Mircea Fianu
Marius Perianu
Dumitru Săvulescu

Matematică

Clasa a VIII-a

I

art
educațional

Cuprins

Algebră

I. Numere reale

Geometrie

II. Corpuri geometrice

Competențe generale

1 Identificarea unor date şi relații matematice şi corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite

1.1 Identificarea în exemple, în exerciții sau în probleme a numerelor reale şi a formulelor de calcul prescurtat
1.2 Recunoaşterea unor corespondențe care sunt funcții
1.3 Recunoaşterea şi descrierea unor proprietăți ale unor figuri geometrice plane în configurații date în spațiu sau pe desfăşurări ale acestora
1.4 Identificarea unor elemente ale figurilor geometrice plane în configurații geometrice spațiale date

2 Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice

2.1 Utilizarea în exerciții a definiției intervalelor de numere reale şi reprezentarea acestora pe axa numerelor
2.2 Utilizarea valorilor unor funcții în rezolvarea unor ecuații şi a unor inecuații
2.3 Folosirea instrumentelor geometrice adecvate pentru reprezentarea, prin desen, în plan, a corpurilor geometrice
2.4 Calcularea ariilor şi volumelor corpurilor geometrice studiate

3 Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete

3.1 Alegerea formei de reprezentare a unui număr real şi utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calculului cu numere reale
3.2 Reprezentarea în diverse moduri a unor corespondențe şi/ sau a unor funcții în scopul caracterizării acestora
3.3 Utilizarea proprietăților referitoare la drepte şi unghiuri în spațiu pentru analizarea pozițiilor relative ale acestora
3.4 Clasificarea corpurilor geometrice după anumite criterii date sau alese

4 Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora

4.1 Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers, parte întreagă, parte fracționară) în contexte variate
4.2 Exprimarea prin reprezentări grafice a unor noțiuni de geometrie plană
4.3 Exprimarea prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de drepte şi unghiuri în plan şi în spațiu
4.4 Exprimarea proprietăților figurilor şi corpurilor geometrice în limbaj matematic (axiomă, teoremă directă, teoremă reciprocă, ipoteză, concluzie, demonstrație)

5 Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă

5.1 Deducerea şi aplicarea formulelor de calcul prescurtat pentru optimizarea unor calcule
5.2 Determinarea soluțiilor unor ecuații, inecuații sau sisteme de ecuații
5.3 Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării descrierii configurațiilor spațiale şi în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente şi de măsuri de unghiuri
5.4 Analizarea şi interpretarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică să verifice anumite cerințe

6 Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoştințelor din diferite domenii

6.1 Rezolvarea unor situații problemă utilizând rapoarte de numere reale reprezentate prin litere; interpretarea rezultatului
6.2 Identificarea unor probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, inecuațiilor sau a sistemelor de ecuații, rezolvarea acestora şi interpretarea rezultatului obținut
6.3 Interpretarea reprezentărilor geometrice şi a unor informații deduse din acestea, în corelație cu determinarea unor lungimi de segmente şi a unor măsuri de unghiuri
6.4 Transpunerea unor situații-problemă în limbaj geometric, rezolvarea problemei obținute şi interpretarea rezultatului

Algebră

I

Numere reale

I.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Mulțimea numerelor naturale

Notații. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ este *mulțimea numerelor naturale;*
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = 1, 2, ..., n, ...\}$ este *mulțimea numerelor naturale nenule*.

Observație. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare* și *înmulțire*, adică suma a două numere naturale este un număr natural, iar produsul a două numere naturale este tot un număr natural.

Mulțimea numerelor întregi

Notații. $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$ este *mulțimea numerelor* întregi;
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor întregi nenule*.

Observația 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z} = \{\pm n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^*$.

Observația 2. Mulțimea numerelor întregi este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere și înmulțire*, adică suma, diferența și produsul a două numere întregi sunt numere întregi.

Mulțimea numerelor raționale

Notații. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ este *mulțimea numerelor raționale*;
$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor raționale nenule*.

Observația 1. Mulțimea numerelor raționale este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere, înmulțire* și *împărțire*, adică suma, diferența, produsul și câtul a două numere raționale (dintre care împărțitorul este nenul) sunt numere raționale.

Observația 2. Pentru orice număr rațional nenul q există o *unică fracție ireductibilă* $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Observația 3. Un număr rațional poate fi reprezentat prin *fracții ordinare echivalente* sau printr-o *fracție zecimală finită* sau *periodică*.

Exemple. 1 $\frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2{,}4$, fracție zecimală *finită*;

2 $\frac{250}{6} = \frac{125}{3} = 41{,}666... = 41{,}(6)$, fracție zecimală *periodică simplă*;

3 $\frac{1505}{6} = 250{,}8333... = 250{,}8(3)$, fracție zecimală *periodică mixtă*.

Mulțimea numerelor reale

Notații. $\mathbb{R}$ este *mulțimea numerelor reale*;
$\mathbb{R}^*$ este *mulțimea numerelor reale nenule*;
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este *mulțimea numerelor iraționale*.

Observația 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Observația 2. Orice *număr irațional* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică*.

Observația 3. Reciproc, dacă un *număr real* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică*, atunci *numărul este irațional*.

1 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

a $5 \in \mathbb{N}$; **b** $\sqrt{23} \in \mathbb{R}$; **c** $8,(3) \in \mathbb{N}$;
d $-3 \notin \mathbb{N}$; **e** $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$; **f** $13 \in \mathbb{Z}$;
g $\frac{7}{3} \in \mathbb{Z}$; **h** $\frac{5}{11} \in \mathbb{Q}$; **i** $2,25 \in \mathbb{N}^*$.

2 Se consideră numerele $-7; 5\frac{1}{4}; -5; -3,25; \sqrt{3}; \frac{1}{6}; 0; -\frac{2}{5}; +4; 3,1(4)$.
Dintre aceste numere, scrieți pe caiet:
a numerele naturale; **b** numerele nenule; **c** numerele întregi;
d numerele reale; **e** numerele raționale; **f** numerele iraționale.

3 Fie $A = \left\{-17;\ 4\frac{1}{2};\ 0,(5);\ \sqrt{4}; -2;\ \sqrt{13};\ 0;\ 279;\ 5\frac{3}{13};\ \frac{23}{14}\right\}$. Determinați

a $A \cap \mathbb{N}$; **b** $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$; **c** $A \cap \mathbb{Q}$;
d $A \cap \mathbb{Z}$; **e** $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$; **f** $A \setminus \mathbb{Q}^*$;
g $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; **h** $A \setminus \mathbb{R}_+$; **i** $A \setminus \mathbb{R}$.

4 Dintre următoarele fracții, indicați fracțiile echivalente cu $\frac{3}{5}$.
a $\frac{6}{10}$; **b** $\frac{30}{25}$; **c** $\frac{9}{25}$; **d** $\frac{30}{50}$; **e** $\frac{12}{20}$; **f** $\frac{51}{85}$.

5 Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele:
a 4,7; **b** 19,(5); **c** 0,5(3); **d** 5,25; **e** 32,(41); **f** 1,21(05).

6 Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție ireductibilă:
a 5,3; **b** 0,701; **c** 125,49; **d** 6,3(5); **e** 2,(4); **f** 13,7(14).

7 Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, amplificându-le, eventual, convenabil:
a $\frac{7}{10}$; **b** $\frac{13}{25}$; **c** $\frac{5}{9}$; **d** $\frac{29}{5}$; **e** $\frac{11}{20}$; **f** $\frac{13}{6}$.

8 Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, simplificându-le, eventual, mai întâi:
a $\frac{34}{10}$; **b** $\frac{16}{8}$; **c** $\frac{412}{90}$;
d $\frac{345}{100}$; **e** $\frac{21}{3}$; **f** $\frac{1224}{396}$;
g $\frac{344}{1\,000}$; **h** $\frac{2}{25}$; **i** $\frac{23}{180}$.

9 Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:
a $\frac{9}{5}$; **b** $\frac{5}{11}$; **c** $\frac{707}{77}$; **d** $\frac{21}{6}$; **e** $\frac{202}{303}$; **f** $\frac{51}{37}$.

10 Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ este echivalentă cu fracția:
a $\frac{34}{65}$; **b** $\frac{39}{65}$; **c** $\frac{13}{1\,001}$; **d** $\frac{85}{15}$; **e** $\frac{55}{1\,133}$; **f** $\frac{5\,151}{8\,585}$.

11 Reprezentați numerele raționale de mai jos sub forma $\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$.
a $\frac{-4}{-5}$; **b** $-\frac{-37}{-11}$; **c** $-3\frac{5}{13}$; **d** 0,9(36); **e** 3,(7); **f** −2,1(6).

12 Dați câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracția $\frac{6}{n}$ este:

a subunitară; **b** ireductibilă; **c** reductibilă;
d zecimală finită; **e** periodică simplă; **f** periodică mixtă.

13 Determinați fracția ireductibilă echivalentă cu:

a $\frac{474\,747}{252\,525}$ **b** $\frac{123\,123}{234\,234}$ **c** $\frac{49\,704\,970}{24\,572\,457}$.

14 Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții, enunțând câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a „Orice număr natural este număr întreg.
b „Orice număr real este număr rațional“.
c „Dacă un număr nu este rațional, atunci numărul nu este întreg.“
d „Orice număr întreg este număr natural.“
e „Orice număr rațional este număr real.“
f „Un număr este natural numai dacă numărul nu este întreg.“

15 Scrieți numărul 12 ca:

a suma a trei numere naturale;
b suma a două numere întregi din care unul negativ;
c diferența a două numere întregi;
d produsul a două numere raționale;
e produsul a două numere iraționale;
f suma a două numere iraționale.

16 Reprezentați ca sume de produse între cifrele din baza 10 și puterile ale lui 10 următoarele numere raționale:

a 739; **b** 0,145; **c** 15,34;
d 25,203; **e** 210,08; **f** 2,3(4).

Rezolvare: **a** $739 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

c $15{,}34 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$ sau $15{,}34 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + \frac{3}{10^1} + \frac{4}{10^2}$.

17 Determinați, în fiecare din situațiile următoare, numerele întregi n pentru care relațiile următoare reprezintă propoziții adevărate:

a $\frac{14}{n-1} \in \mathbb{N}$; **b** $\frac{18}{2n-1} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **c** $\frac{25}{4n+1} \in \mathbb{Z}$;
d $\frac{2n}{2n+1} \in \mathbb{Z}_+$; **e** $\frac{3n+5}{3n-1} \in \mathbb{Z}$; **f** $\frac{4n+11}{2n+3} \in \mathbb{N}$.

18 Scrieți câte două numere raționale cuprinse între $\frac{1}{7}$ și $\frac{1}{6}$ sub formă de:

a fracții ordinare; **b** fracții zecimale periodice; **c** fracții zecimale finite;

19 Determinați numerele naturale nenule x și y pentru care $\overline{xxxx}_{(3)}$ $\overline{yy}_{(9)}$.

20 Numerele 123,123123; 0,(142857) și 7,2(51) sunt scrise sub formă de fracție zecimală.

a Scrieți a 10-a cifră de după virgulă a fiecărui număr.
b Determinați a 100-a cifră de după virgulă a fiecărui număr.

21 Aflați cel mai mic număr natural nenul a pentru care fracțiile $\frac{a}{12}$, $\frac{a}{5}$ și $\frac{a}{36}$ reprezintă simultan numere naturale.

22 **a** Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\dfrac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

b Determinați suma celor mai mici 2011 numerele naturale nenule n pentru care fracția $\dfrac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

23 Aflați numerele naturale n pentru care fracțiile următoare sunt reductibile:

a $\dfrac{2n+3}{10n+8}$; **b** $\dfrac{3n+2}{5n+8}$; **c** $\dfrac{n+1}{n^2-3n+1}$.

24 Fie numărul $a=\dfrac{10^k-(-1)^{2k}}{9}+\dfrac{3n^2+4n+(-1)^{2k+1}\cdot n}{6}$, $n\in\mathbb{N}$ și $k\in\mathbb{N}$.
Arătați că $a\in\mathbb{N}$.

25 Demonstrați că numerele următoare sunt iraționale:

a $\sqrt{3}$; **b** $\sqrt{5}$; **c** $\sqrt{p}$, unde p este un număr natural prim.

Rezolvare: **a** Presupunem că $\sqrt{3}$ este număr rațional adică există fracția ireductibilă $\dfrac{a}{b}$ astfel încât $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$, echivalent cu $3=\dfrac{a^2}{b^2}$, sau $3b^2=a^2$. Deducem că $3\mid a$, adică $a=3a_1$, $a_1\in\mathbb{N}^*$. Înseamnă că $3b^2=(3a_1)^2$, echivalent cu $3b^2=9{a_1}^2$, sau $b^2=3{a_1}^2$. Deducem că $3\mid b$, adică $b=3b_1$, $b_1\in\mathbb{N}^*$. Deci $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3a_1}{3b_1}$ este fracție reductibilă, contrar presupunerii făcute. Rezultă că presupunerea este falsă, deci $\sqrt{3}$ este număr irațional.

26 Stabiliți dacă numărul $\sqrt{A}$ este rațional în fiecare din următoarele cazuri:

a $A=3^2+4^2+5^2$

b $A=5^{2006}+7^{2007}$;

c $A=1+3+5+7+\ldots+199$;

d $A=199+2\cdot(1+2+3+\ldots+199$.

27 Scrieți elementele mulțimilor:

a $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{4}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$;

b $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{7}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c $C=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{5}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$;

d $D=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{10}{3x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$.

28 Scrieți elementele mulțimilor:

a $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{3\quad 11}{}\in\mathbb{N}\right\}$;

b $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{5x+13}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c $C=\{x\in\mathbb{Z}\mid 75\leq 3x^2\leq 300\}$;

d $D=\{x\in\mathbb{N}\mid 14<x^2+4\leq 40\}$.

29 Determinați cifrele a, b, c, astfel încât să aibă loc relațiile:

a $\overline{4a1}\,\vdots\,3$; **b** $\overline{71a5}\,\vdots\,9$; **c** $\overline{62ab}\,\vdots\,15$;

d $\overline{2a3b}\,\vdots\,36$; **e** $\overline{aa67b}\,\vdots\,45$; **f** $\overline{99abc}\,\vdots\,198$.

30. Se consideră numărul $a=\dfrac{27}{45}$ și mulțimea $M=\{a, 2a, 3a, \ldots, 45a\}$.

a Determinați numărul de elemente din mulțimea $M\cap\mathbb{N}$;

b Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din M, acesta să fie număr natural.

Aprofundare

31 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții, demonstrând propozițiile adevărate și oferind câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a Produsul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.

b Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este număr irațional.

c Produsul unui număr irațional cu un număr rațional nenul este număr irațional.

d Există două numere iraționale a căror diferență este număr rațional.

e Pătratul oricărui număr irațional este număr rațional.

f Orice număr irațional ridicat la puterea zero este număr natural.

Rezolvare: **a** Propoziție falsă. Contraexemplu: $5-\sqrt{3}$ și $5+\sqrt{3}$ sunt numere iraționale, dar $(5-\sqrt{3})\cdot(5+\sqrt{3})=5^2-\sqrt{3}^2=25-3=22$, care nu este irațional.

32 **a** Arătați că un număr este divizibil cu 8 dacă și numai dacă numărul format de ultimele trei cifre ale sale este divizibil cu 8.

b Arătați că $\overline{abc}$ este divizibil cu 8 dacă și numai dacă $4a+2b+c \,\vdots\, 8$.

33 Se consideră numărul $a=\overline{0{,}122333\ldots\underbrace{nn\ldots n}_{n \text{ ori}}\ldots}$.

a Demonstrați că a este număr irațional.

b Determinați a 100-a cifră de după virgulă a numărului a.

34 Determinați cifra x (din baza zece) astfel încât:

a $\sqrt{\frac{\overline{24x}}{60}}\in\mathbb{N}$; **b** $\sqrt{\frac{\overline{17x}}{11}}\in\mathbb{N}$; **c** $\sqrt{\frac{\overline{2x9x}}{18}}\in\mathbb{N}$;

d $\sqrt{\frac{\overline{28x}}{18}}\in\mathbb{Q}$; **e** $\sqrt{\frac{\overline{7x}}{12}}\in\mathbb{Q}$; **f** $\sqrt{\frac{\overline{18x}}{4}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

35 Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

a $2+\sqrt{3}$; **b** $\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}$; **c** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

d $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; **e** $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; **f** $2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$.

36 Demonstrați că, dacă n este un număr natural, atunci următoarele numere nu sunt raționale:

a $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9+8}$; **b** $\sqrt{5n+2}$; **c** $\sqrt{4n+2}$.

Probleme de șapte stele

37 Fie $a \in \mathbb{Q}$. Dacă $7a \in \mathbb{Z}$ și $3a \in \mathbb{Z}$, demonstrați că $a \in \mathbb{Z}$.

38 Demonstrați că, dacă $n \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{n}\in\mathbb{N}$.

39 Arătați că numărul $x = 0{,}1010010001001...$ este irațional.

40 Fie numerele $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a+bx=c+dx$. Arătați că $a = c$ și $b = d$.