Ministerul Educației și Cercetării

MATEMATICĂ

Ion Cicu • Silvia Mareș • Ioana Iacob • Răzvan Ceucă • Andrei Băleanu

Clasa a VII-a

www.intuitext.ro

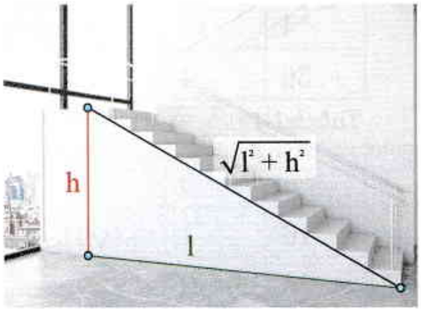
intuitext

Cuprins

Mulțimea numerelor reale

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Rădăcina pătrată este utilă pentru inginerii constructori atunci când trebuie să calculeze diferite lungimi.



Amintește-ți!

1. Asociază, după model, fiecărui număr de pe prima linie numărul de pe linia a doua care este pătratul său.

4 7 11 13 24 105 123

15 129 169 16 121 11 025 576 49 14

Model: Deoarece pătratul numărului 4 este 16, vom scrie $(4, 16)$.

Indiciu:
Pătratul numărului natural a este $a^2 = a \cdot a$

2. Care dintre numerele următoare sunt pătratele unor numere naturale: 36, 81, 90, 144, 196, 312? Scrie aceste numere pe caiet.

Exemplu: $36 = 6^2$. *Numărul* 36 *este pătratul unui număr natural.*

Important

Dacă pentru numărul natural x există un număr natural y astfel încât $y^2 = x$, atunci numărul y se numește **rădăcina pătrată a numărului** x.

Exemplu: Deoarece $6^2 = 36$, 6 *este rădăcina pătrată a lui* 36.

Notăm: $\sqrt{x} = y$. Citim: rădăcina pătrată a lui x este egală cu y sau radical din x este egal cu y.

Pentru a afla rădăcina pătrată a unui număr care este pătratul unui număr natural, scriem numărul ca putere cu exponentul 2, folosind descompunerea în factori primi, deoarece $\sqrt{a^2} = a$, dacă $a \geq 0$.

Exemplu: $\sqrt{225} = ?$ *Descompunem în factori primi pe* 225.
$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{(3 \cdot 5)^2} =$
$= \sqrt{15^2} = 15$.

Știați că...

Simbolul de radical a fost propus de matematicianul și astronomul Regiomontanus (1436-1476) și era inițial doar un simplu R?

Simbolul de radical așa cum îl folosim astăzi, adică $\sqrt{}$, a fost introdus în anul 1525 de matematicianul german Christoph Rudolff?

Regiomontanus (1436-1476)

Observă și descoperă!

3. Copiază, pe caiet, *tabelul 1* și *tabelul 2* și completează căsuțele libere, după model:

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$\sqrt{a\cdot b}$
4	9	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$	$\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$
25	4				
4	16				
36	4				

Tabelul 1

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}:\sqrt{b}$	$\sqrt{a:b}$
16	4	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{16}:\sqrt{4}=4:2=2$	$\sqrt{16:4}=\sqrt{4}=2$
36	9				
64	4				
100	25				

Tabelul 2

4. Compară rezultatele din ultimele două coloane, din fiecare dintre cele două tabele, și formulează o concluzie.

Important

Dacă a și b sunt pătratele a două numere naturale, atunci $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ și $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$, pentru $b\neq 0$. A doua relație se mai poate scrie și sub forma $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

Justificare: Dacă $\sqrt{a}=x$ și $\sqrt{b}=y$, atunci $x^2=a$ și $y^2=b$. Avem, $x^2\cdot y^2=a\cdot b$ sau $(x\cdot y)^2=a\cdot b$ (1).

Dacă $\sqrt{a\cdot b}=z$, atunci $z^2=a\cdot b$ (2).

Din (1) și (2) $(x\cdot y)^2=z^2$, de unde $x\cdot y=z$, adică $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.

Exersează!

5. Urmărind pașii din justificarea pentru înmulțire, justifică afirmația: $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$.

6. Scrie în dreptul fiecărui enunț litera **A**, dacă enunțul este adevărat sau litera **F**, dacă enunțul este fals.

a) Rădăcina pătrată a numărului 9 este 81.

b) Rădăcina pătrată a numărului 9 este 3.

c) Rădăcina pătrată a numărului 8^{100} este 4^{100}.

d) Rădăcina pătrată a numărului 8^6 este 8^3.

7. Care dintre numerele de mai jos sunt pătrate ale unor numere naturale? Scrie aceste numere pe caiet.

9, 16, 20, 100, 121, 200, 400 și 1 000.

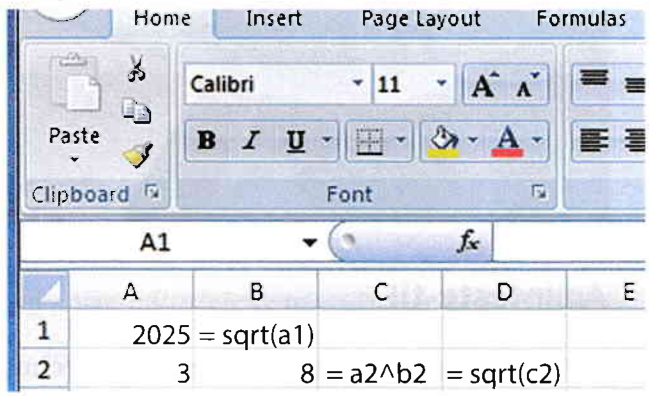
8. Copiază pe caiet și unește, prin săgeți, fiecare căsuță de pe prima linie cu căsuța din a doua linie astfel încât ele să conțină valori egale.

$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{289}$	$\sqrt{324}$	$\sqrt{484}$	
22	13	18	11	0	9	8	2	17	1

9. Calculează rădăcina pătrată a următoarelor numere, după model:
a) $16 \cdot 9$; b) $81 \cdot 625$; c) $5^4 \cdot 17^{10}$; d) $2\,020^2 \cdot 2^{2\,020}$; e) $22^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6$; f) $5^6 \cdot 7^4 \cdot 10^8$.
Model: a) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)^2} = 2^2 \cdot 3 = 12.$

10. Calculează următorii radicali:
a) $\sqrt{2\,025}$; b) $\sqrt{256}$; c) $\sqrt{1\,024}$; d) $\sqrt{3^8}$; e) $\sqrt{5^8}$; f) $\sqrt{4^7}$; g) $\sqrt{9^3}$; h) $\sqrt{6^6 \cdot 3^2}$.
Verifică rezultatele obținute cu ajutorul calculatorului, folosind un utilitar de calcul tabelar, de exemplu Excel (*Imaginea 1*).

Imaginea 1 - Foaie de lucru în Excel

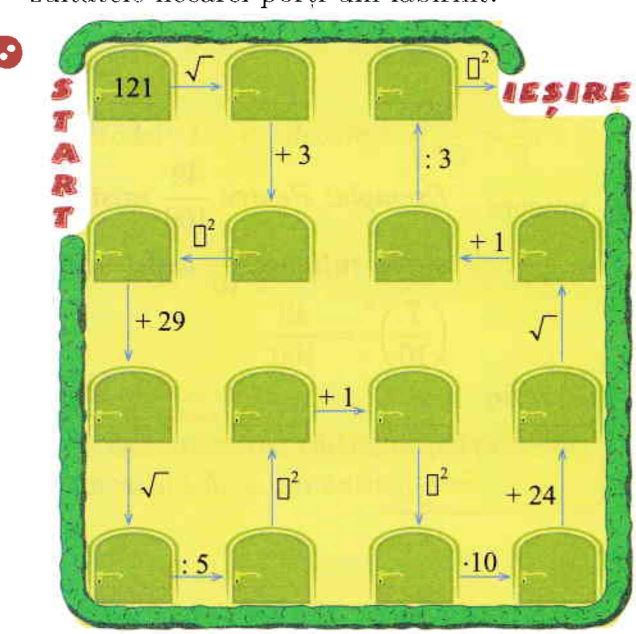


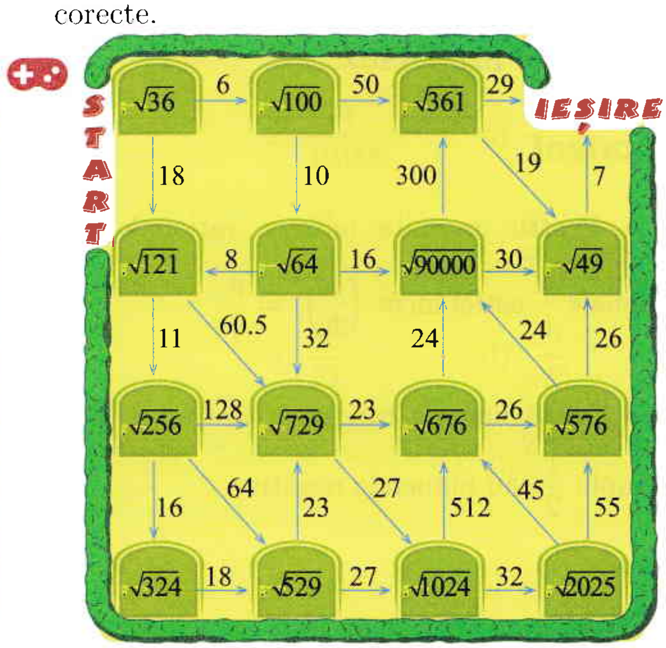
11. Calculează, folosind relația $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ sau relația $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$:
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; c) $\sqrt{50} : \sqrt{2}$; d) $\sqrt{1\,000} : \sqrt{10}$; e) $\sqrt{6^5} : \sqrt{6^3}$; f) $\sqrt{64} : \sqrt{2^3} : \sqrt{2}$; g) $\sqrt{5^3} : \sqrt{5}$; h) $\sqrt{18} : \sqrt{2}$; i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$.

12. Compară numerele: a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ și $\sqrt{9+16}$; b) $\sqrt{64} + \sqrt{36}$ și $\sqrt{64+36}$; c) $\sqrt{25} + \sqrt{144}$ și $\sqrt{25+144}$; d) $\sqrt{0} + \sqrt{16}$ și $\sqrt{0+16}$.
e) Stabilește dacă relația $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ este adevărată pentru orice numere naturale a și b.
f) Oferă un exemplu de numere naturale a și b pentru care $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

13. a) Urmărește operațiile și sensul de deplasare, indicate de săgeți, pentru a calcula rezultatele fiecărei porți din labirint.

b) Trasează drumul către ieșirea din labirint, alegând săgețile pe care sunt scrise rezultatele corecte.





Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Rădăcina pătrată este utilă pentru cei care lucrează în bănci atunci când calculează dobânda.

Amintește-ți!

1. Transformă următoarele fracții zecimale finite în fracții ordinare: a) 0,57; b) 1,69; c) 2,25; d) 2,89; e) 4,41; f) 0,0081; g) 0,0121.

Exemplu: a) $0{,}57 = \dfrac{57}{100}$.

2. Scrie următoarele fracții sub forma $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$: a) $\dfrac{49}{100}$; b) $\dfrac{169}{100}$; c) $\dfrac{25}{36}$; d) $\dfrac{9}{25}$; e) $\dfrac{121}{144}$; f) $\dfrac{289}{100}$; g) $\dfrac{441}{100}$; h) $\dfrac{81}{10\,000}$; i) $\dfrac{9}{10\,000}$.

Exemplu: $\dfrac{49}{100} = \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$.

Important

- Pentru anumite numere raționale $\dfrac{p}{q}$, există numere raționale $\dfrac{a}{b}$ astfel încât $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{p}{q}$.

Exemplu: Pentru $\dfrac{49}{100}$ există numărul rațional $\dfrac{7}{10}$ astfel încât $\left(\dfrac{7}{10}\right)^2 = \dfrac{49}{100}$.

- Există numere raționale care nu se pot scrie $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$, de exemplu $\dfrac{1}{2}$ sau numerele negative.

• Dacă pentru numărul rațional $\frac{p}{q}$, există numărul rațional $\frac{a}{b} \geq 0$ astfel încât $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{p}{q}$, atunci putem scrie $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}$ și citim: **rădăcina pătrată a numărului $\frac{p}{q}$ este numărul $\frac{a}{b}$** sau **radical din $\frac{p}{q}$ este egal cu $\frac{a}{b}$.**

Deoarece $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{p}{q}$ deducem că $\frac{p}{q} \geq 0$.

• Dacă $\frac{m}{n} \geq 0$ este un număr rațional, atunci putem încadra numărul $\sqrt{\frac{m}{n}}$ între două numere naturale consecutive.

Exemplu:

a) Pentru $\sqrt{3}$. *Numărul* 3 *se află între pătratele consecutive a două numere naturale:* 1, *respectiv* 4. *Dacă* $1 < 3 < 4$, *atunci* $1 < \sqrt{3} < 2$.

b) Pentru $\sqrt{\frac{9}{2}}$. *Avem* $\frac{9}{2} = 4{,}5$. *Numărul* 4,5 *se află între pătratele consecutive a două numere naturale:* 4, *respectiv* 9. *Dacă* $4 < \frac{9}{2} < 9$, *atunci* $2 < \sqrt{\frac{9}{2}} < 3$.

Exersează!

3. Asociază, după model, fiecare număr rațional din coloana **A** cu rădăcina pătrată a lui, din coloana **B**.

Model: 1 – e , deoarece $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

Coloana A	Coloana B
1. $\frac{4}{25}$	a) $\frac{1}{100}$
2. $\frac{1}{10\,000}$	b) $\frac{7^8}{9}$
3. $\frac{3^8}{5^2}$	c) $\frac{81}{5}$
4. $\frac{7^{16}}{81}$	d) $\frac{16}{625}$
	e) $\frac{2}{5}$

Știați că...

Determinarea rădăcinii pătrate era cunoscută încă din antichitate?

4. Calculează:

a) $\sqrt{\frac{16}{49}}$; b) $\sqrt{\frac{1}{121}}$; c) $\sqrt{\frac{64}{169}}$; d) $\sqrt{\frac{100}{49}}$; e) $\sqrt{\frac{144}{361}}$;

f) $\sqrt{\frac{1}{400}}$; g) $\sqrt{\frac{225}{16}}$; h) $\sqrt{\frac{49}{900}}$; i) $\sqrt{\frac{1\,600}{81}}$; j) $\sqrt{\frac{9}{196}}$.

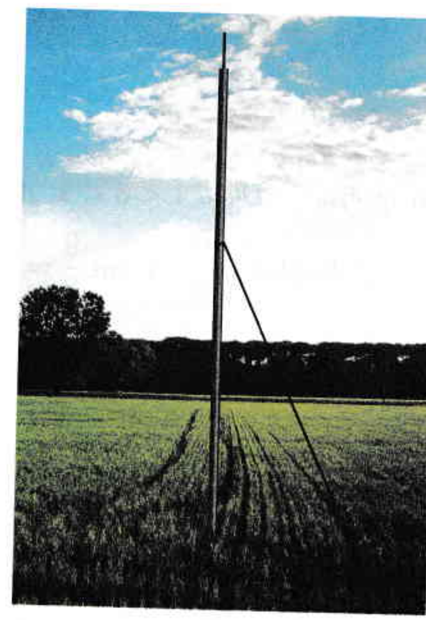
5. Încadrează între două numere naturale consecutive următoarele numere: $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{2{,}5}$ și $\sqrt{16{,}25}$.

Model: $4 < 5 < 9$ *implică* $2 < \sqrt{5} < 3$.

6. Încadrează numerele date între două numere naturale consecutive:

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{111}$; c) $\sqrt{28}$; d) $\sqrt{32}$; e) $\sqrt{\frac{74}{5}}$;

f) $\sqrt{\frac{81}{2}}$; g) $\sqrt{405{,}23}$; h) $\sqrt{\frac{1}{325}}$; i) $\sqrt{\frac{85}{4}}$; j) $\sqrt{\frac{1\,234}{100}}$.



Imaginea 2 - Stâlp ancorat

7. Pentru a pune încă o ancoră stâlpului din *Imaginea 2*, inginerul calculează și găsește că lungimea ancorei trebuie să fie $\sqrt{107}$ metri. Îi ajung 10 metri de sârmă pentru realizarea ancorei? Justifică răspunsul dat.

8. Calculează, scriind mai întâi sub formă de fracție ordinară, după model:

a) $\sqrt{2{,}25}$; b) $\sqrt{0{,}16}$; c) $\sqrt{1{,}44}$; d) $\sqrt{0{,}49}$; e) $\sqrt{0{,}09}$; f) $\sqrt{0{,}0625}$.

Model: $\sqrt{2{,}25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1{,}5$.

9. Calculează:

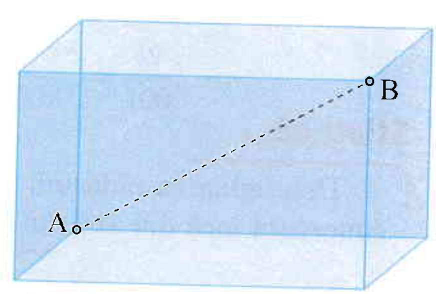
a) $\sqrt{\frac{5^4}{7^2}}$; b) $\sqrt{\frac{1}{3^8}}$; c) $\sqrt{\frac{10^6}{2^{10}}}$; d) $\sqrt{\frac{7^2}{3^6}}$; e) $\sqrt{\frac{8^4}{5^6}}$; f) $\sqrt{\frac{2^{12}}{3^{10}}}$.

10. Scrie în dreptul fiecărui enunț litera **A**, dacă enunțul este adevărat sau litera **F**, dacă enunțul este fals.

a) $2 < \sqrt{6} < 3$; c) $4 < \sqrt{11}$; e) $15 < \sqrt{250}$;

b) $12 < \sqrt{150} < 13$; d) $17 < \sqrt{300} < 18$; f) $50 < \sqrt{1\,000}$.

11. În acvariul din *Imaginea 3* cea mai mare lungime o are segmentul AB și este egală cu $\sqrt{47}$ cm. Poți introduce în acest acvariu o tijă metalică cu lungimea de 7,3 cm? Justifică răspunsul dat.



Imaginea 3 - Acvariu

Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

Observă și descoperă!

Sara scrie pe tablă $\sqrt{18}$, iar Victor scrie $3\sqrt{2}$. Observă dialogul dintre cei doi.

Sara: Ai scris același lucru pe care l-am scris și eu.

Victor: Cum așa?

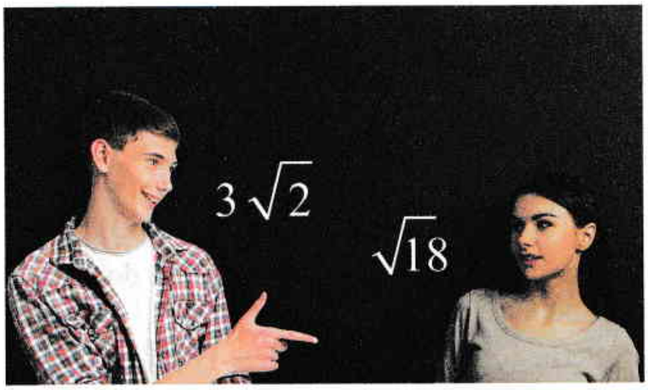
Sara: Să-ți explic! Ce înțelegi prin $3\sqrt{2}$?

Victor: Înțeleg $3 \cdot \sqrt{2}$.

Sara: Pot scrie $3 = \sqrt{9}$?

Victor: Desigur.

Sara: Atunci $3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$.



Imaginea 4 – Calcule pe tablă

- Urmărește cu atenție raționamentul Sarei și încearcă să ajungi de la $\sqrt{18}$ la $3\sqrt{2}$.

Important

- Orice număr rațional $x \geq 0$ se poate scrie $x = \sqrt{x^2}$.

- Pentru orice număr rațional x avem $\sqrt{x^2} = |x|$.

Justificare: Fără modul, adică, $\sqrt{a^2} = a$, am fi avut, de exemplu, $\sqrt{(-3)^2} = -3$. Dar $\sqrt{(-3)^2}$ am stabilit că este număr pozitiv.

- Pentru orice număr rațional $a \geq 0$, putem scrie $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ (se subînțelege că din moment ce b este sub radical avem $b \geq 0$).

Exemplu: $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$.

- Procedeul prin care factorul a a fost introdus sub radical se numește **introducerea factorilor sub radical**.

- Pentru orice număr rațional $b \geq 0$, putem scrie $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

Exemplu: $\sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$.

- Procedeul prin care un factor iese de sub radical se numește **scoaterea factorilor de sub radical**.

Exemplu: La scoaterea factorilor de sub radical putem proceda astfel:
Vreau să scot factori de sub radical pentru $\sqrt{720}$.

Pasul 1. Descompun numărul 720 în factori primi.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Pasul 2.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

2 Din doi factori egali cu 2 iese de sub radical un 2.

2 Din doi factori egali cu 2 iese de sub radical un 2.

3 Din doi factori egali cu 3 iese de sub radical un 3.

Pasul 3. De sub radical vor ieși doi factori egali cu 2 și un factor egal cu 3, iar sub radical rămâne factorul 5.

Scriu: $\sqrt{720} = 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

Exersează!

1. Asociază fiecărui radical din primul rând scrierea echivalentă de pe rândul al doilea, după model.

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{50}$ f) $\sqrt{27}$

A. $2\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$ E. $3\sqrt{2}$ F. $2\sqrt{2}$ G. $3\sqrt{5}$

Model: a) - D. deoarece $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

2. Introdu factorii sub radical: a) $5\sqrt{3}$; b) $4\sqrt{5}$; c) $6\sqrt{3}$; d) $8\sqrt{2}$; e) $5\sqrt{5}$; f) $15\sqrt{2}$.

3. Scoate factorii de sub radical: a) $\sqrt{75}$; b) $\sqrt{32}$; c) $\sqrt{72}$; d) $\sqrt{192}$; e) $\sqrt{150}$; f) $\sqrt{338}$.

4. a) Dacă $\sqrt{588} = a\sqrt{3}$ determină valoarea lui a.
   b) Dacă $\sqrt{1\,875} = 25\sqrt{a}$ determină valoarea lui a.
   c) Dacă $7\sqrt{5} = \sqrt{a}$ determină valoarea lui a.
   d) Dacă $8\sqrt{6} = \sqrt{a}$ determină valoarea lui a.

5. Dacă $\sqrt{m} = a\sqrt{b}$ completează *Tabelul 3*, după model:

m	52	172	180	99	297	1125	363	288
a	2							
b	13							

Tabelul 3

6. Dacă $a\sqrt{b} = \sqrt{m}$ completează *Tabelul 4*, după model:

a	2	6	10	13	9	8	7	12
b	5	3	5	6	2	7	5	3
m	20							

Tabelul 4