Ion Pătraşcu   Nicolae Ivăşchescu

GEOMETRIE

Clasa a 7-a

după noua programă de gimnaziu

- **TIPURI DE PROBLEME**
  - repere teoretice
  - probleme rezolvate
  - probleme propuse – rezolvări complete
- **PERFORMANȚĂ**
  - olimpiade și concursuri școlare

EDITURA CARMINIS
educațional

CUPRINS

Cuvânt-înainte 3
Capitolul 1. PATRULATERE 5
Tema 1. Patrulaterul convex 5
Noțiuni teoretice 5
Probleme rezolvate 7
Probleme propuse (I) 11
Probleme propuse (II) 12
Tema 2. Paralelogramul 14
Noțiuni teoretice 14
Probleme rezolvate 20
Probleme propuse (I) 25
Probleme propuse (II) 26
Tema 3. Paralelograme particulare: dreptunghiul, rombul, pătratul 29
Noțiuni teoretice 29
Probleme rezolvate 33
Probleme propuse (I) 36
Probleme propuse (II) 38
Tema 4. Trapezul 42
Noțiuni teoretice 42
Probleme rezolvate 47
Probleme propuse (I) 52
Probleme propuse (II) 53
Tema 5. Perimetre și arii 56
Noțiuni teoretice 56
Probleme rezolvate 59
Probleme propuse (I) 63
Probleme propuse (II) 65

Capitolul 2. CERCUL 68
Tema 6. Unghiul înscris în cerc 68
Noțiuni teoretice 68
Probleme rezolvate 71
Probleme propuse (I) 78

Probleme propuse (II) 79
Tema 7. Coarde și arce. Tangenta la cerc 81
Noțiuni teoretice 81
Probleme rezolvate 86
Probleme propuse (I) 92
Probleme propuse (II) 94
Tema 8. Poligoane regulate înscrise într-un cerc 96
Noțiuni teoretice 96
Probleme rezolvate 99
Probleme propuse (I) 104
Probleme propuse (II) 105
Tema 9. Lungimea cercului și aria discului 108
Noțiuni teoretice 108
Probleme rezolvate 110
Probleme propuse (I) 115
Probleme propuse (II) 116

Capitolul 3. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR 118
Tema 10. Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales 118
Noțiuni teoretice 118
Probleme rezolvate 124
Probleme propuse (I) 131
Probleme propuse (II) 132
Tema 11. Teorema fundamentală a asemănării 134
Noțiuni teoretice 134
Probleme rezolvate 135
Probleme propuse (I) 141
Probleme propuse (II) 143
Tema 12. Criterii de asemănare a triunghiurilor 145
Noțiuni teoretice 145
Probleme rezolvate 147
Probleme propuse (I) 153
Probleme propuse (II) 154

Capitolul 4. RELAȚII METRICE 157
Tema 13. Relații metrice în triunghiul dreptunghic 157

Noțiuni teoretice 157
Probleme rezolvate 160
Probleme propuse (I) 166
Probleme propuse (II) 168

Tema 14. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic. Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit 170
Noțiuni teoretice 170
Probleme rezolvate 179
Probleme propuse (I) 186
Probleme propuse (II) 188

CAPITOLUL 5. REZOLVĂRI 190

Capitolul 1. PATRULATERE

TEMA 1 PATRULATERUL CONVEX

1.1. Noțiuni teoretice

Considerăm patru puncte distincte în plan, oricare trei necoliniare. Notăm aceste puncte A, B, C, D și unim prin segmente de dreaptă A cu B, B cu C, C cu D și D cu A. Putem obține figuri geometrice de următoarele trei tipuri.

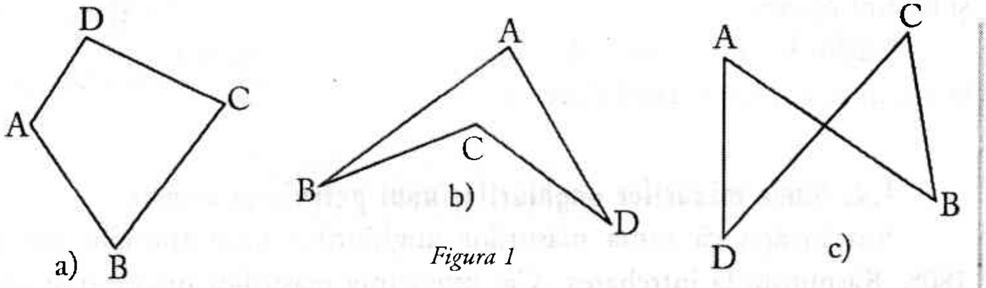

Figura 1

Patrulaterul din figura 1 a) se numește **patrulater convex.** Observăm că segmentele $[AB]$ și $[CD]$ nu au niciun punct comun. De asemenea, segmentele $[BC]$ și $[AD]$ nu au niciun punct comun.

Segmentele $[AB], [BC], [CD]$ și $[DA]$ sunt laturile patrulaterului, iar punctele A, B, C, D sunt vârfurile patrulaterului.

★ **Definiție.** Un patrulater se numește **patrulater convex,** dacă orice dreaptă determinată de o latură a sa nu separă celelalte două vârfuri.

Observăm că patrulaterul din figura 1 b) nu are proprietatea din definiția de mai sus pentru că dreapta BC separă vârfurile A și D (de asemenea, dreapta CD separă vârfurile A și B).

Un astfel de patrulater se numește **patrulater concav.**

Un patrulater convex ABCD are patru unghiuri: $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ și $\widehat{CDA}$. Uneori, vom nota aceste unghiuri cu o singură literă: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$.

Un patrulater convex ABCD are două diagonale și anume segmentele $[AC]$ și $[BD]$.

Laturile AB și CD se numesc **laturi opuse**. De asemenea, BC și AD sunt laturi opuse.

Laturile care au un punct comun se numesc **laturi alăturate**. De exemplu, AB și AD sunt laturi alăturate.

Diagonalele unui patrulater convex sunt drepte concurente. În figura 2 am notat cu O intersecția diagonalelor AC și BD.

În patrulaterul convex ABCD vârfurile A și C se numesc **vârfuri opuse**. La fel vârfurile B și D sunt opuse.

Vârfurile care determină o latură a patrulaterului se numesc **vârfuri alăturate**.

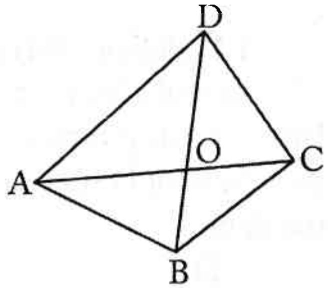

Figura 2

1.2. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Am învățat că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°. Răspunsul la întrebarea „Cât este suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex?“ este dat de:

✪ **Teorema 1.** Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360°.

Ipoteză: ABCD patrulater convex

Concluzie: $m(\widehat{DAB})+m(\widehat{ABC})+m(\widehat{BCD})+m(\widehat{CDA})=360°$

Demonstrație: Trasăm diagonala AC (vezi figura 3).

În ΔABC avem:

$m(\widehat{CAB})+m(\widehat{ABC})+m(\widehat{BCA})=180°.$ (1)

În ΔADC avem:

$m(\widehat{DAC})+m(\widehat{ACD})+m(\widehat{CDA})=180°.$ (2)

Adunând membru cu membru relațiile (1) și (2) și ținând cont că $m(\widehat{DAC})+m(\widehat{CAB})=$ $=m(\widehat{DAB})$ și $m(\widehat{BCA})+m(\widehat{ACD})=m(\widehat{BCD})$ se obține concluzia.

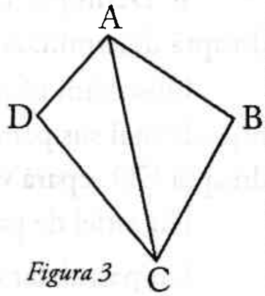

Figura 3

1.3. Probleme rezolvate

1. Demonstrați că dacă măsura unui unghi al unui patrulater convex este egală cu media aritmetică a măsurilor celorlalte unghiuri ale patrulaterului, atunci acel unghi este drept.

Rezolvare

Să presupunem că unghiul $\widehat{A}$ satisface condiția din enunț, deci

$$m\left(\widehat{A}\right)=\frac{m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)+m\left(\widehat{D}\right)}{3}\Leftrightarrow 3m\left(\widehat{A}\right)=m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)+m\left(\widehat{D}\right).\ (1)$$

Dar $m\left(\widehat{A}\right)+m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)+m\left(\widehat{D}\right)=360°$. (2) Înlocuind relația (1) în relația (2) obținem $4m\left(\widehat{A}\right)=360°$, prin urmare $m\left(\widehat{A}\right)=90°$.

2. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 1, 2, 3 și 4.

Rezolvare

Fie $m\left(\widehat{A}\right)$, $m\left(\widehat{B}\right)$, $m\left(\widehat{C}\right)$, $m\left(\widehat{D}\right)$ măsurile unghiurilor patrulaterului convex ABCD. Avem $\frac{m\left(\widehat{A}\right)}{1}=\frac{m\left(\widehat{B}\right)}{2}=\frac{m\left(\widehat{C}\right)}{3}=\frac{m\left(\widehat{D}\right)}{4}$. Aplicând proprietatea șirului de rapoarte egale rezultă că $\frac{m\left(\widehat{A}\right)}{1}=\frac{m\left(\widehat{A}\right)+m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)+m\left(\widehat{D}\right)}{1+2+3+4}=$

$=\frac{360°}{10}$, în consecință, $m\left(\widehat{A}\right)=36°$; $\frac{m\left(\widehat{B}\right)}{2}=36°$, deci $m\left(\widehat{B}\right)=72°$; $\frac{m\left(\widehat{C}\right)}{3}=36°$, rezultă $m\left(\widehat{C}\right)=108°$ și $\frac{m\left(\widehat{D}\right)}{4}=36°$, deci $m\left(\widehat{D}\right)=144°$.

3. Arătați că un patrulater convex are cel puțin un unghi cu măsura mai mare sau egală cu 90°.

Rezolvare

Presupunem prin absurd că niciun unghi al patrulaterului convex ABCD nu are măsura mai mare sau egală cu 90°. Prin urmare, $m\left(\widehat{A}\right)<$

$< 90°$, $m(\hat{B}) < 90°$, $m(\hat{C}) < 90°$, $m(\hat{D}) < 90°$. Atunci $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) < 4 \cdot 90° = 360°$. Am obținut o contradicție cu teorema 1, în consecință presupunerea făcută este falsă.

4. Un patrulater convex este împărțit de o diagonală într-un triunghi echilateral și un triunghi dreptunghic-isoscel. Arătați că patrulaterul are un unghi cu măsura $150°$ sau are două unghiuri a căror sumă a măsurilor este $150°$.

Ion Pătrașcu

Rezolvare

Sunt două posibilități. De exemplu, dacă diagonala BD împarte patrulaterul convex ABCD în triunghiul echilateral ABD și triunghiul dreptunghic-isoscel CBD (vezi figura 4), atunci $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) = 60° + 90° = 150°$.

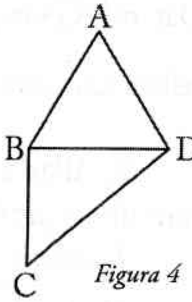

Figura 4

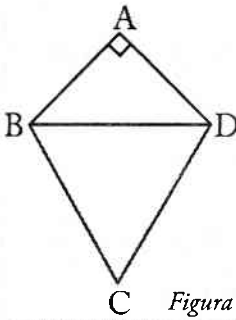

Figura 5

Dacă diagonala BD separă triunghiul ABD dreptunghic-isoscel și triunghiul echilateral CBD (figura 5), atunci $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 90° + 60° = 150°$.

5. Aflați suma măsurilor unghiurilor alăturate într-un patrulater convex, știind că suma măsurilor oricăror două unghiuri alăturate este aceeași.

Rezolvare

În patrulaterul convex ABCD avem, conform enunțului, $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = m(\hat{D}) + m(\hat{A}) = k$. Adunând aceste relații membru cu membru, găsim că $2\left[m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})\right] = 4k$. Dar $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$, deci $2 \cdot 360° = 4k \Rightarrow k = 180°$. Obținem că suma măsurilor oricăror două unghiuri alăturate este $k = 180°$.

6. Arătați că nu există un patrulater convex ABCD cu proprietățile $m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{A})$, $m(\widehat{C}) = 2m(\widehat{B})$ și $m(\widehat{D}) = 2m(\widehat{C})$.

Rezolvare

Presupunem prin absurd că există un patrulater convex cu proprietățile din enunț. Din $m(\widehat{C}) = 2m(\widehat{B})$ și $m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{A})$ rezultă că $m(\widehat{C}) = 4m(\widehat{A})$, iar din $m(\widehat{D}) = 2m(\widehat{C})$ și $m(\widehat{C}) = 4m(\widehat{A})$ rezultă că $m(\widehat{D}) = 8m(\widehat{A})$. Deoarece $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$, avem că $m(\widehat{A}) + 2m(\widehat{A}) + 4m(\widehat{A}) + 8m(\widehat{A}) = 360°$, deci $15m(\widehat{A}) = 360° \Rightarrow m(\widehat{A}) = 24°$. Dar $m(\widehat{D}) = 8m(\widehat{A}) = 8 \cdot 24° = 192° > 180°$. Contradicția obținută arată că nu există patrulatere în condițiile enunțului.

7. Arătați că într-un patrulater convex suma lungimilor diagonalelor este mai mare decât suma lungimilor a două laturi opuse.

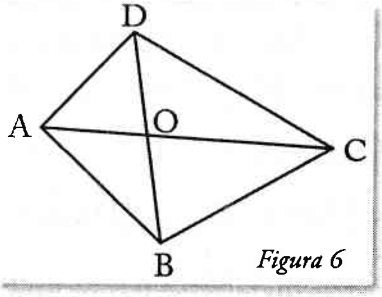

Figura 6

Rezolvare

Fie $\{O\} = AC \cap BD$ (vezi figura 6).

În ΔAOD avem $OA + OD > AD$ (inegalitatea triunghiului). (1)

În ΔCOB inegalitatea triunghiului dă $OB + OC > BC$. (2)

Adunând inegalitățile (1) și (2) membru cu membru rezultă că $AC + BD > AD + BC$.

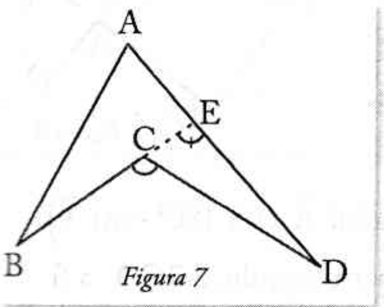

Figura 7

8. În figura 7 patrulaterul ABCD este concav. Arătați că $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{ABC})$.

Rezolvare

Notăm $\{E\} = BC \cap AD$. Unghiul $\widehat{CED}$ este exterior triunghiului ABE, deci

$m(\widehat{CED}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ABC})$. (1) Unghiul $\widehat{BCD}$ este exterior triunghiului CED, prin urmare $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{CED}) + m(\widehat{ADC})$. (2) Din (1) și (2) rezultă că $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC})$.

9. În patrulaterul convex ABCD, mediatoarea laturii AB conține vârful D, iar mediatoarea laturii CD conține vârful B al patrulaterului. Știind că $m(\widehat{ADB}) = 30°$ și $m(\widehat{CBD}) = 40°$, arătați că $[AD] \equiv [BC]$ și aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

Ion Pătrașcu

Rezolvare

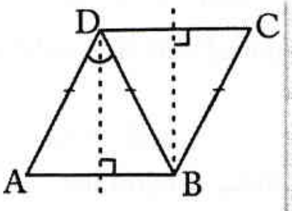

Figura 8

Deoarece mediatoarea laturii (AB) conține punctul D, atunci $[DA] \equiv [DB]$. (1) (vezi figura 8)

Deoarece mediatoarea laturii DC conține pe B avem $[BD] \equiv [BC]$. (2) Din (1) și (2) rezultă că $[AD] \equiv [BC]$. În triunghiul isoscel DAB avem $m(\widehat{ADB}) = 30° \Rightarrow m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBA}) = 75°$. În triunghiul isoscel BDC avem $m(\widehat{DBC}) = 40° \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BCD}) = 70°$. Vom avea $m(\widehat{A}) = 75°$, $m(\widehat{B}) = 115°$, $m(\widehat{C}) = 70°$ și $m(\widehat{D}) = 100°$.

10. În figura 9 unghiurile $\widehat{XAD} = \widehat{YAB}$ sunt unghiuri exterioare unghiului $\widehat{A}$ al patrulaterului convex ABCD. Aflați suma măsurilor tuturor unghiurilor exterioare unghiurilor patrulaterului convex ABCD.

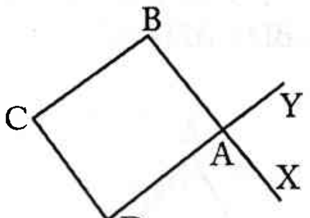

Figura 9

Rezolvare

Măsura unghiului exterior $\widehat{XAD}$ al unghiului $\widehat{A}$ este $180° - m(\widehat{A})$. Suma măsurilor tuturor unghiurilor exterioare patrulaterului ABCD va fi

$$2\cdot\left[180^\circ-m\left(\widehat{A}\right)+180^\circ-m\left(\widehat{B}\right)+180^\circ-m\left(\widehat{C}\right)+180^\circ-m\left(\widehat{D}\right)\right]=$$

$$=2\cdot\left[720^\circ-\left(m\left(\widehat{A}\right)+m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)+m\left(\widehat{D}\right)\right)\right]=2\cdot(720^\circ-360^\circ)=720^\circ.$$

1.4. Probleme propuse (I)

1. În patrulaterul convex ABCD $m\left(\widehat{A}\right)=75^\circ$, $m\left(\widehat{B}\right)=105^\circ$, $m\left(\widehat{C}\right)=45^\circ$. Aflați $m\left(\widehat{D}\right)$.

2. Fie ABCD un patrulater convex în care $m\left(\widehat{A}\right)=m\left(\widehat{C}\right)=55^\circ$, $m\left(\widehat{ABD}\right)=32^\circ$ și $m\left(\widehat{BDC}\right)=45^\circ$. Aflați $m\left(\widehat{B}\right)$ și $m\left(\widehat{D}\right)$.

3. Să se construiască un patrulater convex ABCD știind că ΔABD este echilateral cu $AB=5$ cm și ΔCBD este dreptunghic-isoscel cu cateta $BC=5$ cm. Aflați $m\left(\widehat{CAD}\right)$.

4. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex ABCD, știind că $\dfrac{3m\left(\widehat{A}\right)}{12{,}5}=\dfrac{3m\left(\widehat{B}\right)}{10}=\dfrac{2m\left(\widehat{C}\right)}{5}=\dfrac{4m\left(\widehat{D}\right)}{5}$.

5. Arătați că dacă mediatoarele a trei laturi ale unui patrulater convex sunt concurente, atunci vârfurile patrulaterului sunt situate pe un cerc.

6. Fie ABCD un patrulater convex. Arătați că dacă în acest patrulater bisectoarele unghiurilor opuse $\widehat{A}$ și $\widehat{C}$ sunt paralele, atunci unghiurile opuse $\widehat{B}$ și $\widehat{D}$ sunt congruente.

7. În patrulaterul convex ABCD avem $[AD]\equiv[DC]\equiv[CB]$, $AB\parallel CD$ și $AB=2AD$. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

Capitolul 5. REZOLVĂRI

I. PATRULATERUL

Tema 1. Patrulaterul convex

Probleme propuse (I)

1. $m(\widehat{D}) = 360° - \left[m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})\right] = 360° - 225° = 135°$.

2. $m(\widehat{ADB}) = 180° - (55° + 32°) = 93°$, $m(\widehat{D}) = 93° + 45° = 138°$, $m(\widehat{DBC}) = 180° - (55° + 45°) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 32° + 80° = 112°$.

3. ΔABD = echilateral $\Rightarrow AB = BD = AD = 5$ cm. Cum $BD = 5\,cm = BC \Rightarrow \Delta BCD$ = isoscel. Dar ΔBCD este dreptunghic- isoscel $\Rightarrow m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BCD}) = 45°$ și $m(\widehat{CBD}) = 90°$, $m(\widehat{ABC}) = 60° + 90° = 150° \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$, ($\Delta ABC$ este isoscel deoarece $AB = BC = 5\,cm$) $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{BAC}) = 60° - 15° = 45°$.

4. $$\frac{m(\widehat{A})}{\frac{12,5}{3}} = \frac{m(\widehat{B})}{\frac{10}{3}} = \frac{m(\widehat{C})}{\frac{5}{2}} = \frac{m(\widehat{D})}{\frac{5}{4}} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{\frac{12,5}{3} + \frac{10}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{4}} =$$
$= \frac{360°}{11,25} = 32$. Atunci $m(\widehat{A}) = 133°20'$, $m(\widehat{B}) = 106°40'$, $m(\widehat{C}) = 80°$, $m(\widehat{D}) = 40°$.

5. Dacă mediatoarele laturilor [AB], [BC], [CD] ale patrulaterului convex ABCD sunt concurente în punctul O, atunci $OA = OB$, $OB = OC$, $OC = OD$. Din aceste relații rezultă că $OA = OD$, prin urmare O este centrul cercului care conține punctele A, B, C, D.

6. Notăm cu F şi E intersecţiile bisectoarelor unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{C}$, respectiv cu (BC) şi (AD). Dacă $m\left(\widehat{A}\right)=2x$ şi $m\left(\widehat{C}\right)=2y$, atunci $AF \parallel CE \Rightarrow$ $\Rightarrow m\left(\widehat{DEC}\right)=x$ şi $m\left(\widehat{AFB}\right)=y$. Avem $m(\widehat{B})=m(\widehat{D})=180°-(x+y)$.

7. Construim $CE \parallel AD$, $E \in (AB) \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{ACE}$ (alterne interne). Din $AE \parallel DC \Rightarrow \widehat{DCA} \equiv \widehat{CAE}$ (alterne interne). Dar $AD = DC \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv$ $\equiv \widehat{DCA} \equiv \widehat{ACE} \equiv \widehat{EAC}$. $\Delta DAC \equiv \Delta EAC$ (U.L.U.) $\Rightarrow [DA]=[AE]=[CE]$. $AB = 2AD \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB$, $AD = BC \Rightarrow CE \equiv CB \equiv EB$, deci ΔCEB este echilateral. Obţinem $m\left(\widehat{A}\right)=m\left(\widehat{B}\right)=60°$, $m\left(\widehat{C}\right)=m\left(\widehat{D}\right)=120°$.

8. a) Construim $BE \perp AD$, $E \in (AD)$, notăm $AB = a$. Cum ABD este triunghi echilateral, avem $AB = BD = AD = a$, atunci $DE = \frac{a}{2}$. Presupunem că $CB \not\perp BE$. Construim $FB \perp BE$, unde $F \in [CD]$. Patrulaterul convex BEDF are $\widehat{B} \equiv \widehat{E} \equiv \widehat{D}(=90°) \Rightarrow \widehat{F} = 90°$. Din $BE \parallel FD \Rightarrow \widehat{BEF} \equiv \widehat{DFE}$ (alterne interne). $\Delta BEF \equiv \Delta DFE$ (I.U.) $\Rightarrow BF = DE = \frac{a}{2}$. Dar în ΔBFC dreptunghic avem că $BC = \frac{a}{2} = BF$, absurd. Contradicţia obţinută arată că $C = F$, deci $m\left(\widehat{BCD}\right)=90°$, deci $BC \parallel AD$. b) $d(A, BD)=d(B, AD)=BE$, iar $d(D, BC)=DC$. Din $\Delta DCE \equiv \Delta BED$ (C.C.) $\Rightarrow BE \equiv DC$.

9. Fie $O \in (AB)$, intersecţia mediatoarelor laturilor (AD) şi (BC). $\Delta AOC \equiv \Delta DOB$ (L.U.L.) $\Rightarrow [AC] \equiv [BD]$.

10. ABCD patrulater convex, $m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{D}\right)=180°$ (1) $\Rightarrow m\left(\widehat{A}\right)+$ $+m\left(\widehat{C}\right)=180°$. Notăm $m\left(\widehat{BAC}\right)=x$; din ΔBAC isoscel $\Rightarrow m\left(\widehat{BCA}\right)=x$. Avem din ipoteză $m\left(\widehat{DAC}\right)=2x$ şi ΔDAC isoscel $\Rightarrow m\left(\widehat{ACD}\right)=2x$. Prin urmare, $m\left(\widehat{BAD}\right)=m\left(\widehat{BCD}\right)=3x$. (2) Din (1) şi (2) rezultă că $m\left(\widehat{A}\right)=90°$,

$x=30°$. Obținem că ΔDAC este echilateral. $\Delta ADB \equiv \Delta CDB \Rightarrow m\left(\widehat{ADB}\right)=$ $=m\left(\widehat{CDB}\right)=30°$. În ΔABD dreptunghic, $m\left(\widehat{ADB}\right)=30° \Rightarrow AB=\frac{1}{2}BD \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BD=2\cdot AB$.

Probleme propuse (II)

1. Notăm $m\left(\widehat{ABD}\right)=m\left(\widehat{ACD}\right)=x \Rightarrow m\left(\widehat{COD}\right)=m\left(\widehat{CDO}\right)=$ $=\frac{180°-x}{2}$. Dar $m\left(\widehat{BOA}\right)=m\left(\widehat{COD}\right)$ (opuse la vârf) $\Rightarrow m\left(\widehat{BOA}\right)=\frac{180°-x}{2}$.

În ΔABO găsim că $m\left(\widehat{BAO}\right)=180°-x-\frac{180°-x}{2}=\frac{180°-x}{2}$, deci $\widehat{BAO}\equiv\widehat{BOA} \Rightarrow [AB]\equiv[OB]$.

2. $m\left(\widehat{AMN}\right)=105°$, $m\left(\hat{A}\right)=60°$, $m\left(\hat{B}\right)=90°$, $m\left(\widehat{BNM}\right)=105°$. Se găsește $m\left(\widehat{NMB}\right)=45°$.

3. $m\left(\hat{C}\right)=m\left(\hat{D}\right)=90°$. Din $\frac{m\left(\widehat{BAC}\right)}{4}=\frac{m\left(\hat{B}\right)}{5}=\frac{m\left(\widehat{ACB}\right)}{3}$, cum $m\left(\widehat{BAC}\right)+m\left(\hat{B}\right)+m\left(\widehat{ACB}\right)=180° \Rightarrow m\left(\widehat{BAC}\right)=60°$, $m\left(\hat{B}\right)=75°$ și $m\left(\widehat{ACB}\right)=45°$. Se găsește că $m\left(\hat{A}\right)=105°$.

4. Notăm $m\left(\widehat{BAC}\right)=x$, $m\left(\widehat{DCA}\right)=y$. $AB=BC \Rightarrow m\left(\widehat{BCA}\right)=x$, $AD=DC \Rightarrow m\left(\widehat{DAC}\right)=y$. Atunci $m\left(\hat{B}\right)=180°-2x$, și $m\left(\hat{D}\right)=180°-2y$. Se obține sistemul $\begin{cases} x+y=105° \\ 4x=3y \end{cases}$ cu soluția $x=45°$, $y=60°$. Deoarece $m\left(\hat{B}\right)=180°-2x \Rightarrow m\left(\hat{B}\right)=90°$, deci $AB\perp BC$.

5. Notăm $m\left(\widehat{BAC}\right)=x$, $m\left(\widehat{CAD}\right)=y$. Avem $m\left(\widehat{ADC}\right)=\frac{180°-y}{2}$. (1)

Din $AB=AD$ și $m\left(\widehat{BAD}\right)=x+y \Rightarrow m\left(\widehat{ADB}\right)=\frac{180°-(x+y)}{2}$. (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow m\left(\widehat{BDC}\right)=\frac{180^\circ-y}{2}-\frac{180^\circ-(x+y)}{2}=\frac{x}{2}$.

Deci, $m\left(\widehat{BAC}\right)=2\cdot m\left(\widehat{BDC}\right)$.

6. Presupunem că $m\left(\widehat{A}\right)=80^\circ$, $m\left(\widehat{ABC}\right)=2x$ și $m\left(\widehat{BCD}\right)=2y$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$ și $\widehat{C}$ se intersectează în I și $m\left(\widehat{BIC}\right)=85^\circ$. Din ΔBIC rezultă $x+y=180^\circ-85^\circ=95^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)=95^\circ\cdot 2=190^\circ$. Găsim $m\left(\widehat{D}\right)=90^\circ$. Dacă considerăm $\widehat{C}$ și $\widehat{D}$ unghiuri alăturate, vom găsi că $m\left(\widehat{B}\right)=90^\circ$.

7. $\frac{m\left(\widehat{A}\right)}{15}=\frac{m\left(\widehat{B}\right)}{6}=\frac{m\left(\widehat{C}\right)}{4}=\frac{m\left(\widehat{D}\right)}{11}=\frac{360^\circ}{36}$. Se obține $m\left(\widehat{A}\right)=150^\circ$, $m\left(\widehat{B}\right)=60^\circ$, $m\left(\widehat{C}\right)=40^\circ$ și $m\left(\widehat{D}\right)=110^\circ$, $m\left(\widehat{E}\right)=180^\circ-\left[m\left(\widehat{C}\right)+m\left(\widehat{D}\right)\right]=$ $=30^\circ$, $m\left(\widehat{F}\right)=180^\circ-\left[m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)\right]=80^\circ$.

8. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ și ABCD patrulaterul convex. $\frac{m\left(\widehat{A}\right)}{n-2}=\frac{m\left(\widehat{B}\right)}{n-1}=$
$=\frac{m\left(\widehat{C}\right)}{n}=\frac{m\left(\widehat{D}\right)}{n+1}=\frac{m\left(\widehat{A}\right)+m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{C}\right)+m\left(\widehat{D}\right)}{4n-2}=\frac{180^\circ}{2n-1}$.

Găsim $m\left(\widehat{A}\right)=\frac{180^\circ\cdot(n-2)}{2n-1}$, $m\left(\widehat{B}\right)=\frac{180^\circ\cdot(n-1)}{2n-1}$, $m\left(\widehat{C}\right)=\frac{180^\circ\cdot n}{2n-1}$ și $m\left(\widehat{D}\right)=\frac{180^\circ\cdot(n+1)}{2n-1}$. Dintre aceste măsuri avem că $m\left(\widehat{C}\right)>90^\circ$ și $m\left(\widehat{D}\right)>$ $>90^\circ$, iar $m\left(\widehat{A}\right)<90^\circ$ și $m\left(\widehat{B}\right)<90^\circ$.

9. Din sistemul $\begin{cases}10\cdot m\left(\widehat{A}\right)=15\cdot m\left(\widehat{B}\right)\\ m\left(\widehat{A}\right)-m\left(\widehat{B}\right)=30^\circ\end{cases}\Rightarrow m\left(\widehat{A}\right)=90^\circ$, $m\left(\widehat{B}\right)=60^\circ$.