Ion Pătraşcu Nicolae Ivăşchescu

GEOMETRIE

Clasa a 6-a

după noua programă de gimnaziu

- TIPURI DE PROBLEME
  - repere teoretice
  - probleme rezolvate
  - probleme propuse - rezolvări complete
- PERFORMANȚĂ
  - Concursuri şcolare

EDITURA CARMINIS
PITEȘTI

CUPRINS

Tema nr. 1. **Segmentul**	5	145
Tema nr. 2. **Unghiul**	15	149
Tema nr. 3. **Triunghiul**	32	154
Tema nr. 4. **Probleme de congruenţă**	44	158
Tema nr. 5. **Probleme de ortogonalitate**	65	163
Tema nr. 6. **Probleme de paralelism**	75	166
Tema nr. 7. **Linia mijlocie a unui triunghi**	85	170
Tema nr. 8. **Cercul**	98	174
Tema nr. 9. **Probleme cu inegalităţi geometrice**	113	178
Tema nr. 10. **Probleme de coliniaritate**	122	180
Tema nr. 11. **Probleme de concurenţă**	129	183
Tema nr. 12. **Probleme cu construcţii auxiliare**	138	187

TEMA 1 SEGMENTUL

A. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

1. Punctul

În geometrie notăm punctele cu litere mari plasate lângă acestea. (vezi fig. 1)

fig. 1

În figura 1, unde au fost reprezentate două puncte A şi B distincte sau diferite, notăm $A \neq B$. Când două puncte coincid, notăm $C = D$. (vezi fig. 2)

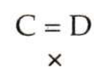


fig. 2

2. Dreapta

Un fir foarte subţire, bine întins între două puncte distincte A şi B dă ideea noţiunii de **dreaptă**.

fig. 3

Dacă încercăm să întindem între două puncte distincte date A şi B două fire subţiri, vom constata că cele două fire se suprapun.

Putem formula:

■ Prin două puncte distincte date poate trece o dreaptă şi numai una.

O astfel de propoziţie matematică se numeşte **axiomă**.

Putem formula axioma precedentă şi astfel:

■ Două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una.

Vom nota dreapta, scriind două puncte care o determină. Astfel în figura 4 spunem dreapta AB.

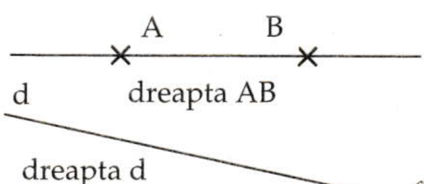


fig. 4

De asemenea, putem nota dreapta şi cu o singură literă, de exemplu dreapta d.

O dreaptă nu are extremităţi, cele două puncte care o determină pot fi unul faţă de altul oricât de depărtate sau de apropiate dorim.

★ **Definiţia 1.** Un număr de n puncte distincte, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ se numesc **coliniare** dacă aparţin unei aceleiaşi drepte.

3. Semidreapta

Fiind date două puncte O şi A pe o dreaptă d, numim **semidreaptă deschisă** de origine O mulţimea tuturor punctelor dreptei d situate de aceeaşi parte a lui O ca şi A fără punctul O.

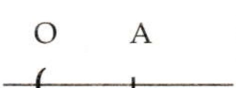


fig. 5

Notăm (OA semidreapta deschisă de origine O. Dacă punctul O aparţine semidreptei vom spune că aceasta este o semidreaptă închisă şi o notăm [OA. Avem [OA = (OA ∪ {O}.

Observaţie. Un punct oarecare al unei drepte determină pe aceasta două semidrepte. Aceste semidrepte se numesc semidrepte opuse.

B. SEGMENTUL DE DREAPTĂ

1. Definiţie. Notaţii

★ **Definiţia 2.** Dacă A şi B sunt puncte distincte ale unei drepte d, atunci intersecţia semidreptelor [AB şi [BA se numeşte **segment** de dreaptă de extremităţi (capete) A şi B. Notăm [AB] segmentul cu capetele A şi B, care se mai numeşte şi **segment închis**. (vezi fig. 6) Prin notaţia (AB) înţelegem **segmentul deschis** cu extremităţile A, B.

fig. 6

Putem avea şi segment închis la stânga şi deschis la dreapta [AB) sau deschis la stânga şi închis la dreapta (AB].

În figura 7 este reprezentat un segment [AB] care măsurat cu ajutorul riglei respective observăm că are măsura (lungimea) de 8 unităţi (u). Notăm [AB] = 8 u.

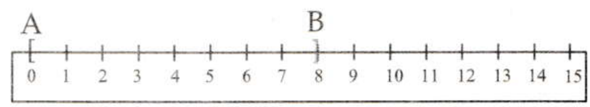


fig. 7

Convenim să notăm lungimea segmentului [AB] cu AB, dacă nu există riscul să se confunde cu dreapta AB.

★ **Definiţia 3**

Dacă două segmente au aceeaşi măsură (lungime), spunem că ele sunt **congruente**.

Notăm: [AB] ≡ [CD] şi citim „segmentul AB este congruent cu segmentul CD".

Două segmente congruente pot fi făcute să coincidă prin suprapunere.

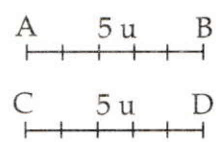


fig. 8

2. Mijlocul unui segment

Activitate practică

Trasăm pe o coală de hârtie un segment [AB] ca în figura 9. Pliem coala astfel încât punctele A şi B să coincidă. (vezi fig. 10) Depliem coala şi notăm cu M intersecţia segmentului [AB] cu dreapta obţinută prin pliere.

fig. 9

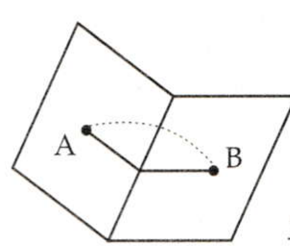


fig. 10

Despre punctul M spunem că este mijlocul segmentului [AB]. (vezi fig. 11)

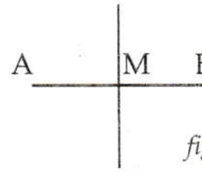


fig. 11

★ **Definiţia 4.** Dacă [AB] este un segment dat, numim **mijloc** al său punctul M ce aparţine segmentului şi care determină cu capetele lui [AB] segmente congruente.

În figura 12 punctul M este pe segmentul [AB] cu lungimea de 6 u, astfel încât $AM = MB = 3$ u. Punctul M este mijlocul segmentului [AB].

mijlocul [AB]

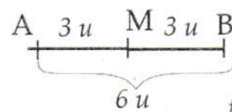


fig. 12

C. COORDONATA UNUI PUNCT PE O DREAPTĂ

Pe o dreaptă fixăm un punct pe care îl notăm O şi îl numim origine. Considerăm o unitate *u*, vezi figura 13.

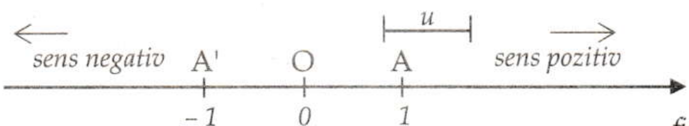


fig. 13

Construim segmentul [OA] cu lungime de o unitate $[OA] = 1\text{u}$ (punctul A este în dreapta punctului O). Vom spune că sensul de la O la A este sensul pozitiv al dreptei d, iar sensul opus acestuia va fi sensul negativ. Asociem punctului O numărul natural 0, iar punctului A numărul natural 1. Putem nota O(0), A(1) şi citim „punctul O de coordonată 0 şi A de coordonată 1." De asemenea, putem citi O de abscisă 0 şi A de abscisă 1.

Pentru a reprezenta punctul B(2) construim segmentul [AB] cu $AB = 1$ u (punctul A este între O şi B).

Pentru a reprezenta punctul A'(–1) construim segmentul A'O = 1 u, A' în stânga originii O.

• Oricărui punct din mulţimea $\mathbb{Q}$ îi putem asocia un punct unic pe axa numerelor.

• Dacă $a \in \mathbb{Q}_+$, atunci segmentul [OA] are lungimea a, unde A(a).

• Dacă $a \in \mathbb{Q}_-$, atunci segmentul [A'O] are lungimea –a', unde A'(a).

• Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ şi A(a), B(b), atunci segmentul [AB] are lungimea $AB = |b - a|$.

• Dacă M este mijlocul segmentului [AB] cu A(a), B(b), atunci M are abscisa m, dată de $m = \dfrac{a+b}{2}$.

D. PROBLEME REZOLVATE

1. Câte segmente diferite sunt în figura alăturată? Generalizare

Soluție:

Punctul A formează cu B, C, D trei segmente [AB], [AC], [AD].

Punctul B formează cu punctele C și D două segmente [BC] și [BD].

Punctul C formează cu D segmentul [CD].

În total avem 3 + 2 + 1 = 6 segmente.

Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ sunt n puncte distincte, atunci:

• A_1 formează cu celelalte $n-1$ puncte, $n-1$ segmente $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$,...,$[A_1A_n]$.

• A_2 formează cu celelalte $n-2$ puncte, $n-2$ segmente $[A_2A_3]$, $[A_2A_4]$,...,$[A_2A_n]$.

⋮

• A_{n-1} formează cu A_n segmentul $[A_{n-1}A_n]$.

În total sunt $(n-1)+(n-2)+...+3+2+1 = n\cdot(n-1):2$ segmente.

Observație. Dacă se dau n puncte distincte, oricare trei necoliniare, atunci numărul dreptelor determinate de aceste puncte este $n\cdot(n-1):2$.

2. Se dau 10 puncte distincte, 4 dintre ele sunt coliniare, iar celelalte 6 astfel încât oricare 3 sunt necoliniare. Care este numărul dreptelor determinate de cele 10 puncte?

Nicolae Ivășchescu, E: 13955 G.M. 2/2010

Soluție: Cele 6 puncte astfel încât oricare 3 sunt necoliniare determină $6\cdot5:2=15$ drepte. Cele 4 puncte coliniare determină o dreaptă. Cele 6 puncte împreună cu cele 4 puncte necoliniare determină $4\cdot6=24$ drepte. În total sunt $15+1+24=40$ de drepte.

3. Numărul de drepte determinate de n puncte distincte este 1 sau n. Aflați n. Ce puteți afirma despre cele n puncte? *Ion Pătrașcu*

Soluție: Dacă n = 2, atunci cele două puncte determină o dreaptă, deci n = 2 este un răspuns bun.

Dacă n = 3 și cele 3 puncte sunt coliniare, atunci ele determină o dreaptă. Dacă cele 3 puncte sunt necoliniare, atunci ele determină 3 drepte, deci n = 3 este un răspuns bun.

Dacă $n \geq 4$ pentru a fi îndeplinită cerința enunțului este necesar ca fie cele n puncte să fie coliniare, fie numai n – 1 dintre ele să fie coliniare.

4. Se dau n puncte distincte oricare 3 necoliniare. Se ştie că aceste puncte determină un număr de 60 de segmente, drepte şi semidrepte cu originea într-unul dintre punctele date. Aflaţi n. *Ion Pătraşcu*

Soluţie: Numărul segmentelor determinate de n puncte oricare 3 necoliniare este $n(n-1):2$, iar numărul dreptelor este $n(n-1):2$. Numărul semidreptelor cu originea într-unul din punctele date este $n(n-1)$. Avem deci $2n(n-1)=60$, de unde $n(n-1)=30$, cu soluţia $n=6$. Această soluţie este unică, deoarece pentru n > 6 se obţine $n(n-1)>30$, iar pentru n < 6 se obţine $n(n-1)<30$.

5. Punctele distincte A, B, C, D aparţin unei drepte d, astfel încât $AB = 7$ cm, BD = 9 cm, BC = 9 cm.

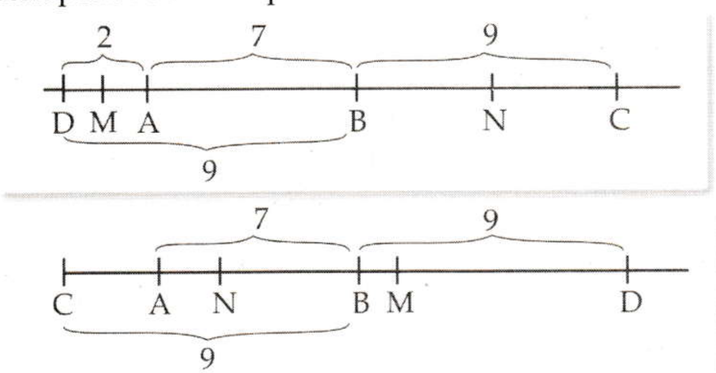
a) Să se reprezinte în ordine aceste puncte pe d.

b) Calculaţi distanţa dintre mijlocul lui [AD] şi mijlocul lui [BC].

C-tin Marcu Huşi, E: 13531, G.M. nr. 10/2007

Soluţie: Considerăm că pe dreapta d avem un sens pozitiv fixat de la stânga la dreapta.

a) Sunt posibile două reprezentări.



b) Fie M mijlocul lui [AD] şi N mijlocul lui [BC].

Pentru prima reprezentare avem MN = MA + AB + BN = 1 + 7 + 4,5 = = 12,5 cm.

Pentru a doua reprezentare avem: NM = NB + BM = 4,5 + 1 = 5,5 cm.

6. Să se arate că dacă A, B, C, D sunt puncte situate în această ordine pe o dreaptă, atunci:

AC + BD = AD + BC

$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

*E: 6723, G.M. nr. 12/1979 – ****

Soluţie: Dacă notăm cu a, b, c, d abscisele punctelor A, B, C, D, atunci: AC = c – a, BD = d – b, AD = d – a, BC = c – b, AB = b – a, CD = d – c.

Relaţia AC + BD = AD + BC este echivalentă cu (c – a) + (d – b) = (d – a) + + (c – b) care este evident adevărată.

Relaţia $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$ este echivalentă cu $(c-a)\cdot(d-b) = (d-a)\cdot(c-b)+(b-a)\cdot(d-c)$. Efectuând calculele, avem $cd - bc - ad + ab = cd - bd - ac + ab + bd - bc - ad + ac$. Se observă că egalitatea este adevărată.

7. Numărul maxim de drepte determinate de n puncte distincte este n + 2. Aflaţi numărul n.

Ion Pătraşcu

Soluţie: Numărul de drepte determinate de n puncte, $n \geq 3$, oricare trei puncte necoliniare este $n(n-1):2$. Avem prin urmare $\frac{n(n-1)}{2} \leq n+2$.

Rezultă $n(n-1) \leq 2n+4 \Leftrightarrow n^2-3n-4 \leq 0 \Leftrightarrow n^2-4n+n-4 \leq 0$

Obţinem $(n-4)(n+1) \leq 0$. Rezultă $n \leq 4$. Cum n = 4 verifică şi $n \in \{2, 3\}$ nu verifică, soluţia unică este n = 4.

8. Aflaţi câte puncte distincte se consideră pe o dreaptă dacă acestea împreună cu un punct exterior dreptei determină 36 de segmente.

Nicolae Ivăşchescu

Soluţie: Fie n numărul punctelor situate pe dreapta dată. Numărul segmentelor determinate de acestea este $n\cdot(n-1):2$. Punctul exterior împreună cu cele n puncte de pe dreaptă determină n segmente.

Avem deci $\frac{n(n-1)}{2}+n=36$. Obţinem $n^2+n=72 \Leftrightarrow n(n+1)=72$. Se observă că n = 8 este soluţie. Dacă n > 8 atunci $n(n+1)>72$. Dar dacă n < 8 atunci $n(n+1)<72$. Soluţia n = 8 este unică.

9. Se dau punctele coliniare O, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n în această ordine şi fie $M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n$ respectiv mijloacele segmentelor $[A_1A_2,][A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$, $[A_nA_1]$. Arătaţi că are loc egalitatea $OA_1+OA_2+ + OA_3 +...+ OA_{n-1}+OA_n = OM_1+OM_2+OM_3+...+OM_n$.

Nicolae Ivăşchescu

Soluţie: Din M_1 mijlocul lui $[A_1A_2]$ rezultă că $OM_1 = OA_1 + \frac{A_1A_2}{2} = \frac{2OA_1+A_1A_2}{2} = \frac{OA_1+(OA_1+A_1A_2)}{2} = \frac{OA_1+OA_2}{2}$.

Prin urmare, $OM_1 = \frac{OA_1+OA_2}{2}$.

Analog, găsim $OM_2 = \dfrac{OA_2 + OA_3}{2}$

$$\vdots$$

$$OM_{n-1} = \frac{OA_{n-1} + OA_n}{2}$$

$$OM_n = \frac{OA_n + OA_1}{2}$$

Prin adunare se obţine relaţia din enunţ.

■ **Observaţie.** Problema le generalizează pe cele date la Olimpiada locală Brăila 2013 şi la Olimpiada locală Teleorman 2010.

10. Se dau punctele coliniare A, B, C, D în această ordine. Ştiind că $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{2013}{2014}$, calculaţi valoarea raportului $\dfrac{AD}{BC}$.

Nicolae Ivăşchescu, S: E1459, GM nr. 2/2014

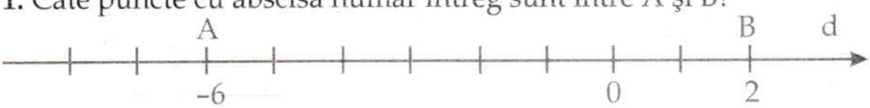
Soluţie: Din $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{2013}{2014}$ cu proporţii derivate obţinem $\dfrac{AB}{AC - AB} =$ $= \dfrac{CD}{BD - CD} = \dfrac{2013}{2014 - 2013}$.

Deci $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{CD}{BC} = 2013$, de unde $AB = 2013 \cdot BC$ şi $CD = 2013 \cdot BC$.

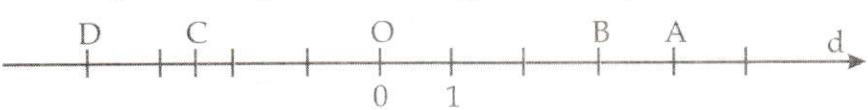
Avem $AD = AB + BC + CD = 4027 \cdot BC$, deci $\dfrac{AD}{BC} = 4027$.

E. PROBLEME PROPUSE (I)

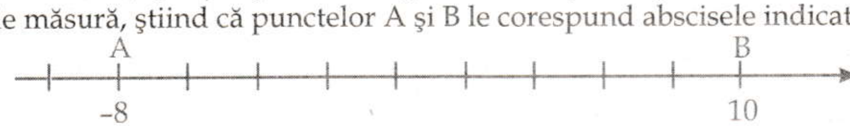
1. Câte puncte cu abscisa număr întreg sunt între A şi B?



2. Indicaţi abscisele punctelor din figura de mai jos.



3. Marcaţi pe dreapta d din figura de mai jos originea şi indicaţi unitatea de măsură, ştiind că punctelor A şi B le corespund abscisele indicate.



4. Fie punctele coliniare A, B, C, D în această ordine. Dacă AB = 5 cm, BD = 13 cm şi AB – BC = 1 cm, arătaţi că C este mijlocul segmentului [AD].

Gheorghe Stoica, Petroşani

5. Segmentul [AB] este împărţit de punctele C, D, E astfel încât CD este cu 15 cm mai mare decât $\frac{3}{4}$ din AC, DE este $\frac{5}{6}$ din CD, iar EB este cu 5 cm mai mare decât jumătatea lui DE şi totodată cu 15 cm mai mic decât DE. Calculaţi lungimea segmentului [AB].

Nicolae Ivăşchescu, PS VI 2, Revista Alpha, nr. 3/1996

6. Fie segmentul [AB] şi punctele C, D, E pe acest segment astfel încât $BC = \frac{1}{4}AB$, D este mijlocul segmentului [AC] şi $DE = \frac{1}{3}AD$.

a) Demonstraţi că $[AE] \equiv [BC]$.

b) Arătaţi că segmentele [AB] şi [CE] au acelaşi mijloc.

c) Dacă punctul M este mijlocul segmentului $[CE]$ şi DM = 4 cm, calculaţi lungimea segmentului [AB]. *Olimpiada locală, Olt, 2010*

7. Câte triunghiuri determină 8 puncte distincte date, oricare trei necoliniare? *Nicolae Ivăşchescu, G. 137, Revista Beta, nr. 2/1997, Craiova*

8. Se dă segmentul [AB] şi C, D, E $\in (AB)$, astfel încât $BC = \frac{AB}{5}$, $\frac{DC}{AD} = \frac{1}{3}$, $\frac{DE}{AD} = \frac{2}{3}$. Arătaţi că:

a) D este mijlocul lui [BE];

b) $[ED]$ şi $[AC]$ au acelaşi mijloc;

c) $[AE] \equiv [BC]$.

d) Dacă M este mijlocul lui [AB] şi EM = 18 cm, aflaţi lungimile segmentelor [BC], [CD], [DE], [AE] şi [AB].

Nicolae Ivăşchescu, SE. 15298 Supliment G.M. nr. 11/2015

9. Se dau punctele A, B, C, D în această ordine pe o dreaptă. Dacă $\frac{AB}{AC} = \frac{CD}{BD} = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că $AD = (2n+1)BC$.

10. Fie punctele A, B, C, D coliniare în această ordine. Dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD] şi MN = 9 cm, NP = 7 cm, iar AB + CD =16 cm, să se calculeze lungimea segmentelor [AB], [BC], [CD].

Olimpiadă Caraş-Severin, 2015