

Petre Năchilă

Ora de matematică

Clasa a VIII-a

Editura NOMINATRIX

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

1.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	5
1.2. Intervale de numere reale. Intersecția și reuniunea intervalelor.....	17
1.3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, >, <$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	21
1.4. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor, inecuațiilor.....	23
TESTE DE EVALUARE.....	25

CAPITOLUL 2. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

2.1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere Adunarea și scăderea	29
2.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent întreg	31
2.3. Formule de calcul prescurtat.....	33
2.4. Descompunerea în factori	37
2.5. Frații algebrice. Amplificarea. Simplificarea.....	40
2.6. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice	44
2.7. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere a fracțiilor algebrice	47
2.8. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	51
2.9. Probleme pentru concursurile școlare	53
TESTE DE EVALUARE.....	56

CAPITOLUL 3. FUNCȚII.....

3.1. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite.....	57
3.2. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice.....	60
3.3. Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$	64
3.4. Funcții de forma $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, A interval, $f(x) = ax + b$	68
3.5. Probleme cu caracter aplicativ	73
TESTE DE EVALUARE.....	74
3.6. Elemente de statistică matematică. Frecvențe, indicatori statistici	76
3.7. Probleme pentru concursurile școlare	79

GEOMETRIE

CAPITOLUL 4. ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

4.1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei și a planului.....	82
4.2. Piramida, tetraedrul.....	86
4.3. Prisma. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul	89
4.4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu. Relația de paralelism	92
4.5. Unghiul a două drepte în spațiu. Drepte perpendiculare.....	94
4.6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan. Dreapta paralelă cu planul	96

4.7. Dreapta perpendiculară pe plan. Distanța de la un punct la un plan.	
Înălțimea piramidei	98
TESTE DE EVALUARE.....	100
4.8. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele. Înălțimea prismei.....	101
4.9. Secțiuni paralele cu baza. Trunchiul de piramidă	105
TESTE DE EVALUARE.....	107
4.10. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan.....	108
4.11. Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecției unui segment	111
4.12. Teorema celor trei perpendiculare	114
4.13. Calculul unor distanțe: de la un punct la o dreaptă, dintre două plane paralele.....	118
4.14. Unghi diedru. Unghiul plan corespunzător diedrului.....	120
4.15. Plane perpendiculare	123
4.16. Calculul unor distanțe și unghiuri	125
TESTE DE EVALUARE.....	128
4.17. Probleme pentru concursurile școlare	131
CAPITOLUL 5. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE.....	133
5.1. Paralelipipedul dreptunghic	133
5.2. Cubul.....	136
5.3. Prisma	138
TESTE DE EVALUARE.....	141
5.4 Piramida regulată. Piramida triunghiulară regulată. Tetraedrul regulat.....	143
5.5. Piramida patrulateră regulată	147
5.6. Piramida hexagonală regulată	151
5.7. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată	153
5.8. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată	156
TESTE DE EVALUARE.....	159
5.9. Cilindrul circular drept.....	161
5.10. Conul circular drept	163
5.11. Trunchiul de con circular drept.....	165
5.12. Sfera	167
TESTE DE EVALUARE.....	168
MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE	170
Semestrul I	170
Semestrul al II-lea	173

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1

Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}

1.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

A. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$; $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

Avem:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Observații:

1) \mathbb{N} este stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor naturale (suma și produsul a două numere naturale este număr natural).

2) Mulțimea \mathbb{N} nu este stabilă în raport cu scăderea și împărțirea.

Exemplu: 3 și 5 $\in \mathbb{N}$, dar $3 - 5 \notin \mathbb{N}$, $3 : 5 \notin \mathbb{N}$.

3) \mathbb{Z} este stabilă în raport cu adunarea, scăderea și înmulțirea.

4) \mathbb{Z} nu este stabilă în raport cu împărțirea.

5) \mathbb{Q} este stabilă în raport cu adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea.

6) Pentru orice număr rațional r există o fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$ (unică) cu $a \in \mathbb{Z}$,

$b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $r = \frac{a}{b}$.

7) Orice număr rațional poate fi reprezentat prin fracții ordinare echivalente sau printr-o fracție zecimală finită sau printr-o fracție zecimală periodică (simplă sau mixtă).

8) Vom lucra cu perioada diferită de 0 și de 9. Astfel, avem:

$$8,(0) = 8; 3,46(0) = 3,46; -5,(9) = -5\frac{9}{9} = -6.$$

9) Transformările fracțiilor ordinare în fracții zecimale au loc prin algoritmul de împărțire: $\frac{8}{25} = 8 : 25 = 0,32$; $-\frac{2}{3} = -0,(6)$; $\frac{47}{30} = 1,5(6)$.

10) Transformările fracțiilor periodice în fracții ordinare:

I. fracție zecimală neperiodică: $\overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_n} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{100 \dots 00}_{n \text{ cifre de } 0}}$;

II. fracție zecimală periodică simplă: $\overline{a_0, (a_1 a_2 \dots a_n)} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}}}$;

III. fracție zecimală periodică mixtă:

$$\overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_m (a_{m+1} \dots a_{m+p})} = a_0 \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_{m+p}} - \overline{a_1 a_2 \dots a_m}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ cifre}} \underbrace{00 \dots 0}_{m \text{ cifre}}}.$$

11) Orice număr irațional este reprezentat printr-o fracție zecimală infinită și neperiodică.

Exemple: $2,31311311131111\dots$; \sqrt{p} , p număr prim.

12) Mulțimea numerelor reale \mathbb{R} este reuniunea dintre \mathbb{Q} și mulțimea numerelor iraționale.

Teoremă. Fie numărul rațional $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Numărul se transformă în:

I. fracție zecimală finită dacă $b = 2^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbb{N}$;

II. fracție zecimală periodică simplă dacă b conține în descompunerea sa numai factori primi diferiți de 2 și 5;

III. fracție zecimală periodică mixtă dacă b conține în descompunerea sa cel puțin unul din factorii 2 sau 5, dar și cel puțin un factor prim diferiți de 2 și 5, partea neperiodică având un număr de cifre egal cu cel mai mare dintre exponenții lui 2 și 5.

B. Definiție. Spunem că numărul real a este mai mare decât numărul real b dacă există numărul real $c > 0$, astfel încât $a = b + c$. Scriem $a > b$. Scriem echivalent $b < a$. Avem $a \geq b \Leftrightarrow$ există $c \geq 0$, astfel încât $a = b + c$.

Proprietățile relației de ordine:

a) reflexivitatea: $a \geq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

b) antisimetria: $a \geq b$, $b \geq a \Rightarrow a = b$;

c) tranzitivitatea: $a \geq b$, $b \geq c \Rightarrow a \geq c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Relația de ordine este compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire, adică:

a) $a \geq b$, $c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d$, $\forall c \in \mathbb{R}$;

b) $a \geq b$, $c > 0 \Rightarrow ac \geq bc$; $a \geq b$, $c < 0 \Rightarrow ac \leq bc$;

c) $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$.

Relația „ \leq ” este relația de ordine compatibilă cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

Relațiile „ $>$ ” și „ $<$ ” nu sunt relații de ordine (sunt doar tranzitive).

Definiții. Partea întregă a unui număr real x (notată cu $[x]$) este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu x : $[x] = n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n \leq x < n + 1$.

Exemple: $[2, 43] = 2$; $[-2, 43] = -3$.

Partea fracționară a numărului real x este $\{x\} = x - [x]$.

Proprietățile ale părții întregi a unui număr real:

- a) $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;
- c) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- d) $[x + m] = [x] + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$;
- e) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Proprietățile ale părții fracționare a unui număr real:

- a) $0 \leq \{x\} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$;
- c) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}$;
- d) $\{x + m\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Definiții. 1. Fie numărul real pozitiv $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Aproximările sale cu n zecimale sunt numere raționale, astfel:

- prin lipsă: $a'_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$;
- prin adaos: $a''_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$.

Avem $a'_n \leq a < a''_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie numărul real negativ $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Aproximările sale cu n zecimale sunt numere raționale, astfel:

- prin lipsă: $a'_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n - 10^{-n}$;
- prin adaos: $a''_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$.

Avem $a'_n < a \leq a''_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Definiție. Modulul numărului real a (sau valoarea absolută a lui a) este:

$$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \\ a, & a > 0 \end{cases} .$$

$$\text{Avem } |a| = \begin{cases} -a, & a \leq 0 \\ a, & a > 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases} .$$

Proprietățile modului numerelor reale:

- a) $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R};$
- b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$
- c) $|-a| = |a|, \forall a \in \mathbb{R};$
- d) $|ab| = |a| \cdot |b|, a, b \in \mathbb{R};$
- e) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*;$
- f) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (cu „=” dacă $a, b \leq 0$ sau $a, b \geq 0$);
- g) $|x| \leq a, \text{ cu } a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a;$
- h) $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R};$
- i) $|x| \geq a, \text{ cu } a > 0 \Leftrightarrow x \geq a \text{ sau } x \leq -a.$

D. Operații cu numere reale

I. Proprietățile adunării numerelor reale:

- a) *asociativitatea:* $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R};$
- b) *comutativitatea:* $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{R};$
- c) *elementul neutru (nul):* $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{R};$
- d) *elementul opus:* pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $(-a) \in \mathbb{R}$ astfel încât:
$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

II. Proprietățile înmulțirii numerelor reale:

- a) *asociativitatea:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{R};$
- b) *comutativitatea:* $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{R};$
- c) *elementul unitate:* există elementul $1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{R};$
- d) *elementul invers:* pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, există $\frac{1}{a}$ (sau a^{-1}) $\in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

Definim **diferența** dintre a și $b \in \mathbb{R}$ astfel: $a - b = a + (-b).$

Definim **împărțirea** lui $a \in \mathbb{R}$ la $b \in \mathbb{R}^*$ astfel: $a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$

Avem următoarele **proprietăți:**

- a) *distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere:* $a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac;$
- b) *regula semnelor:* $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab); (-a) \cdot (-b) = ab.$

III. Puterile cu exponent întreg sunt definite astfel: dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1, \quad 0^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a^1 = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Proprietățile ridicării la putere:

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci avem:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a^m \cdot a^n = a^{m+n}; & \text{b) } a^m : a^n = a^{m-n}; & \text{c) } (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \\ \text{d) } a^m \cdot b^m = (ab)^m; & \text{e) } a^m : b^m = (a : b)^m. & \end{array}$$

IV. Definiție. Radicalul (de ordinul 2) (sau rădăcina pătrată) a numărului real $a \geq 0$ este numărul $x > 0$ cu proprietatea $x^2 = a$. Notăm $x = \sqrt{a}$.

Proprietățile rădăcinii pătrate:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{a^2} = |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}; & \text{b) } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad a > 0, b \geq 0; \\ \text{c) } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0; & \text{d) } \sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n, \quad a > 0, n \in \mathbb{Z}; \\ \text{e) } \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \text{ pentru } a \geq 0, b > 0; & \\ \text{f) } \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \text{ pentru } a^2 \geq b \geq 0, a \geq 0 \text{ (formula radi-} & \\ \text{calilor dubli (compuși)).} & \end{array}$$

E. Valoarea maximă și valoarea minimă a numerelor a și b :

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a \leq b \end{cases} = \frac{a+b+|a-b|}{2}; \quad \min(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b \leq a \end{cases} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Media aritmetică a numerelor reale a_1, a_2, \dots, a_n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Media aritmetică ponderată a numerelor a_1, a_2, \dots, a_n cu ponderile $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ este $m_p = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$.

Mediile armonică, geometrică (proporțională), pătratică ale numerelor $a > 0$, $b > 0$ sunt: $m_{arm} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$; $m_g = \sqrt{ab}$; $m_p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Teoremă (inegalitatea mediilor). Pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $a \leq b$, avem:

$$a \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq b;$$

$\min(a, b) \leq m_{arm} \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq b$ (cu „=” pentru $a = b$).

Probleme propuse

A.

*

1. Dați câte trei exemple de fracții echivalente cu:

a) $\frac{2}{3}$;

b) $\frac{-3}{5}$.

2. Determinați numerele întregi n pentru care:

a) $\frac{13}{2n-1} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{-11}{3n-1} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{6}{3n-2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$; d) $\frac{11}{3n-1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. Scrieți numărul 8 ca:

a) suma a trei numere întregi;

b) produsul a trei numere naturale;

c) produsul a patru numere din $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$;

d) produsul a două numere din $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4. Demonstrați că există două cifre a pentru care:

a) $\sqrt{5n+a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{5n+1a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Transformați în fracții zecimale numerele raționale:

a) $\frac{4}{125}$;

b) $\frac{6}{72}$;

c) $\frac{-25}{8}$;

d) $\frac{16}{35}$;

e) $\frac{21}{20}$;

f) $1\frac{17}{60}$.

6. Transformați în fracții ordinare numerele:

a) $-2,(3)$;

b) $3,(20)$;

c) $2,(213)$;

d) $2,21(3)$;

e) $-3,32(10)$.

7. Ordonăți crescător numerele:

a) $1,(23)$; $1,23$; $1,2(3)$; $1,23(4)$; $1,23(2)$;

b) $-2,1(4)$; $-2,15$; $-2,145$; $-2,14(3)$; $-2,14(5)$.

8. Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{3}$;

b) $2\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{3} + 2$;

d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$;

e) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$;

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$.

**

9. Demonstrați că o fracție zecimală este finită dacă și numai dacă este de forma

$\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

10. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5n+8}$;

b) $\sqrt{10n+7}$;

c) $\sqrt{4n+2}$;

d) $\sqrt{4n+3}$;

e) $\sqrt{n^2+n}$.

11. Demonstrați că $A \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, unde $A = 0,122333444\dots \underbrace{nn\dots n}_{\text{de } n \text{ ori}} \dots$.

12. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, n și p numere prime. Demonstrați că:

a) $a\sqrt{p} + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$;

b) $a\sqrt{p} + b = c\sqrt{p} + d \Leftrightarrow a = c, b = d$;

c) $a\sqrt{n} + b\sqrt{p} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

13. Demonstrați că:

a) $x \in \mathbb{N}, \sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N}$;

b) $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, \sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N}, \sqrt{y} \in \mathbb{N}$.

14. Determinați mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{119^{n+1} \cdot 85^{n+2}}{49^n \cdot 289^{n+1}} \in \mathbb{N} \right\}$.

15. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$, dacă fracțiile $\frac{n+4}{n+7}$ și $\frac{n+6}{n+10}$ nu sunt echivalente.

b) Există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^3 + y^3 = 3x + 5y + 2021$?

16. Fie fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$. Demonstrați că fracția $\frac{q-p}{p}$ este ire-

ductibilă.

17. Determinați numerele prime p pentru care $p+2$, $p+4$, p^2+2 și p^2+4 sunt numere prime.

18. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_2^2 = a_1 a_3$, $a_3^2 = a_2 a_4$, $a_4^2 = a_3 a_5$, $a_5^2 = a_4 a_1$. Demonstrați că $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$.

19. Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $a^3 + b^3 = 2ab$. Demonstrați că $1 - ab$ este pătratul unui număr rațional.

20. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $A_n \in \mathbb{Q}$, unde:

$$A_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \dots + \frac{n+\sqrt{2n+1}}{n+1-\sqrt{2n+1}} + \frac{n-\sqrt{2n+1}}{n+1+\sqrt{2n+1}}.$$

21. Determinați numerele prime a, b, c, d astfel încât $2a + 3b + 4c + 24d = 282$.

22. Fie $x, y \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că $23 \mid 2x + 3y \Leftrightarrow 23 \mid 9x + 2y$.

23. Determinați $A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n^2+2}{n+2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

24. Demonstrați că fracția F_1 este ireductibilă, iar F_2 este reductibilă, unde:

$$F_1 = \frac{2n^2 + 3n + 1}{5n^2 + 6n + 2}, \quad F_2 = \frac{5n^2 + 5n + 4}{3n^4 + 3n^2 + 6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

25. a) Demonstrați că fracția $F = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2000 + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2001 + 1}$ este ireductibilă.

b) Generalizare.

B.

*

26. Scrieți aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos mai mici decât 10^0 , 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} pentru numerele $a = 2, (7)$, $b = -3, (6)$, $c = \sqrt{2}$, $d = -\sqrt{2}$, $e = \sqrt{5}$, $f = -\sqrt{5}$.

27. Comparați numerele:

a) $\sqrt{n+5}$ și $\sqrt{2n+1}$; b) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$; c) $1+\sqrt{n+3}$ și $2+\sqrt{n+1}$.

28. Comparați numerele:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ și $\sqrt{3}+\sqrt{4}$; b) $\sqrt{13}-\sqrt{7}$ și $\sqrt{11}-\sqrt{5}$.

29. Demonstrați că:

a) $\frac{1}{2} < \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} < 1$; b) $\frac{1}{10} < \frac{1}{90} + \frac{1}{91} + \dots + \frac{1}{99} < \frac{1}{9}$;

c) $\frac{2}{5} < \frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{10}{7 \cdot 17} + \frac{15}{17 \cdot 32} + \frac{18}{32 \cdot 50} < \frac{3}{5}$.

30. Demonstrați că numărul $\sqrt{n^2+n+1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**

31. Demonstrați că numărul $\sqrt{n^2+3n+3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$.

32. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Z}$, știind că: I. $abc < 0$; II. $|a| = b + 2 \geq 3b$; III. $a + b + c = 2$.

33. Ordonați numerele a, b, c , știind că $a^2 + b^2 + c^2 + 34,5 = 5a + 11b - c$.

34. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c = 1$. Determinați $\min(a^2 + b^2 + c^2)$.

35. Fie a, b, c cifre nenule distincte și $x = \frac{a}{10} + \frac{b}{100}, y = \frac{b}{10} + \frac{c}{100}, z = \frac{c}{10} + \frac{a}{100}$ și $A = x + y + z$. Determinați:

a) $\min A$ și $\max A$;

b) cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $nA \in \mathbb{N}^*$ și $a + b + c = 12$.

36. Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x + 14y + 46 = 0$, atunci $x > y$.

37. Fie $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Demonstrați că $a^n + b^n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

38. Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}, [x] = [y]$, atunci $|x - y| < 1$.

39. Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

40. Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem:

a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$; b) $[x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = [3x]$ (identitatea lui Hermite).

41. Calculați partea întreagă a numerelor:

a) $\sqrt{n^2+2n}$; b) $\sqrt{n^2+4n}$; c) $\sqrt{4n^2+n}$; d) $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2$.

42. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\left[\frac{x-3}{3} \right] = \frac{x+1}{4}$; b) $\left[\frac{2x+1}{3} \right] = \frac{2x-1}{2}$; c) $\left[\frac{3x-1}{2} \right] = \frac{3x+1}{2}$;