Mihaela Berindeanu
Gyuszi Szép

ALGEBRĂ

clasa a VIII-a

-excelență-

Biblioteca Olimpiadelor
de
Matematică

47

Editura GIL
Zalău
2020

Cuprins

Capitolul 1

Probleme recapitulative din clasa a VII-a

1. *Determinați numărul real* $p = \sqrt{n}$, *unde* $n \in \mathbb{N}$ *și* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < 3 < \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$.

Concursul „Traian Lalescu", 1985

2. *Să se precizeze dacă numărul* $\dfrac{\sqrt{994+\sqrt{1987}}-\sqrt{994-\sqrt{1987}}}{\sqrt{2}}$ *este rațional sau irațional și să se motiveze răspunsul.*

V. Matache, Concursul „Traian Lalescu", 1987

3. *Determinatți cel mai mic număr natural* n *pentru care, oricum am colora în roșu* n *dintre vârfurile unui cub, există un vârf al cubului care are cele trei vârfuri alăturate roșii.*

Primul test de selecție pentru OBMJ, 2015

4. *Determinați* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât numerele* $n+8$, $2n+1$, $4n+1$ *să fie simultan cuburi perfecte.*

Etapa națională, 2015

5. *Se consideră numerele reale* x, y, z, *cu* x, y, $z > 1$ *și care verifică relațiile:* $x+y = xy-5$, $y+z = yz-7$, $z+x = zx-11$. *Care este valoarea expresiei* $x+y+z$?

Concursul „Upper School", 2019

6. *Determinați numerele întregi* a, b, c, d *care verifică relațiile* $a^2+b^2=2(c+d)$ *și* $c^2+d^2=2(a+b)$.

Gh. Iurea, Concursul „Al. Myller", 2003

7. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \geq 2$, *astfel încât* $a_1+a_2+\cdots+a_n=S$ *și* $\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+\cdots+\frac{1}{S-a_n}=\frac{n+1}{S}$, *demonstrați că* $\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n}$ *este pătrat perfect.*

Molea Gheorghe, Concursul „Argeșgim", 2007

8. *Calculați suma* $S_n=\left[\frac{a}{3}\right]+\left[\frac{a^2}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{a^n}{3}\right]$, *unde* a *este un număr natural nedivizibil cu* 3, *iar* $n \in \mathbb{N}^*$.

Călin Burdușel, Concursul „Cezar Ivănescu", 2008

9. *Fie numerele naturale* p *și* q, *prime între ele, astfel încât*

$$A=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\cdots+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}-\frac{2}{54}=\frac{p}{q}.$$

Să se arate că $73 \mid p$ *și* $32 \mid q$.

Vasile Popa, Concursul „Cristian S. Calude", 2010

10. *Demonstrați că pentru orice două numere reale* a, b *au loc inegalitățile:*

$$a^2-2ab+b^2 \geq |\,a|a|+b|b|-|b|a-|a|b\,| \geq 0.$$

Concursul „Traian Lalescu", 1989

11. **a)** *Demonstrați că, dacă* $x, y \geq 1$, *atunci* $x+y-\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{xy}-\frac{2}{\sqrt{xy}}$.

b) *Demonstrați că, dacă* $a, b, c, d \geq 1$ *și* $abcd=16$, *atunci*

$$a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \geq 6.$$

Etapa națională, 2019

12. *Determinați numerele naturale* n *pentru care numărul* $\sqrt{\frac{20^n-18^n}{19}}$ *este număr rațional.*

Etapa națională, 2018

13. *Să se determine cifrele nenule a, b, c astfel încât să aibă loc egalitatea:*

$$\sqrt{a} + \sqrt{\overline{ab}} + \sqrt{\overline{abc}} + \sqrt{a+b+c} = \overline{cc} - \overline{bb} - \overline{aa}.$$

Traian Tămâian, Concursul „Grigore Moisil", 2009

14. *Se consideră două numere naturale consecutive care în baza $2b$, unde $b \in \mathbb{N}^*$, se termină cu aceeași cifră. Să se arate că produsul lor este egal cu pătratul mediei lor aritmetice micșorat cu b^2.*

Dumitru Acu, Concursul „Grigore Moisil", 2013

15. *Arătați că pentru orice numere reale a și b are loc relația:*

$$(a^2+1)(b^2+1) + 50 \geq 2(2a+1)(3b+1).$$

Etapa județeană, 2014

16. *Pe o circumferință se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există cel puțin două perechi formate din numere vecine astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală cu 8.*

Etapa națională, 2005

17. *Fie a și b numere reale strict pozitive, distincte. Considerăm mulțimea:*

$$M = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,\ y > 0,\ x + y = 1\}.$$

Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{2ab}{a+b} \in M$;

b) $\sqrt{ab} \in M$.

Romeo Ilie, Etapa națională, 2001

18. *Determinați numerele naturale r cu proprietatea că există numerele naturale prime p și q astfel încât $p^2 + pq + q^2 = r^2$.*

Etapa națională, 2011

19. *Determinați cel mai mic număr natural n cu proprietatea că, pentru orice colorare cu două culori a elementelor mulțimii $\{2, 3, \ldots, n\}$, ecuația $x + y = z$ are soluție monocoloră cu $x \neq y$.*

(Spunem că ecuația $x + y = z$ are soluție monocoloră dacă există a, b, c distincte, de aceeași culoare, astfel ca $a + b = c$.)

Vasile Pop, Al doilea test de selecție pentru OBMJ, 2017

20. *Pătratele unitate ale unei table $n \times n$, $n \geq 2$, se colorează fie cu negru fie cu alb, astfel încât fiecare pătrat negru să aibă cel puțin 3 vecini albi (un vecin al unui pătrat unitate este un pătrat unitate cu care acesta are o latură comună). Care este numărul maxim de pătrate unitate negre de pe tablă?*

Andrei Eckstein, Primul test de selecție pentru OBMJ, 2016

Soluțiile problemelor propuse

1. Soluție. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < 3 \iff \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2 < 3$, de unde se obține că $\frac{n}{4} < 3$, adică $n < 12$.

$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 > 3 \iff \left(\frac{\sqrt{n}+1}{2}\right)^2 > 3$, de unde se obține că $\frac{\sqrt{n}+1}{2} > \sqrt{3}$, iar de aici deducem că $\sqrt{n} > 2\sqrt{3} - 1 > 2$. Așadar, $n > 4$.

Cum $n \in \mathbb{N}$ și $4 < n < 12$, obținem că $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Verificând în inegalități, obținem că $n \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$.

2. Soluție. Avem $\sqrt{994 + \sqrt{1987}} = \sqrt{\frac{1988}{2} + \sqrt{1987}} = \sqrt{\frac{1988 + 2\sqrt{1987}}{2}} =$
$\frac{\sqrt{1087 + 2\sqrt{1987} + 1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{1987}+1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1987}+1}{\sqrt{2}}$.

Analog, $\sqrt{994 - \sqrt{1987}} = \frac{\sqrt{1987} - 1}{\sqrt{2}}$.

Prin urmare, $\frac{\sqrt{994 + \sqrt{1987}} - \sqrt{994 - \sqrt{1987}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1987} + 1 - \sqrt{1987} + 1}{2}$
$= 1 \in \mathbb{Q}$.

3. Soluție. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Colorând în roșu cele 4 vârfuri ale unei fețe a cubului (de exemplu, vârfurile A, B, C, D), nu există niciun vârf care să aibă trei vârfuri alăturate roșii. Deducem de aici că $n \geq 5$.

Pentru $n = 5$, oricum am colora n vârfuri cu roșu, unul dintre planele $(ABCD)$ și $(A'B'C'D')$ va avea cel puțin trei vârfuri roșii. Putem presupune că A, B, C sunt roșii. Dacă și vârful D este roșu, atunci avem un singur vârf roșu în planul $(A'B'C'D')$. Dacă X' este vârful roșu, cu $X \in \{A, B, C, D\}$, atunci X are toți vecinii roșii.

Dacă vârful D nu este roșu, atunci în planul $(A'B'C'D')$ avem două vârfuri roșii. Dacă B' sau D' este roșu, atunci B, respectiv D, are toți vecinii roșii. În caz contrar, A' și C' sunt vârfuri roșii, ceea ce ar însemna că vârful B' are toți vecinii roșii.

În concluzie, oricum am colora 5 dintre vârfuri cu roșu, va exista cel puțin un vârf care are toți vecinii roșii, deci minimul căutat este $n = 5$.

4. Soluție. Cum numerele $n + 8$, $2n + 1$, $4n + 1$ trebuie să fie simultan cuburi perfecte, deducem că și numărul $(n + 8)(2n + 1)(4n + 1) = 8n^3 + 70n^2 + 49n + 8$ trebuie să fie cub perfect.

Avem că $(2n+2)^3 = 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 \leq 8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 < 8n^3 + 72n^2 + 216n + 8 = (2n + 6)^2$, pentru orice număr natural n.

Numărul $n + 8$ nu este cub perfect pentru $n \in \{1, 2, \ldots, 18\}$.

Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 2)^3$, adică $46n^2 + 25n = 0$, ceea ce înseamnă că $n(46n + 25) = 0$. Obținem soluția $n = 0$.

Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 3)^3$, adică $n(34n - 25) = 19$, care nu are soluție pentru $n \geq 19$.

Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 4)^3$, adică $n(22n - 47) = 56$, care nu are soluție pentru $n \geq 19$.

Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 5)^3$, adică $n(10n - 101) = 87$, care nu are soluție pentru $n \geq 19$.

Prin urmare, singura soluție a problemei este $n = 0$.

5. Soluție. Avem $x + y = xy - 5 \iff xy - x - y + 1 = 6 \iff (x - 1)(y - 1) = 6$, $y + z = yz - 7 \iff yz - y - z + 1 = 8 \iff (y - 1)(z - 1) = 8$ și $z + x = zx - 11 \iff zx - z - x + 1 = 12 \iff (z - 1)(x - 1) = 12$. Înmulțind cele trei relații, obținem că $[(x - 1)(y - 1)(z - 1)]^2 = 24^2$. Cum $x, y, z > 1$, deducem că $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 24$.

Din $(x - 1)(y - 1) = 6$ și $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 24$ rezultă că $z - 1 = 4$, adică $z = 5$.

Din $(y - 1)(z - 1) = 8$ și $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 24$ rezultă că $x - 1 = 3$, adică $x = 4$.

Din $(z - 1)(x - 1) = 12$ și $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 24$ rezultă că $y - 1 = 2$, adică $y = 3$.

Prin urmare, $x + y + z = 12$.

6. Soluție. Adunând relațiile $a^2 + b^2 = 2(c + d)$ și $c^2 + d^2 = 2(a + b)$, obținem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2a + 2b + 2c + 2d$, adică $a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 + d^2 - 2d + 1 - 4 = 0$, ceea ce conduce la relația $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 + (d - 1)^2 = 4$.

Pentru $b = c = d = 1$ și $a - 1 = \pm 2$ (și permutări circulare ale acestora), nu sunt îndeplinite relațiile din enunț.

Pentru $a-1 = \pm 1$, $b-1 = \pm 1$, $c-1 = \pm 1$, $d-1 = \pm 1$, obținem soluțiile $(0, 0, 0, 0)$, $(2, 0, 2, 0)$, $(0, 2, 0, 2)$, $(2, 0, 0, 2)$, $(0, 2, 2, 0)$ și $(2, 2, 2, 2)$.

7. Soluție. $\dfrac{1}{S-a_1} + \dfrac{1}{S-a_2} + \cdots + \dfrac{1}{S-a_n} = \dfrac{n+1}{S} \iff \dfrac{S}{S-a_1} + \dfrac{S}{S-a_2} + \cdots + \dfrac{S}{S-a_n} = n+1 \iff \dfrac{S}{S-a_1} - 1 + \dfrac{S}{S-a_2} - 1 + \cdots + \dfrac{S}{S-a_n} - 1 = 1 \iff \dfrac{a_1}{S-a_1} + \dfrac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{S-a_n} = 1$, care este pătrat perfect.

8. Soluție. Pentru $a = 1$, avem $S_n = 0$. Mai departe presupunem că $a \neq 1$.

Să notăm cu $s_n = \left\{\dfrac{a}{3}\right\} + \left\{\dfrac{a^2}{3}\right\} + \cdots + \left\{\dfrac{a^n}{3}\right\}$.

Cazul 1. Dacă $a = 3k+1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = M_3 + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $\left\{\dfrac{a^n}{3}\right\} = \left\{M_3 + \dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{1}{3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Obținem $s_n = \dfrac{n}{3}$ și $S_n = \dfrac{a}{3} + \dfrac{a^2}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{3} - s_n = \dfrac{a^{n+1}-a}{3(a-1)} - \dfrac{n}{3}$.

Cazul 2. Dacă $a = 3k+2$, unde $k \in \mathbb{N}$, atunci

$$a^n = \begin{cases} M_3 + 1, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ M_3 + 2, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$

Avem că $s_{2n} = \left\{\dfrac{a}{3}\right\} + \left\{\dfrac{a^2}{3}\right\} + \cdots + \left\{\dfrac{a^{2n}}{3}\right\} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = n$ și $S_{2n} = \dfrac{a}{3} + \dfrac{a^2}{3} + \cdots + \dfrac{a^{2n}}{3} - s_{2n} = \dfrac{a^{2n+1}-a}{3(a-1)} - n$.

Avem că $s_{2n+1} = \left\{\dfrac{a}{3}\right\} + \left\{\dfrac{a^2}{3}\right\} + \cdots + \left\{\dfrac{a^{2n+1}}{3}\right\} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = n + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3n+2}{3}$ și $S_{2n+1} = \dfrac{a}{3} + \dfrac{a^2}{3} + \cdots + \dfrac{a^{2n+1}}{3} - s_{2n+1} = \dfrac{a^{2n+2}-a}{3(a-1)} - \dfrac{3n+2}{3}$.

9. Soluție. Avem $A = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{54} - 3\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \cdots + \dfrac{1}{54}\right) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{54} - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{18}\right) = \dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{20} + \cdots + \dfrac{1}{54} = \left(\dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{54}\right) + \left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{53}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{37}\right) = \dfrac{73}{19 \cdot 54} + \dfrac{73}{20 \cdot 53} + \cdots + \dfrac{73}{36 \cdot 37} = \dfrac{73 \cdot a}{q}$, unde $a \in \mathbb{N}^*$ și $q \in \mathbb{N}^*$ este numitorul comun al fracțiilor. Cum 73 este număr prim și $(73, q) = 1$, deducem că $73 \mid p$.

Pe de altă parte, constatăm că în numărul dat în enunț figurează și fracția $\dfrac{1}{32}$. Pentru aducerea la același numitor a fracțiilor din numărul A, toate se vor amplifica cu un număr par, cu excepția fracției $\dfrac{1}{32}$ care se va amplifica cu un număr impar. Atunci vom obține la numărător un număr impar, iar la numitor un număr divizibil cu 32, adică $32 \mid q$.

10. Soluție. Cum $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deducem că $|a|a| + b|b| - |b|a - |a|b| \geq 0$.

Pe de altă parte, $a|a| + b|b| - |b|a - |a|b = |a|(a-b) - |b|(a-b) = (a-b)(\,|a| - |b|\,)$. Trebuie să arătăm că $a^2 - 2ab + b^2 \geq |(a-b)(\,|a| - |b|\,)|$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $|a| - |b| = a - b$, iar de aici rezultă că $(a-b)(\,|a| - |b|\,) = (a-b)^2$.

Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $|a| - |b| = -a + b$, iar de aici rezultă că $(a-b)(\,|a| - |b|\,) = -(a-b)^2$.

Așadar, dacă numerele a și b au același semn, atunci $|(a-b)(\,|a| - |b|\,)| = (a-b)^2$, iar de aici deducem că $a^2 - 2ab + b^2 \geq |(a-b)(\,|a| - |b|\,)|$.

Dacă $a > 0$ și $b < 0$, atunci $(a-b)(\,|a| - |b|\,) = (a-b)(a+b)$. De aici se obține că $|(a-b)(\,|a| - |b|\,)| = |a-b| \cdot |a+b| \leq |a-b|^2$.

Dacă $a < 0$ și $b > 0$, atunci $(a-b)(\,|a| - |b|\,) = (a-b)(-a-b)$. De aici se obține că $|(a-b)(\,|a| - |b|\,)| = |a-b| \cdot |-a-b| \leq |a-b| \cdot |-a+b| = |a-b|^2$.

Dacă numerele a și b au semne diferite, atunci am obținut că $a^2 - 2ab + b^2 \geq |(a-b)(\,|a| - |b|\,)|$.

În cazul în care $a = 0$ sau $b = 0$, atunci inegalitatea din enunț are loc cu egalitate, deoarece $x^2 = |\,x|x|\,|, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

În concluzie, $a^2 - 2ab + b^2 \geq |\,a|a| + b|b| - |b|a - |a|b\,| \geq 0$, pentru orice numere reale a și b.

11. Soluție. a) $x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}} \iff x + y - 2\sqrt{xy} \geq \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{y} \iff (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 \iff (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{xy} \iff (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2(xy - 1) \geq 0$, inegalitate adevărată, pentru orice numere reale $x, y \geq 1$.

b) Conform subpunctului anterior, $a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{ab} - \frac{2}{\sqrt{ab}}$ și $c + d - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\sqrt{cd} - \frac{2}{\sqrt{cd}}$, pentru orice numere reale $a, b, c, d \geq 1$. Adunând aceste inegalități, obținem că $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{cd}}\right)$.

Avem $x = \sqrt{ab} \geq 1$ și $y = \sqrt{cd} \geq 1$ și putem să aplicăm inegalitatea de la subpunctul precedent:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{cd}} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} - \frac{2}{\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}}.$$

Cum $\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$, obținem că:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{cd}} \geq 2\cdot 2 - \frac{2}{2} = 3.$$

Atunci $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\cdot 3 = 6$, pentru orice numere reale a, b, c, $d \geq 1$.

12. Soluție. Observăm că $n = 0$ este soluție a problemei.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, trebuie ca numărul $\frac{20^n - 18^n}{19}$ să fie pătrat perfect, ceea ce ne conduce la faptul că $20^n - 18^n = 19x^2$, unde $x \in \mathbb{N}^*$. Deducem de aici că $n = 2m$, unde $m \in \mathbb{N}^*$.

$2^{2m}(10^{2m} - 9^{2m}) = 19x^2$, $x \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x = 2^m y$, cu y număr natural impar.

Avem $10^{2m} - 9^{2m} = 19y^2 \iff (10^m - 9^m)(10^m + 9^m) = 19y^2$, $(10^m - 9^m, 10^m + 9^m) = 1$.

Cazul 1. Există numerele naturale impare a și b, $(a, b) = 1$, $a\cdot b = y$, cu $10^m + 9^m = 19a^2$ și $10^m - 9^m = b^2$. Atunci $10^m = 9^m + b^2 = M4 + 1 + M4 + 1 = M4 + 2$. Obținem $m = 1$, $b = 1$, $a = 1$, $y = 1$, $x = 2$, $n = 2$.

Cazul 2. Există numerele naturale impare a și b, $(a, b) = 1$, $a\cdot b = y$, cu $10^m + 9^m = a^2$ și $10^m - 9^m = 19b^2$. Atunci $10^m = 9^m + 19b^2 = M8 + 1 + 19(M8 + 1) = M8 + 4$. Obținem $m = 2$, $b = 1$, $a^2 = 181$, contradicție.

În concluzie, $n = 0$, $n = 2$.

13. Soluție. Conform relației din enunț, numerele a, $\overline{ab}$, $\overline{abc}$ trebuie să fie pătrate perfecte. Atunci $a \in \{1, 4, 9\}$ și $b, c \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$.

Dacă $a = 1$, atunci $b = 6$. Cum $\overline{16c}$ trebuie să fie pătrat perfect, deducem că $c = 9$. Pentru aceste valori, relația din enunț este verificată.

Dacă $a = 4$, atunci $b = 9$. Cum nu există pătrat perfect de forma $\overline{49c}$, în acest caz nu avem soluții.

Dacă $a = 9$, numerele de forma $\overline{9b}$ nu sunt pătrate perfecte și nici în acest caz nu avem soluții.

Prin urmare, $a = 1$, $b = 6$ și $c = 9$.

14. Soluție. Fie $x = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}_{2b}$ un număr scris în baza $2b$. Atunci $x + b = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}_{2b} + b = 2b\cdot\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1}_{2b} + a_0 + b$. Analog, $x - b = 2b\cdot\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1}_{2b} + a_0 - b$.

Dacă $a_0 \geq b$, atunci $a_0 - b$ este cifră în baza $2b$, iar $x + b = 2b\cdot\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1}_{2b} + 2b + a_0 - b$ are ultima cifră $a_0 - b$. În acest caz, numerele $x + b$ și $x - b$ sunt consecutive și au aceeași ultimă cifră, și anume $a_0 - b$.

Dacă $a_0 < b$, atunci $a_0 + b < 2b$ și este cifră în baza $2b$, iar

$$x - b = 2b \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots (a_1 - 1)}_{2b} + 2b + a_0 - b = 2b \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots (a_1 - 1)}_{2b} + a_0 + b.$$

În acest caz, numerele $x + b$ și $x - b$ sunt consecutive și au aceeași ultimă cifră, și anume $a_0 + b$.

Media aritmetică a numerelor $x + b$ și $x - b$ este egală cu x, iar produsul lor este egal cu $x^2 - b^2$. De aici deducem că produsul numerelor $x + b$ și $x - b$ este egal cu pătratul mediei lor aritmetice micșorat cu b^2.

15. Soluție. Relația din enunț este echivalentă cu $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 + 50 \geq 12ab + 4a + 6b + 2$, adică $a^2b^2 - 12ab + 36 + a^2 - 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 \geq 0$, ceea ce este echivalent cu $(ab - 6)^2 + (a - 2)^2 + (b - 3)^2 \geq 0$, care este o relație adevărată pentru orice numere reale a și b.

16. Soluție. Suma celor 2005 perechi de numere este $2 \cdot 7022 = 14044$. Să presupunem prin absurd că există cel mult o pereche de numere a căror sumă este mai mare sau egală cu 8. Atunci cel puțin 2004 perechi au suma elementelor cel mult egală cu 7, deci în total $7 \cdot 2004 = 14028$. Deducem de aici că există o pereche cu suma mai mare sau egală cu $14044 - 14028 = 16$. Atunci unul dintre numerele din pereche este cel puțin egal cu 8. Acesta va forma cu numerele vecine două perechi cu suma cel puțin egală cu 8, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Prin urmare, există două perechi formate din numere vecine astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală cu 8.

17. Soluție. a) $\dfrac{2ab}{a+b} = ax + by$. Cum $x + y = 1$, deducem că $y = 1 - x$ și avem $\dfrac{2ab}{a+b} = ax + b(1 - x)$. De aici rezultă că $x = \dfrac{b}{a+b}$, $0 < x < 1$ și $y = \dfrac{a}{a+b}$, $0 < y < 1$.

Așadar, luând $x = \dfrac{b}{a+b} > 0$ și $y = \dfrac{a}{a+b} > 0$, avem $x + y = 1$ și $ax + by = \dfrac{2ab}{a+b} \in M$.

b) $\sqrt{ab} = ax + by \implies \sqrt{ab} = ax + b(1 - x)$, de unde obținem că $x = \dfrac{\sqrt{ab} - b}{a - b}$, adică $x = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $0 < x < 1$, iar $y = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $0 < y < 1$.

Așadar, luând $x = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0$ și $y = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0$, avem $x + y = 1$ și $ax + by = \sqrt{ab} \in M$.

18. Soluție. Relația din enunț se mai poate scrie sub forma $(p + q)^2 - r^2 = pq$, adică $(p + q + r)(p + q - r) = pq$.

Cum divizorii numărului pq sunt 1, p, q și pq, iar $p + q > \max(p, q)$, deducem că $p+q-r = 1$ și $p+q+r = pq$. Adunând aceste două relații, obținem că $2p+2q = pq$, ceea ce este echivalent cu $(p - 2)(q - 2) = 3$. De aici obținem că $p = 3$, $q = 5$, $r = 7$, respectiv $p = 5$, $q = 3$, $r = 7$.

19. Soluție. Vom arăta că $n = 13$.

Pentru $n = 12$ există o colorare a numerelor din mulțimea $\{2, 3, \ldots, 12\}$ cu două culori astfel încât ecuația $x + y = z$ să nu aibă soluție monocoloră: colorăm cu prima culoare elementele mulțimii $A = \{2, 3, 4, 11, 12\}$ și cu cea de-a doua culoare elementele mulțimii $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Pentru $n < 12$, colorăm cu prima culoare elementele mulțimii $\{2, 3, \ldots, n\} \cap A$ și cu cea de-a doua culoare elementele mulțimii $\{2, 3, \ldots, n\} \cap B$. În acest caz, ecuația $x + y = z$ nu are soluție monocoloră.

Arătăm acum că, pentru $n = 13$, orice colorare a elementelor mulțimii $\{2, 3, \ldots, 13\}$ cu două culori, ecuația $x + y = z$ are soluție monocoloră. Să presupunem că ar exista o astfel de colorare.

Cazul 1. Dacă numerele $2, 3, 4$ au culoarea 1, atunci numerele $5 = 2+3$, $6 = 2+4$, $7 = 3 + 4$ trebuie să aibă culoarea 2, de unde deducem că numerele $11 = 5 + 6$, $12 = 5 + 7$, $13 = 6 + 7$ trebuie să aibă culoarea 1. Dar atunci $2 + 11 = 13$, ceea ce înseamnă că ecuația are soluție monocoloră.

Cazul 2. Dacă 2 și 3 au culoarea 1, iar 4 are culoarea 2, atunci $5 = 2+3$ are culoarea 2 și $9 = 4 + 5$ are culoarea 1. Cum $3 + 6 = 9$, iar numerele 3 și 9 au culoarea 1, trebuie ca 6 să aibă culoarea 2. Cum $2 + 7 = 9$, iar numerele 2 și 9 au culoarea 1, rezultă că 7 are culoarea 2. Dacă 11 are culoarea 1, atunci $2 + 9 = 11$ este soluție monocoloră. Dacă 11 are culoarea 2, atunci $5 + 6 = 11$ este soluție monocoloră.

Cazul 3. Dacă numerele 2 și 4 au culoarea 1, iar 3 are culoarea 2, atunci 6 are culoarea 2, iar 9 are culoarea 1. Cum 4 și 9 au culoarea 1, trebuie ca 5 să aibă culoarea 2. Analog, 2 și 9 au culoarea 1, ceea ce înseamnă că 7 are culoarea 2, iar $8 = 3 + 5$ are culoarea 1. Cum $12 = 4 + 8 = 5 + 7$, orice culoare ar avea 12, avem soluție monocoloră.

Cazul 4. A rămas cazul în care 2 are culoarea 1, iar 3 și 4 culoarea 2. Astfel, 7 are culoarea 1. Cum 2 și 7 au culoarea 1, atunci 5 trebuie să aibă culoarea 2. Apoi $9 = 2 + 7 = 4 + 5$ și, indiferent de culoarea lui 9, ecuația are soluție monocoloră.

În concluzie, cel mai mic număr natural cu proprietatea cerută este $n = 13$.

20. Soluție. Observăm că pătratele unitate din colțuri, neavând 3 vecini, trebuie să fie albe. Celelalte pătrate de pe marginea tablei au doar 3 vecini, deci nu putem avea două pătrate negre vecine pe margine. Apoi, în orice pătrat 2×2, putem avea cel mult două pătrate negre (în caz contrar, un pătrat negru ar avea deja doi vecini negri, deci cel mult doi albi).