



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Nicolae Ghiciu (coordonator)

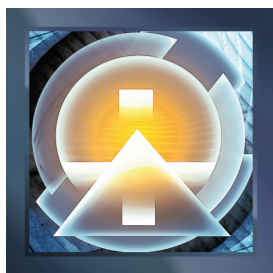
Emilia Iancu

Vicențiu Rusu

Florentina Amalia Enea

Maria Popescu

MATEMATICĂ



MANUAL PENTRU
CLASA A VI-A



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

Cuprins

PREZENTAREA MANUALULUI DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA A VI-A	3
RECAPITULARE CLASA A V-A și TESTE ÎNIȚIALE	7
CAPITOLUL 1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE	10
Unitatea de învățare: Mulțimi	10
LECȚIA 1. Mulțimi; mulțimea numerelor naturale	10
LECȚIA 2. Relații între mulțimi	13
LECȚIA 3. Operații cu mulțimi	16
Teste la final de unitate	19
Unitatea de învățare: Mulțimea numerelor naturale	22
LECȚIA 4. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	22
LECȚIA 5. Determinarea <i>c.m.m.d.c.</i> și a <i>c.m.m.m.c.</i> ; numere prime între ele	25
LECȚIA 6. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$	28
Teste la final de unitate	31
Teme pentru portofoliu	33
CAPITOLUL 2. RAPOARTE. PROPORȚII	35
Unitatea de învățare: Rapoarte și proporții	35
LECȚIA 1. Rapoarte. Procente, probleme în care intervin procente	35
LECȚIA 2. Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor	40
LECȚIA 3. Proporții derivate	43
LECȚIA 4. Șir de rapoarte egale	46
Teste la final de unitate	49
Unitatea de învățare: Mărimi	52
LECȚIA 5. Mărimi direct proporționale	52
LECȚIA 6. Mărimi invers proporționale	55
LECȚIA 7. Elemente de organizare a datelor; probabilități	58
Teste la final de unitate	62
Teme pentru portofoliu	65
CAPITOLUL 3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI	68
Unitatea de învățare: Numere întregi 1	68
LECȚIA 1. Mulțimea numerelor întregi	68
LECȚIA 2. Adunarea numerelor întregi, proprietăți	72
LECȚIA 3. Scăderea numerelor întregi	75
LECȚIA 4. Înmulțirea numerelor întregi, proprietăți	78
LECȚIA 5. Împărțirea numerelor întregi	81
Teste la final de unitate	84
Unitatea de învățare: Numere întregi 2	87
LECȚIA 6. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul	87
LECȚIA 7. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	90
LECȚIA 8. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor întregi	93
LECȚIA 9. Probleme care se rezolvă cu ecuații / inecuații în numere întregi	97
Teste la final de unitate	100
Teme pentru portofoliu	102
CAPITOLUL 4. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE	105
Unitatea de învățare: Numere raționale	105
LECȚIA 1. Număr rațional; mulțimea numerelor raționale	105

LECȚIA 2. Adunarea numerelor raționale; proprietăți; scăderea numerelor raționale	108
LECȚIA 3. Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți; împărțirea numerelor raționale.....	111
LECȚIA 4. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul.....	114
LECȚIA 5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	117
Teste la final de unitate	119
Unitatea de învățare: Ecuații	122
LECȚIA 6. Ecuații în mulțimea numerelor raționale.....	122
LECȚIA 7. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor în $\mathbb{Q}$	125
Teste la final de unitate	127
Teme pentru portofoliu	130
CAPITOLUL 5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE	134
Unitatea de învățare: Unghiuri.....	134
LECȚIA 1. Unghiuri suplimentare, unghiuri complementare	134
LECȚIA 2. Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi.....	137
LECȚIA 3. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct.....	140
Teste la final de unitate	143
Unitatea de învățare: Perpendicularitate.....	145
LECȚIA 4. Drepte perpendiculare în plan. Mediatoarea unui segment	145
Teste la final de unitate	151
Unitatea de învățare: Paralelism	154
LECȚIA 5. Drepte paralele; axioma paralelelor. Aplicații practice	154
LECȚIA 6. Criterii de paralelism.....	157
Teste la final de unitate	160
Unitatea de învățare: Cercul	163
LECȚIA 7. Cerc; elemente în cerc	163
LECȚIA 8. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	166
Teste la final de unitate	169
Teme pentru portofoliu	171
CAPITOLUL 6. TRIUNGHIUL	174
Unitatea de învățare: Triunghiul	174
LECȚIA 1. Triunghiul; clasificare; perimetru.....	174
LECȚIA 2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	178
LECȚIA 3. Construcția triunghiurilor	181
LECȚIA 4. Linii importante în triunghi	184
Teste la final de unitate	187
Unitatea de învățare: Congruențe.....	190
LECȚIA 5. Congruența triunghiurilor oarecare.....	190
LECȚIA 6. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice	193
LECȚIA 7. Metoda triunghiurilor congruente.....	196
Teste la final de unitate	199
Unitatea de învățare: Triunghiuri particulare	202
LECȚIA 8. Proprietăți ale triunghiului isoscel.....	202
LECȚIA 9. Proprietăți ale triunghiului echilateral.....	205
LECȚIA 10. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	208
Teste la final de unitate	211
Teme pentru portofoliu	214
Evaluare finală	217
Răspunsuri	220

RECAPITULARE CLASA A V-A și TESTE ÎNȚIALE

1. Scrie cu cifre numărul șapte sute de mii opt.
2. Rotunjește la sute numărul 43827.
3. Determină numărul natural cu 389 mai mare decât 24892.
4. Calculează: **a)** $3024 \cdot 58 + 3024 \cdot 43 - 3024$; **b)** $\left[8 + 8 \cdot (8^2 + 8^{98} : 8^{96})\right] : 129$.
5. **a)** Compară numerele $a = (3^2)^3 \cdot 3^4 : 3^4$ cu $b = 27$;
b) Ordonează crescător numerele: $\frac{11}{3}$, $3\frac{5}{6}$ și $3,(3)$.
6. Arată că numărul $n = 1 + 2 + \dots + 20 + 75 : 5$ este pătrat perfect.
7. Determină ultima cifră a numărului $3^9 + 2^9 + 5^9$.
8. Determină:
a) cel mai mare număr natural care, împărțit la 29, dă câtul 12;
b) cel mai mic multiplu al numărului 25;
c) cel mai mic număr natural care se divide cu 24, 36 și 60.
9. Arată că: **a)** 3429 se divide cu 9; **b)** 175 este multiplu al lui 35; **c)** $(1 + 3 + 3^2 + 3^3) : 10$.
10. Arată că produsul oricăror trei numere naturale consecutive este divizibil cu 6.
11. Maria a adunat două coșuri cu piersici. În primul coș are 45 de piersici, iar în al doilea 32 de piersici. Ea le pune pe toate în cutii în care încap exact 8 piersici. Câte cutii va umple și câte piersici vor rămâne în cutia care nu se completează?
12. Dacă 6 caiete costă 18 lei, află cât costă 10 caiete.
13. Într-o curte sunt rațe și iezi. Câte rațe și câți iezi sunt în curte, dacă sunt 11 capete și 30 de picioare?
14. Determină valorile mai mari sau egale cu 5 pe care le poate avea numitorul unei fracții cu numărătorul egal cu 7, astfel încât aceasta să fie supraunitară.
15. Scrie sub formă de fracție ordinară ireductibilă: **a)** $2\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{26}{130}$; **c)** 6,12.
16. Scrie sub formă de fracție zecimală numărul trei întregi și cinci sutimi și apoi sub formă de fracție ordinară ireductibilă.
17. Calculează: **a)** suma numerelor 3,72 și 2,2; **b)** numărul de 100 de ori mai mic decât 258;
c) $\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{10} + \frac{4}{9} : \frac{10}{9} + \frac{5^2}{5^3}$; **d)** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cdot 2^4$; **e)** $\frac{1}{201} + \frac{2}{201} + \dots + \frac{201}{201}$;
f) $(1 + 1,8^2 \cdot 100) : (2,4 \cdot 15 - 0,1^3 \cdot 1000 \cdot 11)$; **g)** $5,2 + 5,(2) - 5,02 - 5,0(2)$.
18. Diferența a două numere este 78,24. Unul dintre ele este de trei ori mai mare decât celălalt. Determină cele două numere.

19. Calculează suma și diferența măsurilor unghiurilor de $102^{\circ}12'25''$ și $62^{\circ}31'34''$.
20. Dacă A, B, C sunt puncte coliniare și $AB = 2,4$ cm, iar $BC = 3,2$ cm, calculează lungimea segmentului AC . Câte soluții are problema? Reprezintă printr-un desen.
21. Desenează și notează corespunzător: a) două segmente congruente care au un punct comun; b) două drepte concurente într-un punct P și alte două puncte distincte, coliniare cu P ; c) un unghi ascuțit cu vârful în punctul O și laturile OA și OB .
22. Calculează:
 a) aria unui dreptunghi cu dimensiunile: lungimea de 0,4 m și lățimea de 15 cm;
 b) volumul paralelipipedului dreptunghic cu lungimea de 1 dm, lățimea cât jumătate din lungime și înălțimea un sfert din lungime.
23. Copiază și completează spațiile punctate pentru a obține enunțuri adevărate:
 a) $1\text{ m} = \dots \text{ dm}$; b) $0,25 \text{ cm}^3 = \dots \text{ mm}^3$; c) $12847 \text{ m}^2 = \dots \text{ ha}$.
24. Un acvariu are lungimea de 72 cm, lățimea de 45 cm și înălțimea de 38 cm. a) Determină capacitatea acvariului; b) Dacă în acvariu se pun 97,2 l de apă, calculează cât din capacitatea acvariului rămâne fără apă; c) Calculează distanța de la marginea superioară a acvariului la nivelul apei.

Testul inițial 1

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

- | | |
|-----|---|
| 10p | 1. Numărul natural trei sute patru mii treizeci și șase se scrie cu cifre |
| 10p | 2. Un divizor impropriu al numărului 15 este numărul |
| 10p | 3. Două drepte care au un singur punct comun se numesc |

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

- | | |
|-----|--|
| 10p | 1. Rezultatul calculului $3^2 + 2^3 + 0^{100} - 100^0 + 1^{1001}$ este:
a) 26; b) 25; c) 17; d) 14. |
| 10p | 2. Dacă fracțiile $\frac{x}{12}$ și $\frac{1}{3}$ sunt echivalente, atunci x este:
a) 36; b) 2; c) 3; d) 4. |
| 10p | 3. Perimetrul unui dreptunghi cu lățimea de 8cm și lungimea $3\frac{1}{4}$ din lățime este:
a) 68 cm; b) 680 cm; c) 40 cm; d) 22 cm. |

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

- | | | |
|-----|----|---|
| 10p | 1. | Pentru 3 kg de struguri și 5 kg de mandarine s-au plătit 44 lei, iar pentru 5 kg de struguri și 10 kg de mandarine 80 lei. Cât costă un kg de struguri și cât unul de mandarine? |
| 10p | 2. | Scrieți numerele naturale de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 9 și cu 5. |
| 10p | 3. | Dacă suma măsurilor a două unghiuri reprezintă două treimi din măsura unui unghi alungit și unul dintre unghiuri are măsura o treime din măsura celui alt unghi, aflați măsurile celor două unghiuri și reprezentați-le prin desen. |

Testul inițial 2

Se acordă 10p din oficiu

I. Pe foaia de rezolvare, în spațiile punctate, scrie cuvintele sau rezultatele care fac enunțurile adevărate.

- | | | |
|-----|----|--|
| 10p | 1. | Dintre fracțiile $\frac{5}{12}$ și $\frac{5}{16}$ mai mică este fracția ... |
| 10p | 2. | Fracția ordinară $\frac{7}{20}$ scrisă sub formă de fracție zecimală este... |
| 10p | 3. | Perimetrul unui pătrat cu latura de 0,25 cm este de ... cm. |

II. Pe foaia de rezolvare, scrie numai litera răspunsului corect, știind că doar unul din cele patru răspunsuri este corect.

- | | | |
|-----|----|---|
| 10p | 1. | Dacă numărul $\overline{245a}$ este divizibil cu 3, atunci:
a) $a \in \{0,5\}$; b) $a \in \{0,3,6,9\}$; c) $a \in \{1,7\}$; d) $a \in \{0,2,4,6,8\}$. |
| 10p | 2. | Numărul de 3,5 ori mai mare decât 2,8 este:
a) 980; b) 98; c) 9,8; d) $\frac{5}{4}$. |
| 10p | 3. | Numărul minim de drepte determinat de 8 puncte distincte este:
a) 0; b) 1; c) 2; d) 8. |

III. Pe foaia de rezolvare, scrie rezolvările complete, pentru următoarele exerciții:

- | | | |
|-----|----|--|
| 10p | 1. | Aflați două numere naturale a căror diferență este 48, iar unul dintre numere este o cincime din celălalt. |
| | 2. | Aflați media aritmetică a numerelor: 0,5; 2,4; 5,28 și 2,22. |
| 10p | 3. | Calculați: a) $4,8 \text{ dm} + 125,7 \text{ m} = \dots \text{ dam}$; b) $0,07 \text{ hg} + 1,2 \text{ dag} = \dots \text{ kg}$; |
| 10p | | c) $0,3 \text{ m}^3 + 300 \text{ cm}^3 = \dots \text{ l}$. |

Capitolul 1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Unitatea de învățare: Mulțimi

LECȚIA 1. Mulțimi; mulțimea numerelor naturale

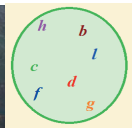
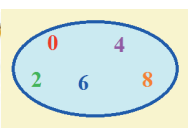


Atenție, începem!



Din ce este formată o mulțime?

A1. Precizați prin ce se caracterizează: trandafirii din *buchet*, pepenii din *grămadă*, trandafirul *singur*, cifrele din *grup*, literele din *grup*, parașutiștii din *formație*, păsările din *stol*, respectiv cuvântul *elevele*.



A2. Ce termen ar putea înlocui cuvintele: *buchet*, *grămadă*, *grup*, *formație*, *stol*, *cuvânt*?

Care este relația dintre element și mulțime?

A3. Răspundeți la următoarele întrebări:

- Trandafirul galben* face parte din mulțimea de trandafiri roșii?
- Cifra 4 face parte din mulțimea de cifre? Dar cifra 3?
- Litera *c* face parte din mulțimea de litere? Dar litera *a*?
- De câte ori apare litera *e* în cuvântul *elevele*? Dar în mulțimea $\{e, l, v\}$?



Ce ne învață teoria?



1. O mulțime este formată din **obiecte** (fizice sau ale gândirii) care au o **proprietate comună**.

Exemple: Mulțimea elevilor din clasa noastră; mulțimea cifrelor în baza 10.

2. Obiectele din care este formată o mulțime se numesc **elementele mulțimii**. Ele sunt distincte, iar ordinea lor nu este importantă.

Exemplu: Elementele mulțimii planetelor din Sistemul nostru Solar sunt: Jupiter, Marte, Mercur, Neptun, Pământ, Saturn, Venus, Uranus.

3. O mulțime formată din numere se numește **mulțime numerică**.

Exemple: Mulțimea cifrelor zecimale este o mulțime numerică; mulțimea județelor țării nu este o mulțime numerică.

4. Mulțimile se notează cu litere mari din alfabetul latin, cu sau fără indici: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$. Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu simbolul $\emptyset$.

5. Mulțimile se reprezintă prin:

- **enumerarea elementelor între acolade**

(Dacă A este mulțimea literelor din cuvântul *elevele*, scriem $A = \{e, l, v\}$),

- **proprietate caracteristică**

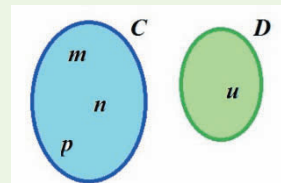
(Dacă B este mulțimea resturilor împărțirii unui număr natural la 5, scriem

$B = \{r \mid r \text{ este rest la împărțirea unui număr natural la } 5\}$,

de fapt $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$),

- **diagrame Venn–Euler**

(Mulțimile $C = \{m, n, p\}$ și $D = \{u\}$, din figura alăturată).



6. Între un element și o mulțime vorbim de:

- relația de apartenență**, dacă elementul se regăsește în mulțime și folosim simbolul „ $\in$ ”.
- relația de nonapartenență**, dacă elementul nu se regăsește în mulțime și folosim simbolul „ $\notin$ ”.

Exemple: a) Scriem: $2 \in \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$ și citim „2 aparține mulțimii cifrelor pare”.

b) Scriem: $3 \notin \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$ și citim „3 nu aparține mulțimii cifrelor pare”.

c) În diagrama de mai sus, $m \in C$ și $m \notin D$.

7. Mulțimile pot fi **mulțimi finite** (dacă numărul lor de elemente poate fi indicat printr-un număr natural) sau **mulțimi infinite** (în caz contrar). **Cardinalul unei mulțimi** X reprezintă numărul elementelor mulțimii X și îl notăm **card** X sau $|X|$.

Exemple:

a) Mulțimea $D_6 = \{d \mid d \text{ divide } 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$ este finită deoarece **card** $D_6 = 4$;

b) $\{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ este număr prim}, n:10\} = \emptyset$, iar **card** $\emptyset = 0$.

Observație: $\{0\} \neq \emptyset$.

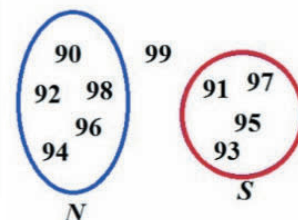
c) Mulțimile $\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ este număr natural}\}$, $P = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$, $I = \{n \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ sunt infinite.

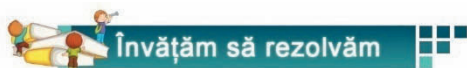


Să vedem ce am înțeles

Referindu-ne la diagrama Venn-Euler alăturată, să scriem:

- relația dintre fiecare element și fiecare mulțime dată prin diagramă, precum și cardinalele acestor mulțimi;
- elementele fiecărei mulțimi, prin enumerare și apoi folosind o proprietate caracteristică.





1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ număr impar, cu } 3 \leq x < 14\}$.

Rezolvare: Numerele care verifică inegalitățile din enunț sunt: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Dintre acestea le selectăm pe cele impare și obținem $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

2. Scrieți mulțimea $B = \{1, 5, 25, 125, 625\}$ folosind o proprietate caracteristică a elementelor.

Rezolvare: Observăm că toate elementele mulțimii B sunt puteri ale lui 5: $1 = 5^0$, $5 = 5^1$, $25 = 5^2$, $125 = 5^3$ și $625 = 5^4$, cu exponenții numere naturale de la 0 la 4. Astfel, mulțimea se poate scrie sub forma $B = \{5^n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 4\}$.



1. Dă exemple de mulțimi având ca elemente *obiecte*:

a) din clasa ta; **b)** de la matematică; **c)** de la geografie; **d)** de la limba română.

2. Găsește greșeala și rescrie corect mulțimile: $A = \{3, 5, 7, 9, 5\}$; $B = \{x, y, x, z\}$; $C = \{3, 3, 3\}$; $D = \{2, b, 3, b\}$; $E = \{3, a, 5, a, 3\}$.

3. Scrie mulțimea cifrelor numărului: **a)** 233696; **b)** 44223; **c)** 100000; **d)** 111111.

4. Reprodre și completează spațiile punctate cu simbolul potrivit „ $\in$ ” sau „ $\notin$ ”:

a) 2 ... $\{1, 2, 3\}$; **b)** m ... $\{a, b, c\}$; **c)** 7 ... $\{5, 7, 6, 8\}$; **d)** 0 ... $\emptyset$.

5. Reprezintă în trei moduri mulțimile: $A =$ Mulțimea cifrelor impare;

$B =$ Mulțimea vocalelor alfabetului latin; $C =$ Mulțimea multiplilor lui 4, mai mici decât 30;

$D =$ Mulțimea numerelor naturale care, înmulțite cu 3, dau 18; $E =$ Mulțimea divizorilor lui 9.



6. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor enunțuri:

a) $2 \in \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \cdot x - 1\}$; **b)** $3 \in \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$; **c)** $0 \notin \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 4\}$.

7. Reprezintă fiecare mulțime prin enumerarea elementelor sale:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 8\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 7 \mid x\}$,

$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 = 4\}$, $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x - 1 \leq 2\}$.



8. Reprezintă fiecare mulțime, folosind proprietatea caracteristică a elementelor sale:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{0, 2, 4, \dots, 16\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, \dots, 15\}$,

$D = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$, $E = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

9. Precizează care dintre următoarele mulțimi sunt finite și care sunt infinite:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5 \cdot x + 4 = 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x - 7 < 3\}$,

$C = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x \mid x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\}$.

LECȚIA 2. Relații între mulțimi



Atenție, începem!

Ce înțelegem prin mulțimi egale?

A1. Prin ce se caracterizează **mulțimea vidă**? Arătați că mulțimile: $A = \{\text{ianuarie, martie, mai, iulie, august, octombrie, decembrie}\}$ și $B = \{x | x \text{ lună a anului care are 31 de zile}\}$ au aceleași elemente.

A2. Arătați că mulțimea C a literelor cuvântului *analog* este egală cu mulțimea D a literelor cuvântului *golan*.

Ce înțelegem prin submulțime sau parte (mulțime inclusă în altă mulțime) a unei mulțimi?

A3. Dacă A este mulțimea literelor cuvântului *răstit* și B cea a literelor cuvântului *săritor*, scrieți mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și răspundeți la întrebările:

a) Orice element al mulțimii A este element al mulțimii B ?

Este mulțimea A inclusă în B ? Este A submulțime a lui B ?

b) Există cel puțin un element al lui B care nu aparține lui A ?

Este mulțimea B inclusă în A ? Este B submulțime a lui A ?

A4. Indicați patru submulțimi ale mulțimii scaunelor de pe stadionul din figură.



Ce ne învață teoria?

1. Două mulțimi A și B sunt **egale** dacă au **aceleași elemente**. Notăm $A = B$.

Două mulțimi A și B , care nu au **aceleași elemente**, nu sunt egale, chiar dacă au același număr de elemente. Notăm $A \neq B$.

Exemple:

a) Mulțimea $M = \{c, o, ș\}$ a literelor cuvântului „cocoș” și mulțimea $N = \{c, o, ș\}$ a literelor cuvântului „șoc” sunt egale. Notăm $M = N$.

b) Mulțimile $D_3 = \{n | n \in \mathbb{N}, n \mid 3\} \neq D_5 = \{n | n \in \mathbb{N}, n \mid 5\}$, deoarece $3 \in D_3 = \{1, 3\}$ și $3 \notin D_5 = \{1, 5\}$.

2. O mulțime A este **submulțime** a mulțimii B (sau mulțimea A este inclusă în mulțimea B) dacă fiecare element x din A este în același timp și element al mulțimii B . Notăm $A \subseteq B$. Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B , atunci A nu este submulțime a lui B și notăm $A \not\subseteq B$.

3. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi. Orice mulțime A are submulțimile A și $\emptyset$, numite **submulțimi improprii**. Orice submulțime a lui A , diferită de $\emptyset$ și de A , dacă există, se numește **submulțime proprie** a lui A . Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci $A = B$.

4. Mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi M formează **mulțimea părților mulțimii** M și se notează $P(M)$.

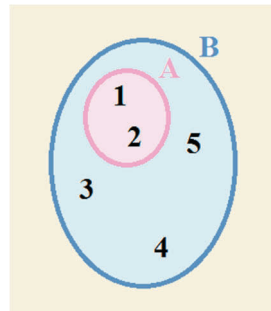
Exemple:

a) În figura alăturată mulțimea $A = \{1, 2\}$ este o submulțime a mulțimii $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pentru că cele două elemente ale lui A sunt în același timp și elemente ale lui B ; notăm $A \subseteq B$;

b) Mulțimea $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ nu este submulțime a lui $C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, pentru că $5 \in B$, dar $5 \notin C$; notăm $B \not\subseteq C$.

c) Dacă A este mulțimea literelor cuvântului „pici” și B mulțimea literelor cuvântului „cip”, atunci $A = \{p, i, c\}$ și $B = \{c, i, p\}$. Prin urmare $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$. Deci $A = B$.

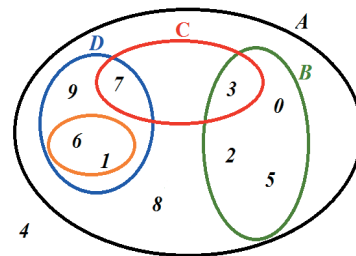
d) Mulțimea $A = \{0, 1, 2\}$ are următoarele submulțimi: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A$. Acestea formează mulțimea părților lui A , $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$.



Să vedem ce am înțeles

Referindu-ne la diagrama Venn-Euler alăturată:

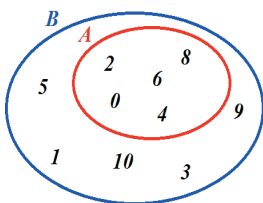
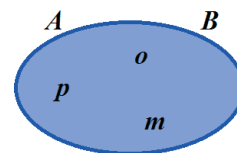
- Să scriem un element din mulțimea B și relația dintre acesta și celelalte mulțimi;
- Să scriem relația dintre mulțimea B și celelalte mulțimi;
- Să scriem două submulțimi ale mulțimii D ;
- Să scriem patru mulțimi care nu sunt incluse în D .



Învățăm să rezolvăm

1. Fie mulțimile $A = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „pom”}\}$ și $B = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „mop”}\}$. Stabiliți dacă $A = B$.

Rezolvare: $m \in A$ și $m \in B$, $o \in A$ și $o \in B$, de asemenea $p \in A$ și $p \in B$. Deci $A = B$.



2. Stabiliți relația dintre mulțimile $A = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$ și $B = \{x \mid x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$.

Rezolvare: $0 \in A$ și $0 \in B$, $2 \in A$ și $2 \in B$, $4 \in A$ și $4 \in B$, $6 \in A$ și $6 \in B$, $8 \in A$ și $8 \in B$. Deci toate elementele din A se află în B , adică $A \subseteq B$.



Acum să rezolvăm singurii!



1. Reprodu și înlocuiește spațiile punctate cu unul dintre simbolurile „ $\subset$ ”, „ $\nsubseteq$ ” sau „ $\subseteq$ ”:
 - a) $\{b\} \dots \{a, b, c\}$; b) $\{2\} \dots \{1, 2, 4\}$; c) $\{l, m\} \dots \{l, m, n\}$;
 - d) $\{l, m, n\} \dots \{l, m, n\}$; e) $\{0\} \dots \emptyset$.
2. Reprodu și completează enunțul cu simbolul potrivit: „ $=$ ” sau „ $\neq$ ”. Dacă A este mulțimea formată din literele cuvântului *pepene* și B este mulțimea formată din literele cuvântului *pene*, atunci $A \dots B$.
3. Descoperă și corectează greșala:
 - a) $\Delta \subset \{\Delta, \bigcirc, \square\}$; b) $\{a, b, c\} = \{x, y, z\}$; c) $\emptyset \in \{0\}$;
 - d) $\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \vdots x\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \vdots x\}$; e) $\{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 = 2\} \subseteq \{6\}$;
 - f) $\{x \mid x \text{ este ultima cifră a puterilor lui } 3\} \subseteq \{1, 3, 7, 9\}$; g) $\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \vdots x\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \vdots x\}$;
 - h) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{0, 3, 6, 9, 12\}$; i) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\} \subset \{1, 2, 3\}$;
 - j) $\{n \mid 2^n = 1\} \subset \{0, 1\}$; k) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 2 = 6\} \subset \{1, 2, 3\}$;
 - l) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \leq 3\} \subseteq \{0, 1\}$; m) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 2 = 1\} \subseteq \{2x - 1 < 3\}$.
4. Determină x , astfel încât mulțimea $\{x, 2\}$ să fie submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
5. Fie mulțimile $A = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$ și $B = \{0, x, 4, 6, 8\}$. Stabiliți valoarea lui x , dacă $A = B$.
6. Pentru mulțimea $A = \{a, b, c\}$, scrie:
 - a) submulțimile improprii; b) toate submulțimile.
7. Pentru numărul 12, scrie mulțimea divizorilor:
 - a) proprii; b) improprii.
8. Scrie submulțimea multiplilor lui 2:
 - a) mai mici decât 12; b) cel mult egali cu 14.
9. Formulează o problemă cu același enunț ca cel al problemei 8, pentru numărul 3, apoi rezolvă problema.
10. Formulează o problemă cu același enunț ca cel al problemei 7, pentru numărul 14, apoi rezolvă problema.
11. Fie mulțimea $A = \{0, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 12\}$. Scrie submulțimea mulțimii A formată din:
 - a) multiplii lui 2; multiplii lui 3; multiplii lui 4; multiplii lui 6;
 - b) divizorii lui 6; divizorii lui 8; divizorii lui 9; divizorii lui 10.
12. Scrie două submulțimi ale mulțimii $\{3, 6, 8, 15, 27\}$, care să satisfacă simultan condițiile:
 - a) nu au elemente comune; b) au aceeași sumă a elementelor.