



**PROGRAMAREA  
MATEMATICĂ  
FOLOSIND  
MS EXCEL SOLVER,  
MANAGEMENT  
SCIENTIST,  
MATHLAB**

Editura Albastră



Coordonator serie  
 Smaranda Derveșteanu

Tehnoredactare computerizată  
 Codruța Poenaru

Coperta  
 Liviu Derveșteanu

Tiraj  
 500 exemplare

Tipărit  
 EDITURA ALBASTRĂ  
 comanda 123 / 99

## CUPRINS

<b>INTRODUCERE .....</b>	<b>7</b>
<b>1. MODELE DE PROBLEME DE PROGRAMARE MATEMATICĂ .....</b>	<b>9</b>
1.1. Conceptul de model matematic .....	9
1.2. Modele liniare .....	11
1.2.1. Modelul general al unei probleme de programare liniară.....	11
1.2.2. Modelul standard al unei probleme de programare liniară.....	13
1.2.3. Modelul canonic al unei probleme de programare liniară.....	14
1.3. Modele discrete .....	15
1.4. Modele bivalente.....	16
1.5. Modele convexe.....	16
1.6. Modele pătratice.....	17
1.7. Modele de transport .....	19
1.7.1. Modelul standard de transport.....	20
1.7.2. Modelul de transport cu centre intermediare.....	22
1.7.3. Modele tridimensionale de transport.....	23
1.7.4. Modele de transport cu funcția obiectiv fracționară.....	25
1.8. Modele speciale de probleme de programare neliniară.....	27
1.8.1. Modelul problemei de minimizare a sumei modulelor funcțiilor liniare .....	27
1.8.2. Modele de probleme de programare segmentar-liniară.....	28
1.8.3. Modele de probleme de programare monotonă.....	29
1.8.4. Modele de probleme de programare geometrică.....	30
<b>2. PROBLEME ECONOMICO-SOCIALE ȘI TEHNICE CARE SE MODELEAZĂ CA PROBLEME DE PROGRAMARE MATEMATICĂ .....</b>	<b>32</b>
2.1. Problema organizării optime a unui sector productiv.....	32
2.2. O problemă de alegere a unui ansamblu optim de tehnologii.....	33
2.3. Patru variante de probleme de investiții .....	34
2.3.1. Varianta 1.....	34
2.3.2. Varianta 2.....	35
2.3.3. Varianta 3.....	35
2.3.4. Varianta 4.....	36

2.4.	Problemă de repartiție .....	36
2.5.	O problemă de transport .....	38
2.6.	O problemă de producție și stocaj .....	38
2.7.	O problemă de amestec .....	39
2.8.	Utilizarea optimă a capacității utilajelor .....	40
2.9.	Problemă de ordonanțare .....	41
2.10.	O problemă de zonare în agricultură .....	42
2.11.	Probleme de croire .....	43
2.11.1.	Reducerea pierderilor la tăierea materialelor .....	43
2.11.2.	O problemă de debitare multiplă .....	44
2.12.	O problemă de teoria jocurilor .....	45
2.13.	O problemă de zonare în agricultură modelată cu ajutorul conceptului de joc .....	48
2.14.	Problema rucsacului .....	49
2.14.1.	Varianta discretă .....	49
2.14.2.	Varianta continuă .....	50
2.15.	Problema determinării numărului de stabilitate internă al unui graf .....	50
2.16.	O problemă de regresie liniară .....	51
<b>3.</b>	<b>COMPONENTA SOLVER DIN MS-EXCEL.....</b>	<b>53</b>
3.1.	Lansarea în execuție a modului Solver .....	53
3.1.1.	Aplicațiile incluse în MS-Excel ( <i>Add-In programs</i> ) .....	53
3.1.2.	Instalarea Solver .....	54
3.2.	Metode utilizate de Solver .....	55
3.3.	Precizări pentru folosirea paginilor de tip <i>worksheet</i> și <i>workbook</i> .....	55
3.4.	Definirea și rezolvarea unei probleme cu Solver .....	56
3.4.1.	Exemplu .....	56
3.4.2.	Ghid de folosire Solver pentru un model dat .....	57
3.4.3.	Continuarea exemplului .....	57
3.4.4.	Fereastra de dialog Solver Parameters .....	58
3.4.5.	Condiții pentru celula funcției obiectiv .....	60
3.4.6.	Adăugarea unei restricții în Solver .....	60
3.4.7.	Modificarea unei restricții în Solver .....	61
3.4.8.	Ștergerea unei restricții în Solver .....	62
3.4.9.	Generarea soluției pornind de la o valoare inițială .....	62
3.4.10.	Continuarea exemplului .....	62
3.5.	Rezultatele returnate de Solver .....	63
3.5.1.	Fereastra de dialog Solver Results .....	63
3.5.2.	Crearea unui raport folosind Solver .....	64
3.5.3.	Salvarea unei probleme .....	65

3.5.4.	Continuarea exemplului .....	65
3.5.5.	Salvarea într-un <i>scenariu</i> a valorilor calculate de Solver .....	67
3.5.6.	Salvarea unei probleme rezolvate cu Solver ca <i>model</i> .....	68
3.5.7.	Încărcarea unui <i>model</i> folosind Solver .....	68
3.6.	Vizualizarea soluțiilor intermediare .....	68
3.7.	Opțiuni de lucru cu Solver .....	69
3.7.1.	Fereastra de dialog Solver Options .....	69
3.7.2.	Continuarea exemplului .....	72
3.7.3.	Schimbarea numărului maxim de iterații și a timpului maxim de calcul direct din MS Excel .....	72
3.7.4.	Modificarea modului în care Solver calculează formulele .....	73
3.7.5.	Revenirea la setările implicite ale Solver .....	74
3.8.	Generarea soluției fără succes .....	74
3.8.1.	Motive pentru care Solver încheie generarea soluției .....	74
3.8.2.	Mesajele returnate de Solver .....	75
3.9.	Exemple de utilizare pentru Solver .....	77

<b>4.</b>	<b>APLICAȚIA THE MANAGEMENT SCIENTIST .....</b>	<b>78</b>
4.1.	Lansarea în execuție a aplicației .....	78
4.2.	Componentele pachetului THE MANAGEMENT SCIENTIST .....	79
4.3.	Etapele de lucru cu aplicația THE MANAGEMENT SCIENTIST .....	81
4.3.1.	Alegerea tipului de problemă din meniul principal .....	82
4.3.2.	Meniul Problem Selection Menu .....	83
4.3.3.	Definirea unei probleme noi .....	85
4.3.4.	Meniul Problem Disposition Menu .....	87
4.3.5.	Meniul Problem Solution Menu .....	90
4.4.	Informații utile în folosirea aplicației MS .....	91
4.5.	Precizări suplimentare pentru lucrul cu probleme de programare liniară .....	91
4.6.	Rezolvarea problemelor de programare liniară - cazul discret .....	92
4.7.	Rezolvarea problemelor de transport .....	98

<b>5.</b>	<b>APLICAȚIA MATLAB .....</b>	<b>103</b>
5.1.	Introducere în lucrul cu MatLab .....	103
5.1.1.	Setarea afișării datelor .....	103
5.1.2.	Variabile și constante speciale în MatLab .....	103
5.1.3.	Obiecte MatLab .....	104

5.1.4.	Comenzile și caracterul „;” .....	104
5.1.5.	Funcții utilizator .....	104
5.1.6.	Observații finale .....	105
5.2.	Optimizare cu MatLab .....	105
5.2.1.	Minimizarea cu restricții .....	106
5.2.2.	Minimizarea fără restricții .....	112
5.2.3.	Minimizarea funcțiilor liniare cu restricții date matricial .....	112
5.2.4.	Minimizarea funcțiilor pătratice cu restricții date matricial .....	114
<b>6.</b>	<b>PROBLEME REZOLVATE .....</b>	<b>116</b>
6.1.	Probleme de programare liniară .....	118
6.1.1.	Problema 1 .....	119
6.1.2.	Problema 2 .....	122
6.1.3.	Problema 3 .....	125
6.1.4.	Problema 4 .....	128
6.1.5.	Soluțiile date de The Management Scientist .....	132
6.2.	Probleme de programare liniară discretă .....	136
6.2.1.	Problema 5 .....	136
6.2.2.	Problema 6 .....	137
6.2.3.	Soluțiile date de The Management Scientist .....	138
6.3.	Probleme de programare bivalentă .....	139
6.3.1.	Problema 7 .....	139
6.4.	Probleme de programare convexă .....	141
6.4.1.	Problema 8 .....	141
6.4.2.	Problema 9 .....	143
6.4.3.	Problema 10 .....	146
6.4.4.	Problema 11 .....	148
6.5.	Probleme de programare pătratică .....	151
6.5.1.	Problema 12 .....	151
6.5.2.	Problema 13 .....	154
6.5.3.	Problema 14 .....	156
6.5.4.	Problema 15 .....	159
6.6.	Probleme de transport .....	162
6.6.1.	Problema 16 .....	162
6.7.	Alte tipuri de probleme .....	168
6.7.1.	Problema 17 .....	168
6.7.2.	Problema 18 .....	172
6.7.3.	Problema 19 .....	174
6.7.4.	Problema 20 .....	177
<b>BIBLIOGRAFIE .....</b>	<b>180</b>	

## INTRODUCERE

Extinderea aplicațiilor informaticii în științele economice, sociale, tehnice etc., ridică o problemă esențială și anume aceea de a răspunde la întrebarea: *în ce măsură aceste aplicații pot fi utile pentru abordarea diferitelor etape ale conducerii, planificării și analizei proceselor economice, sociale, tehnice, sau de altă natură?*

Creșterea continuă a complexității vieții economico-sociale impune necesitatea de a recurge la modelele matematice și la sistemele de calcul, atât pentru fundamentarea deciziilor umane cât și pentru prognozarea consecințelor pe care acestea le pot avea asupra oamenilor.

Concepând **modelul matematic** ca un triplet

$$\{ \begin{array}{l} \text{variabile (parametri) de intrare,} \\ \text{relații funcționale (de legătură),} \\ \text{variabile (parametri) de ieșire} \end{array} \}$$

în *primul capitol* prezentăm câteva dintre cele mai reprezentative modele de optimizare liniară și neliniară cu multiple posibilități de aplicare în optimizarea comportării sistemelor economice, sociale, tehnice, etc.. Sunt prezentate modele liniare, modele discrete, modele pătratice și modele cu funcție obiectiv fracționară.

În *capitolul al doilea* prezentăm douăzeci și una de probleme economice, sociale și tehnice care se modelează ca probleme de programare matematică liniară, pătratică sau fracționară. Scopul acestui capitol este acela de a motiva tratarea modelelor matematice din capitolul precedent și de a evidenția vastul domeniu de aplicabilitate a acestora.

Demersul întreprins are ca obiectiv central evidențierea modalităților de utilizare a produselor **Solver**, **The Management Scientist (MS)** și **MatLab** în rezolvarea unor probleme de programare matematică.

În *capitolul al treilea* este prezentată componenta **Solver** din **MS-EXCEL** cu referiri speciale la:

- principalele *ferestre de dialog*;
- condițiile pentru *celula funcției obiectiv*;
- algoritmi și metode utilizate de **Solver**;

- modificarea și ștergerea unor restricții în Solver;
- ghid de folosire Solver pentru un model dat;
- salvarea unei probleme rezolvate cu Solver;
- crearea unui raport folosind Solver;
- definirea și rezolvarea unei probleme cu Solver.

Capitolul al patrulea tratează produsul **The Management Scientist** (prescurtat **MS**). Sunt dezvoltate aspecte privind etapele de lucru cu **MS**, meniurile **Top level menu**, **Problem selection menu**, **Problem disposition menu** și **Problem solution menu**, precum și modul de rezolvare a problemelor de programare liniară și de programare discretă utilizând **MS**.

În capitolul al cincilea este prezentat produsul **MatLab** și se insistă asupra posibilităților și limitelor produsului **MatLab**, rezolvării problemelor de programare liniară cu **MatLab** și rezolvării problemelor de programare pătratică utilizând **MatLab**.

Ultimul capitol al lucrării, al șaselea, este consacrat unor semnificative rezultate numerice. Sunt rezolvate douăzeci de probleme de programare matematică, de diverse tipuri, cu ajutorul celor trei produse: **Solver**, **The Management Scientist** și **MatLab**. Este de menționat rezolvarea comparativă a problemelor selectate cu produsele menționate.

# 1. MODELE DE PROBLEME DE PROGRAMARE MATEMATICĂ

Activitatea modernă în domeniul producției industriale și conducerii activității economico-sociale a devenit atât de complexă, încât rezolvările tradiționale nu mai sunt de mult suficiente. O mare parte dintre problemele care se pun în conducerea activității economico-sociale sunt probleme de optimizare.

Modelarea matematică a acestor probleme oferă posibilitatea determinării soluțiilor optime (din anumite puncte de vedere), cu consecințe imediate asupra creșterii eficienței economice a sectorului respectiv.

Programarea matematică prezintă un deosebit interes, atât din punct de vedere teoretic, cât mai ales din punct de vedere practic. Din acest al doilea punct de vedere, se impune a menționa faptul că probleme dintre cele mai dificile și din cele mai variate domenii sunt rezolvabile cu ajutorul programării matematice.

Problema de programare matematică este o problemă de maximizare sau minimizare a unei funcții (sau a mai multor funcții) de mai multe variabile, numită (numite) funcție (funcții) obiectiv, sau funcție (funcții) scop, sau funcție (funcții) de eficiență, ale cărei (căror) variabile satisfac un sistem de restricții exprimat prin egalități sau inegalități.

Modelul unei probleme de programare matematică este următorul:

$$\begin{aligned} \max(\min)(z_h = f_h(x_1, x_2, \dots, x_n)), h = 1, \dots, r \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \rho_i, 0, i = 1, \dots, m \\ \rho_i \in \{\leq, =, \geq\}, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

În cazul  $r > 1$  modelul (1) este multidimensional (multiobiectiv). În prezentul volum vom trata numai cazul  $r = 1$ .

## 1.1. Conceptul de model matematic

**Cercetarea operațională** – ca știință a adoptării deciziilor eficiente – nu poate fi definită fără a face apel la conceptele de *operație*, *strategie*, *model*.

Definim operația ca fiind un ansamblu de acțiuni îndreptate spre realizarea unui anumit scop. Scopul unei operații este, în general, constituit dintr-un ansamblu de obiective.

Mulțimea factorilor (eventual persoanelor) care acționează într-o operație pentru îndeplinirea scopului propus se numește parte operativă, iar resursele pe care le are la dispoziție partea operativă, pentru a-și realiza scopul,

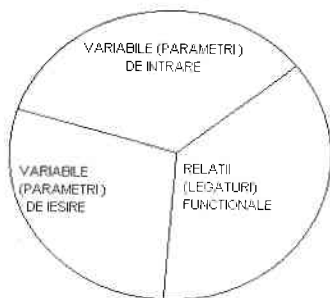
Modul de acțiune a părții operative, adică modul de utilizare a mijloacelor active, se numește strategie sau politică.

În studiul oricărei operații se deosebesc patru etape fundamentale:

1. analiza operației, căutarea și descrierea mijloacelor de acțiune care ar putea duce la atingerea scopului operației;
2. modelarea matematică a operației care să dea o descriere matematică a scopului;
3. estimarea și compararea eficacității diverselor strategii pe baza modelului construit;
4. studierea strategiilor optime și a metodelor matematice pentru obținerea acestor strategii.

Modelarea matematică a operațiilor și în general a proceselor realității înconjurătoare, este însoțită aproape întotdeauna de existența a două tendințe contrare: pe de o parte se caută ca modelul să reflecte cât mai exact procesul real, iar pe de altă parte, se dorește obținerea unui model cât mai simplu, care să permită rezolvarea completă a problemei. Rezolvarea acestei contradicții este echivalentă cu găsirea echilibrului dintre „supraaglomerare” și „suprasimplificare”.

Prin model matematic înțelegem tripletul realizat în figura următoare.



Variabilele (parametrii) de intrare reprezintă variabilele (parametrii) ale căror valori sunt cunoscute (sunt date sau estimate), variabilele (parametrii) de ieșire reprezintă variabilele (parametrii) ce rezultă din prelucrare, iar relațiile funcționale exprimă legăturile (dependențele, relațiile) dintre variabilele de intrare și variabilele de ieșire, care pot fi ecuații (inecuații) algebrice, ecuații diferențiale, ecuații integrale etc.

Procesul modelării cuprinde următoarele etape:

- cunoașterea detaliată a realității sistemului (procesului) care se modelează;

- construirea propriu-zisă a modelului matematic;
- experimentarea modelului matematic și evaluarea soluției;
- implementarea modelului matematic și implementarea soluției.

Construirea propriu-zisă a modelului constă în una din următoarele două situații:

- alegerea unuia dintre modelele clasice care corespunde problemei formulate, caz în care trebuie să se stabilească corespondența dintre realitate și ansamblul de modele cunoscute în literatura de specialitate;
- elaborarea unui nou model, acesta putând fi:
  - combinație de modele clasice;
  - model nou propriu-zis.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm câteva dintre cele mai reprezentative modele de optimizare cu restricții (decii de programare matematică), cu multiple posibilități de aplicabilitate în optimizarea sistemelor și proceselor economice, tehnice, sociale, etc.

## 1.2. Modele liniare

Modelul (1) în cazul în care funcțiile  $f_h (h = 1, \dots, r)$  și  $g_i (i = 1, \dots, m)$  sunt liniare, se numește *liniar*.

### 1.2.1. Modelul general al unei probleme de programare liniară

Modelul general al unei probleme de programare liniară este:

$$\begin{aligned} \min(\max) \quad & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ & A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 \geq b_1 \\ & A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 = b_2 \\ & A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 \leq b_3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 - \text{oarecare}, x_3 \leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

unde  $A_{11} \in M(p, k)$ ,  $A_{12}(p, l - k)$ ,  $A_{13}(p, n - l)$ ;

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pk} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1,k+1} & \dots & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p,k+1} & \dots & a_{pl} \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} a_{1,l+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p,l+1} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix};$$

$$A_{21} \in M(q-p, k), A_{22} \in M(q-p, l-k), A_{23} \in M(q-p, n-l),$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qk} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{p+1,k+1} & \dots & a_{p+1,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q,k+1} & \dots & a_{ql} \end{bmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} a_{p+1,l+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q,l+1} & \dots & a_{qn} \end{bmatrix};$$

$$A_{31} \in M(m-q, k), A_{32} \in M(m-q, l-k), A_{33} \in M(m-q, n-l),$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} a_{q+1,1} & \dots & a_{q+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} a_{q+1,k+1} & \dots & a_{q+1,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,k+1} & \dots & a_{ml} \end{bmatrix},$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} a_{q+1,l+1} & \dots & a_{q+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,l+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

$$b_1 \in M(p, 1), b_2 \in M(q-p, 1), b_3 \in M(m-q, 1);$$

$$c_1 \in M(k, 1), c_2 \in M(l-k, 1), c_3 \in M(n-l, 1).$$

Modelul (1) poate fi scris detaliat astfel:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1l}x_l + a_{1,l+1}x_{l+1} + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{p1}x_1 + \dots + a_{pk}x_k + a_{p,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{pl}x_l + a_{p,l+1}x_{l+1} + \dots + a_{pn}x_n \geq b_p$$

$$a_{p+1,1}x_1 + \dots + a_{p+1,k}x_k + a_{p+1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{p+1,l}x_l + a_{p+1,l+1}x_{l+1} + \dots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1}$$

$$a_{q1}x_1 + \dots + a_{qk}x_k + a_{q,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{ql}x_l + a_{q,l+1}x_{l+1} + \dots + a_{qn}x_n = b_q$$

$$a_{q+1,1}x_1 + \dots + a_{q+1,k}x_k + a_{q+1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{q+1,l}x_l + a_{q+1,l+1}x_{l+1} + \dots + a_{q+1,n}x_n \leq b_{q+1}$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k + a_{m,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{ml}x_l + a_{m,l+1}x_{l+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_k \geq 0$$

$$x_{k+1}, \dots, x_l - \text{oarecare}$$

$$x_{l+1}, \dots, x_n \leq 0$$

$$\max(\min)(z = c_1x_1 + \dots + c_kx_k + c_{k+1}x_{k+1} + \dots + c_lx_l + c_{l+1}x_{l+1} + \dots + c_nx_n).$$

Modelul dual al modelului (2) este modelul (3):

$$A_{11}'u_1 + A_{21}'u_2 + A_{31}'u_3 \leq c_1 [\geq c_1]$$

$$A_{12}'u_1 + A_{22}'u_2 + A_{32}'u_3 = c_2$$

$$A_{13}'u_1 + A_{23}'u_2 + A_{33}'u_3 \geq c_3 [\leq c_3] \tag{3}$$

$$u_1 \geq 0 [\leq 0]$$

$$u_2 - \text{oarecare}$$

$$u_3 \leq 0 [\geq 0]$$

$$\max(\min)(w = b_1'u_1 + b_2'u_2 + b_3'u_3).$$

### 1.2.2. Modelul standard al unei probleme de programare liniară

În modelul standard toate restricțiile sunt egalități, funcția obiectiv se minimizează sau se maximizează, iar variabilele sunt supuse condițiilor de nenegativitate.

$$\begin{aligned} & \min[\max](z = c'x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$A \in M(m, n), c \in M(n, 1), b \in M(m, 1),$

Modelul dual al modelului (4) este:

$$\begin{aligned} & \max[\min](w = b'u) \\ & A'u \leq c \quad [ \geq c ] \\ & u - \text{oarecare.} \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.2.3. Modelul canonic al unei probleme de programare liniară

Modelele (6) și (7) în care funcția obiectiv se minimizează, respectiv se maximizează, restricțiile sunt toate inegalități de același tip (' $\geq$ ' respectiv ' $\leq$ '), iar variabilele sunt supuse condițiilor de nenegativitate sunt modele canonice.

$$\begin{aligned} & \min(z = c'x) \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \\ & A \in M(m, n), c \in M(n, 1), b \in M(m, 1) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \max(z = c'x) \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & A \in M(m, n), c \in M(n, 1), b \in M(m, 1). \end{aligned} \quad (7)$$

(9). Modelele duale modelelor (6) respectiv (7) sunt modelele (8) respectiv

$$\begin{aligned} & \max(w = b'u) \\ & A'u \leq c \\ & u \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \min(w = b'u) \\ & A'u \geq c \\ & u \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

### Observație:

Modelele general, standard și canonic ale unei probleme de programare liniară sunt echivalente, abstracție făcând de următorul set de transformări elementare:

$$i. \max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X} \{-f(x)\}, \quad \forall X \subseteq R^n, \quad \forall f: X \rightarrow R$$

(în particular pentru  $f(x) = c'x = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ , unde  $c, x \in X \subseteq R^n$ );

$$ii. \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i;$$

$$iii. \forall x \in R \Rightarrow x = x_1 - x_2, \quad x_1, x_2 \geq 0;$$

$$iv. x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0;$$

$$v. \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases};$$

$$vi. \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad y_i \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i = b_i, \quad y_i \geq 0.$$

### 1.3. Modele discrete

Un model de problemă de programare matematică în cazul în care unei submulțimi a mulțimii variabilelor i se impune restricția de integritate devine model discret care are forma (10).

$$\begin{aligned} & \max(\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_i \in S \subseteq Z, \quad k \in N_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ & Z - \text{multimea numerelor întregi.} \end{aligned} \quad (10)$$



Dacă  $N_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  atunci modelul (10) devine model pentru o problemă de programare (totală) în numere întregi. Dacă incluziunea  $N_1 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  este strictă, modelul (10) devine model mixt. În considerațiile noastre toate modelele discrete vor fi liniare.

### 1.4. Modele bivalente

În cazul  $S = \{0, 1\}$  și  $N_1 = \{1, 2, \dots, n\}$  modelul (10) devine model bivalent (binar). Acesta are forma (11):

$$\begin{aligned} & \max(\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ & x_k \in \{0, 1\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{11}$$

### 1.5. Modele convexe

Modelul unei probleme de programare convexă este:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & a(x) \leq 0 \\ & x \in X, X - \text{convexă} \\ & f: X \rightarrow R, f - \text{convexă} \\ & a: X \rightarrow R^m, a = (a_1, a_2, \dots, a_m)', a_i - \text{convexe} (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \tag{12}$$

Un model particular de problemă de programare convexă este acela în care:

$$X = \{x \in R^n / x \geq 0\}. \tag{13}$$

Condițiile Kuhn-Tucker, deși aparent constituie rezultate de factură pur teoretică, în sensul că nu oferă o metodă practică de determinare a programului optim, acestea constituie baza majorității algoritmilor pentru rezolvarea problemelor de programare convexă.

În acest context menționăm celebra teoremă Kuhn-Tucker, în ipoteza de diferențiabilitate a funcțiilor convexe  $f$  și  $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ :

Condiția necesară și suficientă pentru ca  $\hat{x} \in R^n$  să fie o soluție a problemei (12)-(13) este să existe  $\hat{u} \in R^m$  astfel ca:

$$a(\hat{x}) \leq 0 \tag{14}$$

$$\hat{x} \geq 0$$

$$\hat{u} \geq 0 \tag{15}$$

$$\nabla f(\hat{x}) + \nabla a(\hat{x})' \hat{u} \geq 0$$

$$\hat{u}' a(\hat{x}) = 0 \tag{16}$$

$$\hat{x}' [\nabla f(\hat{x}) + \nabla a(\hat{x})' \hat{u}] = 0.$$

Dacă în modelul (12) avem  $X = R^n$  atunci concluzia din teorema Kuhn-Tucker devine:

$$a(\hat{x}) \leq 0 \tag{14'}$$

$$\hat{x} \in R^n$$

$$\hat{u} \geq 0 \tag{15'}$$

$$\nabla f(\hat{x}) + \nabla a(\hat{x})' \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}' a(\hat{x}) = 0. \tag{16'}$$

### 1.6. Modele pătratice

Modelul problemei de programare pătratică în care restricțiile sunt inegalități liniare este prezentat în (17):

$$\begin{aligned} & \min \{ f(x) = p'x + 1/2 x' Cx \} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$A \in M(m, n), b \in M(m, 1), p \in M(n, 1)$$

$$C \in M(n, n), C - \text{simetrică}.$$

Funcția  $f$  este convexă (strict convexă) dacă și numai dacă matricea  $C$  este pozitiv semidefinită (pozitiv definită). Așadar, în cazul în care matricea  $C$  este pozitiv semidefinită, rezultatele din programarea convexă se

particularizează imediat pentru modelul (17).

Modelul dual al modelului (17), care rezultă din teorema Kuhn-Tucker [5], este (18), în care se maximizează lagrangeianul asociat problemei (17) cu restricțiile date de condițiile Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} \max \{ & \Phi(x, u) = p'x + 1/2x'Cx + u'(b - Ax) \} \\ & Ax \geq b, u \geq 0 \\ & Cx - A'u \geq -p, x \geq 0 \\ & u'(b - Ax) = 0 \\ & x'(Cx - A'u + p) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Teorema Kuhn-Tucker pentru modelul (17) se exprimă astfel:

Dacă C este pozitiv semidefinită atunci condiția necesară și suficientă pentru ca  $\hat{x} \in R^n$  să fie un program optim (soluție) pentru problema (17) este ca să existe  $\hat{u} \in R^m$ ,  $\hat{v} \in R^n$ ,  $\hat{y} \in R^m$  astfel ca:

$$\begin{aligned} A\hat{x} - \hat{y} &= b \\ C\hat{x} - A'\hat{u} - \hat{v} &= -p \\ \hat{x} \geq 0, \hat{u} \geq 0, \hat{v} \geq 0, \hat{y} &\geq 0 \\ \hat{x}'\hat{v} = 0, \hat{u}'\hat{y} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Pentru modelul pătratic (20) în care restricțiile sunt exprimate prin egalități liniare:

$$\begin{aligned} \min \{ & f(x) = p'x + 1/2x'Cx \} \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

modelul dual este (21):

$$\begin{aligned} \max \{ & \Phi(x, u) = p'x + 1/2x'Cx + u'(b - Ax) \} \\ & Ax = b \\ & Cx - A'u \geq -p, x \geq 0 \\ & x'(Cx - A'u + p) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Condițiile Kuhn-Tucker, necesare și suficiente pentru optimalitatea unui vector  $\hat{x} \in R^n$  pentru problema (20) sunt:

$$\begin{aligned} A\hat{x} &= b \\ C\hat{x} - \hat{v} + A'\hat{u} &= -p \\ \hat{x} \geq 0, \hat{v} &\geq 0 \\ \hat{v}'\hat{x} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

În cazul unei probleme de minimizare a unei funcții pătratice strict convexe cu restricții inegalități liniare (pentru care este posibilă rezolvarea cu ajutorul unei metode specific combinatorie reprezentată de algoritmul lui Theil și Van de Panne), modelul este următorul:

$$\begin{aligned} \min \{ & f(x) = p'x + 1/2x'Cx \} \\ & Ax \leq b \\ & A \in M(m, n), b \in M(m, 1) \\ & C \in M(n, n), C - \text{pozitiv definită}. \end{aligned} \quad (23)$$

Dacă restricțiile sunt egalități liniare modelul este:

$$\begin{aligned} \min \{ & f(x) = p'x + 1/2x'Cx \} \\ & Ax = b \\ & A \in M(m, n), b \in M(m, 1) \\ & C \in M(n, n), C - \text{pozitiv definită}. \end{aligned} \quad (24)$$

caz în care condițiile Kuhn-Tucker de optimalitate sunt:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Cx + A'u &= -p \end{aligned} \quad (25)$$

iar modelul dual este:

$$\begin{aligned} \max \{ & b'u - 1/2x'Cx \} \\ & Ax = b \\ & Cx + A'u = -p. \end{aligned} \quad (26)$$

## 1.7. Modele de transport

Problemele de transport s-au impus datorită multiplelor posibilități de aplicabilitate pe care le oferă în diverse sectoare ale activității economice. Menționăm numai câteva dintre acestea: