

DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIȘANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIȘOR
NICOLAE LUPA

ROMEO NEGREA
GHEORGHE ȚIGAN
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN

**CULEGERE
DE PROBLEME
DE MATEMATICĂ**

**pentru examenul
de admitere din anul 2020 la**

**UNIVERSITATEA
POLITEHNICA
TIMIȘOARA**

Colecția "LICEU"

**EDITURA POLITEHNICA
TIMIȘOARA - 2019**

Cuprins

| | |
|--|------------|
| PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL) | 9 |
| PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG) | 99 |
| PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ (simbol AM) | 117 |
| ANEXE | |
| Subiectele date la admitere în anii 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 și 2019 cu rezolvările integrale | 186 |
| BIBLIOGRAFIE | 245 |

PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze

$$\{3, 3\} + \{-3, 3\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

- a) 0 b) 0,3 c) 0,6 d) 6,6 e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$ și $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$. Câte numere naturale conține mulțimea $A \cap B$?

- a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluțiilor ecuației

$$|x| + |x + 2| = 3.$$

- a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq 6\} ?$$

- a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine cea mai mare valoare a numărului natural n pentru care este verificată inegalitatea $(x + 2y)^2 \geq nxy$ oricare ar fi numerele reale x și y .

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8 f) nu există

AL 6 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$$

- a) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ b) $(-\infty, -1)$ c) \mathbb{R}
 d) \emptyset e) $(1, +\infty)$ f) $(-\infty, -2)$

AL 7 Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8} \leq x+2.$$

- a) $[1, \infty)$ b) $[-8, -4] \cup [1, \infty)$ c) $[-8, -4]$
 d) $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ e) $(-\infty, -4]$ f) $[-2, \infty)$

AL 8 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuația

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puțin o soluție reală.

- a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
 d) $-2, 1 \pm \sqrt{2}$ e) $2 \pm \sqrt{2}$ f) $0, 1 \pm \sqrt{2}$

AL 9 Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 1.$$

- a) $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ b) $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ c) $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right]$
 d) $[-1, +\infty)$ e) \emptyset f) $(-1, +\infty)$

Respect pentru oameni și cărți

AL 10 Fie ecuația

$$x^2 + |x| = mx(x + 3), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului m astfel încât această ecuație să aibă exact trei soluții reale diferite.

- | | | |
|-------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) \mathbb{R} | b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ | c) \emptyset |
| d) $(-\infty, 1]$ | e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ |

AL 11 Să se determine suma elementelor mulțimii

$$\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|------|------|------|
| a) -5 | b) -4 | c) -1 | d) 0 | e) 2 | f) 5 |
|-------|-------|-------|------|------|------|

AL 12 Știind că a este un parametru real, să se determine mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$x^2 - x(a^2 + \sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2} = 0.$$

- | | | |
|----------------------------|-----------------|----------------------|
| a) $\{\sqrt{2}, a^2\}$ | b) $\{1, a^2\}$ | c) $\{\sqrt{2}, a\}$ |
| d) $\{\sqrt{2}, a^2 + 1\}$ | e) $\{1, a\}$ | f) $\{2, a\}$ |

AL 13 Să se găsească mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

- | | | |
|-------------|----------------|---------------|
| a) $\{1\}$ | b) $\{0, -1\}$ | c) $\{0, 2\}$ |
| d) $\{-1\}$ | e) \emptyset | f) $\{0\}$ |

AL 14 Să se determine mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

- a) $\{-1, 0, 1\}$ b) $\{-1, 1, 2\}$ c) $\{-1, 0, 2\}$
 d) $\{0, 1, 2\}$ e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

AL 15 Andrei și Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câștigă prima rundă, iar Cristian o câștigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârșitul celei de-a doua runde?

- a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 16 Valer pleacă la școală având suma de x lei cu el, unde x este un număr natural din intervalul $(2, 6]$ și cheltuiește $\frac{2}{x-2}$ din aceasta. Să se determine mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua x , dacă el se întoarce acasă fără datorii.

- a) $\{3, 4, 5, 6\}$ b) $\{3, 4, 5\}$ c) $(2, 6]$
 d) $\{3, 4\}$ e) \emptyset f) $\{4, 5, 6\}$

AL 17 Maria cheltuiește $\frac{3}{8}$ din salariul său lunar pe chirie și $\frac{5}{12}$ pe mâncare. Ana, care câștigă dublu față de Maria, cheltuiește un sfert din salariul său pe chirie și jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată și suma pe care o câștigă fetele împreună?

- a) $\frac{17}{72}$ b) $\frac{17}{24}$ c) $\frac{17}{48}$ d) $\frac{23}{24}$ e) $\frac{23}{72}$ f) $\frac{23}{48}$

Respect pentru oameni și cărți

AL 18 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent crește b ?

- a) 56,25% b) 40% c) 20%
 d) 0,025% e) 0,5% f) 60%

AL 19 Suma totală de bani depusă la Smart Bank se mărește de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor crește suma medie depusă în fiecare cont?

- a) 2 b) 8 c) 9,8 d) 12 e) 12,5 f) 13

AL 20 Prețul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu p lei este s lei. Pentru comenzi ce depășesc p lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depășește p lei. Dacă valoarea comenzii este x lei ($x > p$), care este prețul transportului?

- a) $s + 0,05x$ b) $s + 0,05p$ c) $0,05(s - p + x)$
 d) $s + 0,05(x - p)$ e) $s + 0,05(p - x)$ f) $s + 0,05(x + p)$

AL 21 Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{și} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

- a) $E_1 = -\frac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$ b) $E_1 = -\frac{1+3a}{a^3}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$
 c) $E_1 = -\frac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ d) $E_1 = \frac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$
 e) $E_1 = \frac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ f) $E_1 = -\frac{1}{a^2}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$

AL 22 Fie ecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine o relație independentă de a între x_1 și x_2 .

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ | b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$ |
| c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ | d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$ |
| e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ | f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$ |

AL 23 Fie ecuația

$$x^2 - x - a = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine o ecuație de gradul doi în variabilă y ce are soluțiile $y_1 = \frac{x_1^2}{x_2}$ și $y_2 = \frac{x_2^2}{x_1}$.

- | | |
|--|--|
| a) $y^2 - \frac{1 + 2a}{a}y - a = 0$ | b) $y^2 + \frac{1 + 3a}{a}y - a = 0$ |
| c) $y^2 - \frac{1 + 3a}{a}y - a = 0$ | d) $y^2 - \frac{1 + 2a}{a}y - a^2 = 0$ |
| e) $y^2 - \frac{1 + 3a}{a}y - a^2 = 0$ | f) $y^2 + \frac{1 + 4a}{a}y - a = 0$ |

AL 24 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real nenul a știind că inecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|-------------------|-------------------|----------------|
| a) $(-\infty, 1]$ | b) $[1, +\infty)$ | c) $\{1\}$ |
| d) $(0, 1]$ | e) \mathbb{R} | f) \emptyset |

Respect pentru oameni și cărți

AL 25 Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a + 2)x + 2a = 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a , știind că $A \cap B$ are un singur element.

- a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) \mathbb{R} f) \emptyset

AL 26 Fie $a \in \mathbb{R}$ și mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a + 2)x + 2a \leq 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului a , știind că intersecția $A \cap B$ are exact două elemente.

- a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$
 d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) \emptyset f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

AL 27 Se consideră un pătrat de arie S_1 . Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2 . În același mod, construim succesiv un șir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n \geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017S_n \geq S_1$.

- a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 28 Discriminantul unei ecuații de gradul II cu coeficienți întregi nu poate fi

- a) -2015 b) -2016 c) 112 d) 2016 e) 2017 f) 2018

Respectați regulile de etichetare și citiți

AL 29 Câte dintre submulțimile lui $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ conțin exact un număr impar?

- a) 5 b) 16 c) 32 d) 64 e) 37 f) 160

AL 30 Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$\frac{2x + 5x^2 + 8x^3}{x^2} \text{ pentru } x > 0.$$

- a) 0 b) 2 c) 8 d) 13 e) 15 f) 22

AL 31 Fie a, b, c numere reale nenule. Să se determine soluțiile ecuației

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ | b) $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$ |
| c) $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | d) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ |
| e) $-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ | f) niciuna dintre acestea |

AL 32 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuația

$$(a - 1)(a - 3) + (b - 5)(b - 7) + (c - 9)(c - 11) < 0?$$

- a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 33 Să se formeze ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ și } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.