruparea termenilor	83
6.4. Metode combinate	85
6.5. Maxime și minime. Inegalități algebrice	90
<i>Test de autoevaluare</i>	93
Recapitulare și sistematizare prin teste	95
B. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	96
7. Amplificarea. Simplificarea	96
<i>Test de autoevaluare</i>	103

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei.....	105
2. Determinarea planului	108
3. Corpuri geometrice.....	110
3.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat	110
3.2. Prisma dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul	112
3.3. Cilindrul circular drept. Conul circular drept	116
<i>Test de autoevaluare</i>	119
4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu; relația de paralelism în spațiu.....	121
5. Unghiuri cu laturile respectiv paralele; unghiul a două drepte în spațiu; drepte perpendiculare	123
6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan.....	125
<i>Test de autoevaluare</i>	129
Recapitulare și sistematizare prin teste	131
7. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele.....	132
8. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă. Trunchiul de con circular drept	136
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	139
10. Perpendicularitate.....	140
10.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan	140
<i>Test de autoevaluare</i>	143
10.2. Înălțimea unei piramide. Înălțimea unui con circular drept.....	145
10.3. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prismei. Înălțimea cilindrului circular drept. Înălțimea trunchiului de piramidă. Înălțimea trunchiului de con	146
<i>Test de autoevaluare</i>	149
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	151
10.4. Plane perpendiculare	152
11. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan	154
12. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment.....	156
<i>Test de autoevaluare</i>	159
13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane.....	161
<i>Test de autoevaluare</i>	165
Recapitulare și sistematizare prin teste	167
14. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței dintre două plane paralele	168
<i>Test de autoevaluare</i>	173
Recapitulare și sistematizare prin teste	175
15. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	176
MODELE DE TEZE SEMESTRIALE	178
PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADEI ȘI A CONCURSURILOR ȘCOLARE	183
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	187

Capitolul I

Intervale de numere reale.

Inecuații în \mathbb{R}

PP Competențe specifice

- C₁. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- C₂. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- C₃. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în \mathbb{R}
- C₄. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- C₅. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- C₆. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații

PE-PP 1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr



Mulțimea numerelor naturale, notată cu \mathbb{N} , este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Observații:

- a) Mulțimea notată cu \mathbb{N}^* este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ și $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.
- b) Avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$:
 - i) $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$ și **consecințele**: $x + y = 0$ înseamnă $x = y = 0$, iar $x \cdot y = 1$ înseamnă $x = y = 1$.
 - ii) $x - y \in \mathbb{N}$ numai dacă $x \geq y$, iar $x : y \in \mathbb{N}$ numai dacă există $z \in \mathbb{N}$ astfel încât $y \cdot z = x$. Dacă acest lucru nu are loc, se folosește teorema **împărțirii cu rest**: $x = yz + t$, cu $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < y$, $y \neq 0$.
 - iii) $x^y \in \mathbb{N}$, cu excepția cazului 0^0 .

Mulțimea numerelor întregi, notată cu \mathbb{Z} , este:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; în plus, se definesc: $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1\}$ și $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Pentru $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, avem:

- i) $x + y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$, $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.
- ii) Dacă $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.
- iii) $x : y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ dacă și numai dacă există $z \in \mathbb{Z}$, cu $x = yz$. În caz contrar, $x = yz + t$, unde $t \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq |t| < |y|$.

Mulțimea numerelor raționale, notată cu \mathbb{Q} , este:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z} \right\}.$$

O

bservații:

a) Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, iar mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se numește mulțimea numerelor raționale **neîntregi**. De asemenea, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Un **număr rațional** este reprezentat de o fracție de formă $\frac{x}{y}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Z}^*$.

Vom spune că două fracții $\frac{x}{y}$ și $\frac{z}{t}$, cu $x, z \in \mathbb{Z}$ și $y, t \in \mathbb{Z}^*$, se numesc **fracții echivalente** dacă $xt = yz$. Dată o fracție $\frac{x}{y}$, se obțin fracții echivalente cu ea prin:

- i) **amplificare**: $\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ și $y, t \in \mathbb{Z}^*$;
- ii) **simplificare**: $\frac{x}{y} = \frac{x:t}{y:t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$, $y, t \in \mathbb{Z}^*$ și $t \mid x, t \mid y$.

c) O **fracție** $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ este **ireductibilă** dacă $(x, y) = 1$.

Un **număr rațional** care este **reprezentat** de o fracție $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, se scrie sub formă **ecimală** împărțind numărătorul x la numitorul y .

În funcție de factorii în care se descompune numitorul fracției ireductibile $\frac{x}{y}$, fracția decimală poate fi:

- i) **fracție decimală finită**, dacă în descompunerea numitorului apar **factori** de 2 sau de 5;
- ii) **fracție decimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori primi** conține **alți** factori decât 2 și 5;
- iii) **fracție decimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conține atât factori de 2 sau/și numai factori de 5, cât și un alt factor prim.

Reciproc: Dacă un număr rațional este reprezentat printr-o fracție zecimală, el poate fi scris sub formă de fracție ordinată folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracție zecimală:

i) **fracție zecimală finită:** $\overline{a, b_1 b_2 b_3 \dots b_n} = \frac{\overline{ab_1 b_2 b_3 \dots b_n}}{10^n};$

ii) **fracție zecimală periodică simplă:** $\overline{a, (b_1 b_2 b_3 \dots b_n)} = a \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{\text{de } n \text{ ori}}};$

iii) **fracție zecimală periodică mixtă:**

$$\overline{a, b_1 b_2 \dots b_n (c_1 c_2 \dots c_m)} = \frac{\overline{ab_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_m} - \overline{ab_1 b_2 \dots b_n}}{\underbrace{999 \dots 9}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{0000 \dots 0}_{\text{de } n \text{ ori}}}.$$

d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, avem $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$, $x : y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$, $x^y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

Mulțimea numerelor iraționale, notată cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este mulțimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinitate** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

Mulțimea numerelor reale, notată cu \mathbb{R} , este mulțimea formată din **reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale. În mod asemănător, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Avem **șirul incluziunilor**: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliti valoarea de adevăr a propozițiilor:

- | | | | | |
|---|---|---|--|---|
| a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; | b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; | c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$; | e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; |
| f) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$; | g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; | h) $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$; | i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$; |
| k) $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | l) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; | m) $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$; | n) $\emptyset \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$; | o) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$. |

2. Stabiliti valoarea de adevăr a propozițiilor:

- | | | | | |
|--------------------------------|---|---|--|-----------------------------|
| a) $8 \in \mathbb{N}$; | b) $8 \in \mathbb{Z}$; | c) $8 \in \mathbb{Q}$; | d) $8 \in \mathbb{R}$; | e) $-6 \in \mathbb{Z}$; |
| f) $-6 \in \mathbb{N}$; | g) $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$; | h) $-8,3 \in \mathbb{R}$; | i) $-\frac{9}{3} \in \mathbb{Z}$; | j) $4,(5) \in \mathbb{Q}$; |
| k) $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$; | l) $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | m) $\sqrt{25 - (-3) \cdot (-8)} \in \mathbb{N}$; | n) $[-(-3) + (-2)]^2 \in \mathbb{Z}$. | |

3. Stabiliti valoarea de adevăr a propozițiilor:

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$; | b) $\sqrt{0,(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} \in \mathbb{Z}$; |
| d) $0,(3) + \sqrt{0,(4)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | e) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} \in \mathbb{N}$; | f) $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 + 3\sqrt{144}} \in \mathbb{Z}$; |
| g) $\{0\} \in \mathbb{R}$; | h) $0 \notin \mathbb{R}^*$; | i) $\{0\} \subset \mathbb{R}$; |
| | | j) $2 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 2\}$. |

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- Produsul a două numere iraționale este un număr irațional.
- Suma oricărora două numere iraționale este un număr irațional.
- Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.
- Produsul dintre orice număr irațional și orice număr rațional nenul este un număr irațional.
- Pătratul oricărui număr irațional este un număr rațional.
- Orice număr irațional ridicat la puterea zero este un număr natural.

5. Amplificați fracțiile: $\frac{6}{10}, \frac{18}{25}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}$ astfel încât să aibă același numitor.

6. Se consideră fracțiile: $\frac{a}{10}, \frac{a}{12}, \frac{a}{15}$ și $\frac{a}{30}$, unde $a \neq 0$. Determinați cea mai mică valoare naturală a numărului a , pentru care fracțiile reprezintă simultan numere naturale.

7. a) Care dintre fracțiile: $\frac{1}{4}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{18}, \frac{12}{20}, \frac{7}{15}, \frac{30}{25}, \frac{30}{50}$ sunt echivalente cu fracția $\frac{3}{5}$?

b) Amplificați cu 4 fracțiile: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{13}{99}, \frac{8}{13}, \frac{5}{11}$.

c) Simplificați cu 5 fracțiile: $\frac{5}{20}, \frac{15}{30}, \frac{10}{175}, \frac{20}{45}, \frac{25}{110}, \frac{30}{85}$.

8. Determinați din sirul următor de fracții:

$$\frac{1}{2}, \frac{61}{37}, \frac{2}{6}, \frac{55}{1133}, \frac{4}{21}, \frac{3}{9}, \frac{8}{15}, \frac{14}{2 \cdot 7}, \frac{85}{15}, \frac{35}{56}, \frac{19}{72}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{60}$$

pe cele care sunt: (i) ireductibile; (ii) subunitare; (iii) supraunitare; (iv) echivalentare.

9. Determinați valorile lui x , număr natural, pentru care:

a) (i) $\frac{8}{x-3} \in \mathbb{N}$; (ii) $\frac{6}{x-2} \in \mathbb{Z}$; (iii) $\frac{15}{2x-1} \in \mathbb{N}$; (iv) $\frac{21}{2x+1} \in \mathbb{N}$;

b) mulțimile $A = \{4x, 6x + 2\}$ și $B = \{2x - 1, 2x + 1, 3x + 2\}$ au un singur element comun;

c) mulțimile $A = \{2x - 3, 3x - 1\}$ și $B = \{4x - 7, x + 3\}$ sunt egale.

10. Scrieți sub formă zecimală următoarele fracții:

$$\frac{4}{5}, \frac{64}{25}, \frac{5}{16}, \frac{17}{125}, \frac{13}{3}, \frac{8}{15}, \frac{28}{15}, \frac{17}{6}, \frac{35}{18}.$$

11. Scrieți sub formă de fracție ordinată următoarele fracții zecimale: 4,15; 2,(18); 0,3(54); 2,534; 0,35(4); 1,8(6); 13,85; 5,02(7); 1,0025; 0,008; 2,00(3).

12. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq x^2 \leq 50\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 24 \leq x^2 \leq 121\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 18 \leq 2x^2 \leq 98\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 48 \leq 3x^2 \leq 192\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq \sqrt{x} \leq 7, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq \sqrt{x} < 10, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}.$$

13. Fie mulțimea $A = \{0; -4; 25; -64; 0,36; 0,4; 3,(27)\}$. Determinați mulțimea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$.

Respect pentru oameni! **14.** Fie mulțimea $A = \left\{ \sqrt[3]{12}; -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{1}{5}}; (-\sqrt{2})^{-1}; -\sqrt{7}; \sqrt{0,3} \right\}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $A \subset \mathbb{R}$; b) $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; c) $A \subset \mathbb{Q}$.

15. Fie mulțimea $A = \left\{ (\sqrt{3})^{-1}; (-\sqrt{2})^3; \sqrt{2\frac{2}{3}}; -\sqrt{150}; \sqrt{192}; \sqrt{5^3}; -\sqrt{2^5} \right\}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $A \subset \mathbb{Q}$; b) $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; c) $A \not\subset \mathbb{R}$.

16. Fie mulțimea $A = \left\{ (-2)^2; (-3)^{-2}; \sqrt{0,09}; \sqrt{5\frac{5}{9}}; (-1)^4; \sqrt{18}; \sqrt{1\frac{2}{25}}; \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}; \sqrt{5\frac{3}{9}} \right\}$.

Determinați mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

17. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 3 \mid 36\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 1 \mid 45\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 27 \text{ și } 8 \mid x + 5\}; \quad D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{21}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}; \quad F = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+5}{x+1} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \mid \frac{3x+11}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\}; \quad H = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+9}{2x-3} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

► În rezolvarea exercițiilor următoare folosiți, dacă este cazul, formula:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ unde } C^2 = A^2 - B.$$

18. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{5} - \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;	b) $\sqrt{45} = \sqrt{20} + \sqrt{5}$;
c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$;	d) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$;
e) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$;	f) $\sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = (\sqrt{2})^2$.

19. Demonstrați că următoarele numere nu sunt raționale:

a) $\sqrt{5n+3}$;	b) $\sqrt{5n+8}$;	c) $\sqrt{7n+3}$;
d) $\sqrt{n^2+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;	e) $\sqrt{4n^2+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;	f) $\sqrt{2007^{2010} - 2006^{2010}}$;
g) $\sqrt{1+3+3^2+\dots+3^{2010}}$;	h) $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \cdot 2011+3}$;	i) $\sqrt{456^{564} + 321^{312} + 215^{804}}$.

20. Arătați că $\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Respect pentru bani și carieră

21. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; d) $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$,

unde $x = \sqrt{441 + 2 + 4 + 6 + \dots + 880}$.

22. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; c) $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$,

unde $x = \sqrt{243^2 - (240^2 + 3 \cdot 240)}$.

23. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $x \in \mathbb{R}$; b) $x \in \mathbb{Q}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $x \in \mathbb{Z}$,

unde $x = \sqrt{2010 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2009)}$.

24. Determinați mulțimile:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} \mid \frac{\sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}}}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\};$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}} + \sqrt{39+12\sqrt{3}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}}}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\};$

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{11-2\sqrt{30}} + \sqrt{41+12\sqrt{5}}}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}.$

25. Determinați numerele naturale \overline{ab} , știind că acestea îndeplinesc condițiile: $\overline{ab} : 5$ și $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} \in \mathbb{Q}$.

26. a) Arătați că $a = \sqrt{9^n \cdot 2^{2n+1} - 4^n \cdot 3^{2n}} \in \mathbb{Q}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $a = 216$.

27. Determinați cifra x , în baza 10, astfel încât:

a) $\sqrt{\frac{14x}{27}} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{\frac{12x}{18}} \in \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{\frac{72x}{5}} \in \mathbb{Z}$; d) $\sqrt{\frac{18x}{4}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PE-PP Supermate ****

28. Determinați numerele raționale a și b care îndeplinesc condiția:

a) $\frac{a}{\sqrt{2}-1} + \frac{b}{\sqrt{2}+1} = 7 - 3\sqrt{2}$; b) $a(2+\sqrt{5}) + \frac{b}{3-\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 4$;

c) $a\sqrt{3} + \frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3} + 5$.

29. Fie numărul rațional $r \in \mathbb{Q}$. Dacă $11r \in \mathbb{Z}$ și $13r \in \mathbb{Z}$, demonstrați că $r \in \mathbb{Z}$.

Test de autoevaluare

- Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) 1. Valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$, pentru care fracția $\frac{18}{1a}$ este ireductibilă, sunt

(0,5p) 2. A patruzecea zecimală a fracției 0,25(123) este

(0,5p) 3. Valorile naturale ale lui x , pentru care fracția $\frac{7}{2x+1}$ este supraunitară, sunt

(0,5p) 4. Valoarea naturală a lui x , pentru care fracțiile $\frac{12}{x+16}$ și $\frac{16}{x+28}$ sunt echivalente, este

(0,5p) 5. Dintre fracțiile 2,3(5) și 2,(35), mai mare este

(0,5p) 6. Fie $a = \sqrt{6}(\sqrt{54} + \sqrt{216})$. Valoarea de adevăr a propoziției $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) 1. Forma ordinară corespunzătoare fracției zecimale 2,08(3) este:

- A. $\frac{1883}{900}$ B. $\frac{1880}{900}$ C. $\frac{1230}{900}$ D. $\frac{25}{12}$

(0,5p) 2. Forma zecimală a fracției $\frac{37}{20}$ este:
A. 0,85 B. 1,85 C. 2,15 D. 0,185

(0,5p) 3. Dacă $a = \sqrt{30^2 - 24^2}$, atunci valoarea lui a este:
A. 16 B. 18 C. 6 D. 12

(0,5p) 4. Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ \sqrt{0,8}; \frac{-21}{-7}; \sqrt{2,25}; \sqrt{6\frac{1}{4}}; -\frac{14}{2}; \sqrt{3\frac{1}{9}}; (-2)^3 \right\}.$$

Cardinalul mulțimii $A \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ este:

- A. 4 B. 5 C. 3 D. 6

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) 1. Arătați că numărul $a = \sqrt{288^2 - 285 \cdot 288 - 135}$ este număr rațional.

(Ip) **2.** Calculați $A \cap B$, unde $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4x+23}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

(Ip) **3.** Determinați $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{52-14\sqrt{3}}}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

(Ip) **4.** Determinați cifrele a și b , cu $a < b$, pentru care $\sqrt{0,a(b)} + \sqrt{0,b(a)} \in \mathbb{Q}$.